

**Д. И. Блохинцев**

**ИЗБРАННЫЕ  
ТРУДЫ**

**ТОМ II**

Д. И. Блохинцев

# ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

ТОМ II

Блохинцев Д.И. **Избранные труды.** В 2 т. Т. 2. **Принципиальные вопросы квантовой механики. Квантовая теория поля и теория элементарных частиц. Выступления по общим вопросам науки.** —

Д. И. Блохинцев (1908–1979) — выдающийся ученый-физик с энциклопедической широтой интересов, автор многочисленных монографий и классического учебника по квантовой механике, научный руководитель работ по созданию первой в мире атомной электростанции, организатор и первый директор Объединенного института ядерных исследований в Дубне, Герой Социалистического Труда, кавалер многих высших орденов СССР, лауреат Ленинской и Государственных премий СССР, член-корреспондент АН СССР и член ряда зарубежных академий.

В настоящий том включены работы Д.И. Блохинцева по принципиальным вопросам квантовой механики, статьи, посвященные существенно-нелинейной и нелокальной теории поля и теории элементарных частиц, выступления по общим вопросам науки и философским вопросам естествознания, а также некоторые научно-популярные статьи.

Издание рассчитано на научных работников — физиков-теоретиков, аспирантов и студентов старших курсов университетов.

## Предисловие

Д. И. Блохинцев — выдающийся физик и организатор науки, член-корреспондент АН СССР. Для научного творчества Дмитрия Ивановича характерна поистине энциклопедическая широта интересов.

Во второй том избранных трудов включены его работы по основам квантовой механики, статьи по существенно-нелинейной и нелокальной теории поля, по теории элементарных частиц, выступления по общим вопросам науки и по философским вопросам естествознания, а также некоторые научно-популярные статьи.

Д. И. Блохинцев внес важный вклад в разработку последовательной интерпретации квантовой механики на основе созданной им теории квантовых ансамблей. Им построена теория квантовых измерений и выяснена роль классического прибора в процессе измерения. Эти результаты являются общепризнанными в научном сообществе. Д. И. Блохинцев — автор первого университетского учебника по квантовой механике, который выдержал 7 изданий в нашей стране и переведен на многие языки мира. Этот учебник не потерял своего значения и в наши дни.

Дмитрий Иванович первым (1938) предложил теорию существенно квантово-полевого эффекта — лэмбовского сдвига задолго до построения математического аппарата квантовой теории поля и теории перенормировок. К сожалению, эта работа не получила тогда должной оценки и не была опубликована. Лишь в послевоенный период стало ясно значение этого физически наглядного подхода к данной проблеме.

Дмитрий Иванович первым высказал идею о возможности существования нескольких вакуумов в квантово-левой системе и спонтанных переходов между ними. Он впервые оценил поведение слабого взаимодействия элементарных частиц в области высоких энергий и указал на существование унитарного предела, за которым неизбежно должна появиться новая физика микромира.

Для решения проблемы устранения ультрафиолетовых расходимостей в квантовой теории поля Д. И. Блохинцев одним из первых обратился к изучению нелокальных и нелинейных взаимодействий. Исследуя существенно-нелинейные поля, он пришел к выводу о том, что понятие точечных координат частиц теряет смысл, если спектр масс частиц ограничен сверху. В конечном счете, это приводит к необходимости изменения геометрии микромира.

Дмитрию Ивановичу принадлежит плодотворная идея флуктонов — флуктуаций плотности ядерного вещества, способных как единое целое воспринимать большой импульс налетающей частицы. Это позволило объяснить рождение «кумулятивных» частиц в реакциях с релятивистскими ядрами.

Оригинальные идеи и конкретные исследования Дмитрия Ивановича нашли широкое применение в квантовой теории поля и в теории элементарных



частиц, они и сейчас представляют большой научный интерес. Несомненно, интересен и ход его рассуждений и эволюция его взглядов на важнейшие проблемы, которые волнуют физиков. Все это можно найти в данном издании избранных научных трудов Д. И. Блохинцева. Здесь же помещены репродукции нескольких его картин.

При подготовке издания большую помощь редколлегии оказали физики-теоретики, написавшие комментарии ко многим статьям Д. И. Блохинцева: А. Л. Куземский, Г. В. Ефимов, А. В. Ефремов, В. Д. Тонеев, Х. Намсрай, Н. М. Плакида, А. Б. Пестов. В своей работе редколлегия постоянно пользовалась советами и помощью Татьяны Дмитриевны Блохинцевой. Большую работу по электронному набору и верстке выполнили сотрудники Издательского отдела ОИЯИ Е. Н. Водоватова, Е. В. Сабаева, Л. В. Пахомова и Е. М. Граменицкая. В подготовке фотоматериалов большая заслуга принадлежит Б. М. Старченко и Ю. А. Туманову. Полный и детальный библиографический список трудов Д. И. Блохинцева был подготовлен сотрудниками Научно-технической библиотеки ОИЯИ Е. В. Ивановой и В. В. Лицитис. Следует отметить высокий профессионализм и ответственное отношение к делу сотрудников издательства «Физматлит» и прежде всего генерального директора издательства М. Н. Андреевой, Е. С. Артоболевской, Ю. А. Тюриной и В. Р. Игнатовой. Нам помогали также В. Л. Аксенов, И. Г. Андреева, А. В. Малых, С. Н. Неделько, Ю. В. Фролов, А. Е. Шабат, А. Н. Шабашова. Редколлегия выражает всем им глубокую благодарность.

*Редколлегия*

# Часть VI

## ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

### 61

#### КВАНТОВЫЙ АНСАМБЛЬ ГИББСА И ЕГО СВЯЗЬ С КЛАССИЧЕСКИМ АНСАМБЛЕМ\*

Исследуется предельный переход от квантовых уравнений движения для матрицы плотности, описывающей ансамбль Гиббса в квантовой механике, к уравнениям движения для классических функций распределения. Установлена особая роль условия различия частиц.

Наиболее общий квантовый ансамбль  $N$  частиц описывается матрицей плотности (или же статистическим оператором согласно терминологии фон Неймана)  $\rho$ . Элементы этой матрицы могут быть записаны в следующем виде:

$$(q_1 q_2 \dots q_k \dots q_N | \rho | q'_1 q'_2 \dots q'_k \dots q'_N) = (q | \rho | q'), \quad (1)$$

где  $q_k$  обозначает совокупность координат  $k$ -й частицы. Матрица  $\rho$  удовлетворяет уравнению движения

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = H\rho - \rho H, \quad (2)$$

где  $H$  — гамильтониан системы исследуемых частиц. На матрицу  $\rho$  накладываются следующие условия:

$$(q | \rho | q') = (q' | \rho | q)^* \quad (3)$$

(свойство эрмитовости) и, если дополнительно наложено свойство неразличимости частиц, то

$$P_q(q | \rho | q') = \pm (q | \rho | q'), \quad (3a)$$

$$P'_q(q | \rho | q') = \pm (q | \rho | q'), \quad (3б)$$

$$P_q P'_q(q | \rho | q') = + (q | \rho | q'). \quad (3в)$$

Здесь  $P_q$  обозначает перестановку координат  $q_i$   $i$ -й частицы и координат  $q_k$   $k$ -й частицы. Аналогично  $P'_q$  означает перестановку координат  $q'_i$  и  $q'_k$ .  $P_q P'_q$  означает перестановку  $i$ -й и  $k$ -й частиц. Знак плюс или минус выбирается в зависимости от того, какой статистике (Бозе или Ферми) подчиняются

частицы. Условие симметрии при перестановке частиц (3в) (неразличимость частиц) можно рассматривать как следствие (3а) и (3б)<sup>1</sup>.

На первый взгляд и матрица  $\rho$  (1), и уравнение (2), которому она удовлетворяет, значительно отличаются от классической функции распределения  $f(q, p)$  в фазовом пространстве ( $p$  обозначает импульсы частиц) и от уравнения, которому удовлетворяет эта функция,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \left( \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial p} \right) \equiv -[H, f]_1, \quad (4)$$

где  $H = H(p, q)$  — классическая функция Гамильтона для системы частиц<sup>2</sup>.

Тем не менее связь между классической функцией распределения  $f(q, p)$  и квантовой матрицей  $\rho$  может быть установлена, если обратиться к так называемому смешанному представлению ( $p, q$ ) матрицы  $\rho$ . Поэтому определим матрицу  $\rho$  в смешанном представлении ( $q|\rho|p$ ) с помощью фурье-преобразования матрицы ( $q|\rho|q'$ ):

$$(q|\rho|p) = \int (q|\rho|q') \frac{e^{ipq'/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} dq', \quad (5)$$

$$(q|\rho|q') = \int (q|\rho|p) \frac{e^{-ipq'/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} dp. \quad (5')$$

Аналогично для любой механической величины  $L$  введем вместо матричных элементов ( $q|L|q'$ ) смешанные элементы

$$(q|L|p) = \int (q|L|q') \frac{e^{ipq'/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} dq', \quad (6)$$

$$(q|L|q') = \int (q|L|p) \frac{e^{-ipq'/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} dp. \quad (6')$$

Смешанные матричные элементы могут быть заменены новыми величинами, которые связаны с ними следующими соотношениями:

$$R(q, p) = (q|\rho|p) e^{-ipq/\hbar} \sqrt{2\pi\hbar}, \quad (7)$$

$$L(q, p) = (q|L|p) e^{-ipq/\hbar} \sqrt{2\pi\hbar}. \quad (8)$$

Эти величины, которые являются функциями  $p, q$ , полностью заменяют исходные ( $q|\rho|q'$ ) и ( $q|L|q'$ ). Действительно, полагая  $q' = q + \xi$ , мы получаем с помощью (5'), (6'), (7) и (8)

$$(q|\rho|q + \xi) = \int R(q, p) \frac{e^{-ip\xi/\hbar}}{2\pi\hbar} dp, \quad (7')$$

<sup>1</sup> Условия (3а) и (3б) эквивалентны условию симметрии или антисимметрии волновых функций по отношению к перестановке любой пары частиц.

<sup>2</sup> Мы рассматриваем здесь только одну пару канонически сопряженных координат и импульсов ( $p, q$ ). Таким же образом мы будем поступать и далее, хотя все наши рассуждения легко обобщаются на случай произвольного числа степеней свободы за исключением одного момента, который будет ниже специально отмечен.

$$(q|L|q + \xi) = \int L(q, p) \frac{e^{-ip\xi/\hbar}}{2\pi\hbar} dp. \quad (8')$$

Величина  $L(q, p)$  в (8) обладает замечательными свойствами, а именно, если соответствующая классическая величина  $L_{\text{кл}}(q, p)$  не содержит произведений некоммутирующих (в квантовой механике) величин, т. е. она имеет вид  $L_{\text{кл}}(q, p) = f(q) + \varphi(p)$ , то величина  $L(q, p)$ , определяемая согласно (8), равна  $L_{\text{кл}}(q, p)$ . Однако, если такие произведения встречаются (например,  $p \cdot q$ ), то  $L(q, p) = L_{\text{кл}}(q, p)$  плюс члены более высокого порядка по  $\hbar^1$ .

Поэтому можно ожидать, что не матрица  $(q|\rho|p)$ , а функция  $R(q, p)$ , которую мы ввели, будет аналогом классической функции распределения  $f(q, p)$ , и именно она будет стремиться к  $f(q, p)$  при  $\hbar \rightarrow 0$ . Это предположение оправдывается, хотя, как будет показано ниже, и не во всех отношениях.

Прежде чем переходить к установлению связи между  $R(q, p)$  и  $f(q, p)$ , сформулируем условия (3), (3а), (3б) и (3в), накладываемые на матрицу  $\rho$ , в терминах новой функции  $R$ .

Для того чтобы переформулировать условие самосопряженности (3) для  $R(q, p)$ , мы выразим  $(p|\rho|q') = (q|\rho|q + \xi)$  в (3) в терминах  $R(q, p)$  с помощью (7'). Далее без труда получаем

$$R^*(q, p) = \int R(q + \xi, p + \eta) e^{i\xi\eta/\hbar} \frac{d\xi d\eta}{2\pi\hbar}. \quad (9)$$

Условие эрмитовости для  $L(q, p)$  формулируется точно так же. В том случае, когда  $L(q, p) = f(q) + \varphi(p)$ , это условие записывается наиболее просто, а именно  $L^*(q, p) = L(q, p)$ .

Что касается дополнительных условий симметрии, накладываемых на функцию  $R(q, p)$ , то ситуация здесь совершенно другая. С учетом (5) и того, что произведение  $pq$  в показателе экспоненты в случае нескольких частиц есть сумма  $\sum_k p_k q_k$ , из (3а), (3б) и (3в) следует

$$P_q(q|\rho|p) = \pm(q|\rho|p), \quad (3а')$$

$$P_p(q|\rho|p) = \pm(q|\rho|p), \quad (3б')$$

$$P_q P_p(q|\rho|p) = +(q|\rho|p). \quad (3в')$$

Кроме того,  $P_q$  сохраняет свое первоначальное значение, в то время как  $P_p$  означает перестановку импульсов  $p_i$  и  $p_k$   $i$ -й и  $k$ -й частиц.

С помощью (7) получаем для  $R(q, p)$  из (3а'), (3б') и (3в') следующие соотношения:

$$P_q R(q, p) = \pm R(q, p) e^{-\frac{i}{\hbar}(p_i - p_k)(x_i - x_k)}, \quad (10а)$$

$$P_p R(q, p) = \pm R(q, p) e^{-\frac{i}{\hbar}(p_i - p_k)(x_i - x_k)}, \quad (10б)$$

$$P_q P_p R(q, p) = R(q, p). \quad (10в)$$

<sup>1</sup> См. статью Я.П.Терлецкого «О предельном переходе квантовой механики в классическую». ЖЭТФ. 1937. Т.7. С.1290. В этой работе не уделяется внимания связи между излагаемыми нами рассуждениями, с одной стороны, и общей теорией преобразований и методом матрицы плотности, с другой.

Таким образом, последнее условие (симметрия по частицам) не содержит  $\hbar$  и может быть сформулирована так же, как и в классике. В противоположность этому специальные условия симметрии по импульсам и координатам (10а) и (10б) содержат  $\hbar$ , причем эта зависимость имеет существенную особенность при  $\hbar \rightarrow 0$ .

Функция  $R(q, p)$ , так же как и  $(p|\rho|q')$ , позволяет вычислить среднее значение любой величины  $L(q, p)$ . Действительно, если величина  $L$  представлена оператором  $L$ , то среднее значение  $\bar{L}$  определяется формулой

$$\bar{L} = \text{Sp}(L\rho) = \int (q|L|q')(q'|\rho|q) dq dq'.$$

Выражая с помощью (7') и (8')  $(q|L|q')$  и  $(q'|\rho|q)$  через  $L(q, p)$  и  $R(q, p)$  соответственно, получаем

$$\bar{L} = \int \frac{d\xi d\eta dp dq}{(2\pi\hbar)^2} e^{i\xi\eta/\hbar} L(q, p) R(q + \xi, p + \eta), \quad (11)$$

или

$$\bar{L} = \int \frac{dp dq}{2\pi\hbar} L(q, p) R^*(q, p), \quad (11')$$

что полностью аналогично классическому среднему

$$\bar{L} = \int \frac{dp dq}{2\pi\hbar} L_{\text{кл}}(q, p) f(q, p). \quad (11'')$$

Далее легко убедиться в том, что среднее значение (11) или (11') для эрмитова оператора  $L$  является действительной величиной, как это и должно быть<sup>1</sup>.

Заменяя в уравнении (2)  $(q|\rho|q')$  на  $R(q, p)$  с помощью (7) и  $(q|H|q')$  на  $H(q, p)$  с помощью (8), мы получаем уравнение движения для  $R(q, p)$ :

$$i\hbar \frac{\partial R(q, p)}{\partial t} = \int \frac{d\xi d\eta}{2\pi\hbar} e^{-i\xi\eta/\hbar} [H(q, p + \eta) R(q + \xi, p) - H(q + \xi, p) R(q, p + \eta)], \quad (12)$$

где  $H(q, p)$  есть не что иное, как классическая функция Гамильтона рассматриваемой системы частиц. Нетрудно проверить, что условия (9) и (10) остаются справедливыми для всех моментов времени, если они выполнялись в некоторый фиксированный момент.

Для того чтобы установить связь с уравнением для классической функции распределения (4), мы разложим  $R$  и  $H$  в (9) и (12) в ряды по  $\xi$  и  $\eta$ . В результате возникает сумма интегралов следующего вида:

$$I_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi d\eta}{2\pi\hbar} e^{\pm i\xi\eta/\hbar} \xi^n \eta^m. \quad (13)$$

<sup>1</sup> Чтобы проверить это, необходимо воспользоваться уравнением (9), применяя его к  $L(q, p)$ .

Эти интегралы могут быть легко вычислены с помощью  $\delta$ -функции. Действительно,

$$I_{nm} = \left( \pm \frac{\hbar}{i} \right)^m \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^n d\xi d\eta}{2\pi\hbar} \frac{\partial}{\partial \xi^m} e^{\pm i\xi\eta/\hbar} =$$

$$= (\mp i\hbar)^m \int_{-\infty}^{\infty} \xi^n \frac{d^m \delta(\xi)}{d\xi^m} d\xi = (\pm i\hbar)^m m! \delta_{nm}, \quad (13')$$

где  $\delta_{nm} = 1$ , если  $n = m$ , и  $\delta_{nm} = 0$ , если  $n \neq m$ .

Используя эту формулу, получаем вместо (9) и (12)

$$R^*(q, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\hbar)^n}{n!} \frac{\partial^{2n} R(q, p)}{\partial p^n \partial q^n}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial R(q, p)}{\partial t} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i\hbar)^{n-1}}{n!} [H, R]_n, \quad (15)$$

где

$$[H, R]_n \equiv \frac{\partial^n H}{\partial p^n} \frac{\partial^n R}{\partial q^n} - \frac{\partial^n H}{\partial q^n} \frac{\partial^n R}{\partial p^n} \quad (16)$$

есть скобка Пуассона  $n$ -го порядка<sup>1</sup>.

Для того чтобы эти уравнения при  $\hbar \rightarrow 0$  являлись приближением для классического уравнения, необходимо, чтобы функция  $R$  могла быть разложена в ряд по степеням  $\hbar$ . Такое разложение может быть выполнено только в том случае, если мы пренебрежем условиями симметрии или антисимметрии (10а) и (10б).

В частности, эти условия отсутствуют для ансамбля Гиббса, образованного системами, состоящими из одной частицы или же из различных частиц.

Разлагая в этом случае  $R$  в ряд

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} R_n \hbar^n, \quad (17)$$

получаем вместо (14) и (15) систему уравнений для функций<sup>2</sup>  $R_n^*$ :

$$R_n^* = \sum_{k=0}^{k \leq n} \frac{i^k}{k!} \frac{\partial^{2k} R_{n-k}}{\partial p^k \partial q^k}, \quad (14')$$

$$\frac{\partial R_n}{\partial t} = - \sum_{k=0}^{k \leq n+1} \frac{(-i)^{k-1}}{k!} [H, R_{n+1-k}]_k. \quad (15')$$

<sup>1</sup> Уравнения (15) и (16) легко обобщаются на любое число степеней свободы.

<sup>2</sup> Легко проверить, что как только уравнение (15') для  $R_n$  выполнено, то уравнение для  $R_n^*$  выполняется тождественно в силу (14'), т.е. условие (14') инвариантно относительно временной эволюции.

Первые уравнения в этих системах записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} R_0 &= R_0^*, \quad R_1^* = R_1 + \frac{i}{1!} \frac{\partial^2 R_0}{\partial p \partial q}, \\ R_2^* &= R_2 + \frac{i}{1!} \frac{\partial^2 R_1}{\partial p \partial q} - \frac{1}{2!} \frac{\partial^4 R_0}{\partial p^2 \partial q^2}, \dots; \end{aligned} \quad (14'')$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_0}{\partial t} &= -[H, R_0]_1, \quad \frac{\partial R_1}{\partial t} = -[H, R_1]_1 + \frac{i}{2!} [H, R_0]_2, \\ \frac{\partial R_2}{\partial t} &= -[H, R_2]_1 + \frac{1}{2!} [H, R_1]_2 + \frac{1}{3!} [H, R_0]_3, \dots \end{aligned} \quad (15'')$$

В частности, уравнение для  $R_0$  в точности совпадает с уравнением (4) для классической функции распределения  $f(q, p)$ , и это доказывает прямую связь между  $R(p, q)$  и  $f(q, p)$ .

В то же время мы должны сделать вывод, что условие неразличимости частиц является «более квантовым» по сравнению с уравнениями движения, так как при выполнении этого условия функция  $R$  не может быть разложена по степеням  $\hbar$ .

Причину такого заключения наиболее просто понять, если мы обратимся к представлению матрицы  $\rho$ , данному в (1) (аналогичное рассмотрение может быть проведено также и в  $(q, p)$ -представлении).

Волновые функции  $\psi(q)$  (а также и  $\psi(p)$ ), как известно, не могут быть разложены по степеням  $\hbar$ , и когда  $\hbar \rightarrow 0$

$$\psi(q) = A(q) e^{iS(q)/\hbar},$$

где  $S(q)$  — функция действия. С другой стороны, матрица  $\rho$  билинейна по  $\psi(q)$ , причем отдельные слагаемые имеют следующий характерный вид:

$$\psi(q)\psi^*(q') = A(q)A(q') e^{i[S(q)-S(q')]/\hbar}.$$

Для диагональных членов ( $q = q'$ ) зависимость от  $\hbar$  в показателе экспоненты исчезает. Поэтому матрица  $\rho$  может быть разложена по степеням  $\hbar$ . Это справедливо также и для ансамбля, образованного многими частицами, если условие симметрии или антисимметрии на  $\psi$  не наложено. Однако, если это условие имеет место, то ситуация будет иной. Это легко пояснить на примере двух частиц. Выпишем для этого случая симметризованную волновую функцию  $\psi(q_1 q_2)$

$$\psi(q_1 q_2) = A(q_1 q_2) e^{iS(q_1 q_2)/\hbar} \pm A(q_2 q_1) e^{iS(q_2 q_1)/\hbar}.$$

Здесь знак «плюс» соответствует статистике Бозе, а знак «минус» — статистике Ферми. Отдельные слагаемые в  $(q|\rho|q')$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi(q_1 q_2)\psi^*(q'_1 q'_2) &= \\ &= A(q_1 q_2)A(q'_1 q'_2) e^{i[S(q_1 q_2)-S(q'_1 q'_2)]/\hbar} + A(q_2 q_1)A(q'_2 q'_1) e^{i[S(q_2 q_1)-S(q'_2 q'_1)]/\hbar} \pm \\ &\pm A(q_2 q_1)A(q'_1 q'_2) e^{i[S(q_2 q_1)-S(q'_1 q'_2)]/\hbar} \pm A(q_1 q_2)A(q'_2 q'_1) e^{i[S(q_1 q_2)-S(q'_2 q'_1)]/\hbar}. \end{aligned}$$

Диагональный элемент матрицы  $\rho$  определяется формулой

$$\psi^*(q_1 q_2) \psi(q_1 q_2) = A(q_1 q_2) A(q_1 q_2) + A(q_2 q_1) A(q_2 q_1) \pm \\ \pm 2 A(q_1 q_2) A(q_2 q_1) \cos \{ [S(q_1 q_2) - S(q_2 q_1)] / \hbar \},$$

т. е. он сингулярен, если постоянная Планка  $\hbar$  стремится к нулю.

Таким образом, квантовая функция  $R(q, p)$  при  $\hbar \rightarrow 0$  аппроксимируется классической функцией  $f(q, p)$  только для ансамбля различных частиц (отличающихся друг от друга как угодно мало, но тем не менее нетождественных).

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступила  
18 июля 1939 г.

Комментарий. В 1940 г. внимание Блохинцева привлекают проблемы статистического описания квантовых систем. Интерес к этим вопросам возник у него благодаря лекциям и работам по квантовой механике Л. И. Мандельштама и К. В. Никольского. В 1936 г. К. В. Никольский публикует работу «Принципы квантовой механики. I» [1], в которой он, по его словам, «... строго сформулировал основное различие между классическим и квантовым процессом». Свою цель Никольский видел в том, чтобы «... развить независимо от физики наиболее рациональный для этих целей статистический метод, а затем, посредством его, сформулировать количественные квантовые законы» [1]. В более развернутом виде содержание этой статьи вошло в основную монографию Никольского «Квантовые процессы» [2], где была сформулирована интерпретация квантовой механики на основе концепции квантовых ансамблей.

В работе Блохинцева № 61, которая во многом является пионерской, исследовался предельный переход от квантовых уравнений движения для матрицы плотности к уравнениям движения для классической функции распределения. (О матрице плотности см. разд. 46 в книге Блохинцева [3], а также книгу [4]). Вопрос о предельном переходе от квантовой механики к классической механике интересовал и Л. И. Мандельштама. В 1936 г. его студент, Я. П. Терлецкий, выполнил под его руководством работу «О предельном переходе квантовой механики в классическую» [5]. В данной работе Блохинцева, с общей точки зрения, изучалась возможность установить соответствие между классической функцией распределения  $f(q, p)$  и квантовой матрицей плотности  $\rho$ . Для этого использовалось «смешанное»  $(q, p)$ -представление для матрицы плотности  $\rho$ . Далее вводилась функция  $R(q, p)$ , которая, как предполагалось, может быть аналогом классической функции распределения  $f(q, p)$  при  $\hbar \rightarrow 0$ . Эта функция является полным аналогом классической плотности в пространстве фаз  $f(q, p)$  для ансамбля Гиббса. Функция  $R(q, p)$ , подобно функции  $\langle q | \rho | q' \rangle$ , позволяет найти средние значения любой величины



$L(q, p)$ . Однако, исследование возможности разложения функции  $R(q, p)$  по степеням  $\hbar$  при  $\hbar \rightarrow 0$  показало, что это можно сделать только в том случае, когда не учитывается симметрия или антисимметрия волновых функций. По словам самого Блохинцева, «в работе № 61 было показано, что не существует какой-либо функции распределения, зависящей от  $(q, p)$ , которая могла бы изобразить квантовый ансамбль» [3]. В своем автореферате он также замечает, что «аналогия квантового ансамбля с классическим ансамблем Гиббса оказалась столь далеко идущей, что меня одно время одолевали мысли о возможности сформулировать всю квантовую механику в терминах матрицы плотности в фазовом пространстве  $R(q, p)$ » (см. работу [6] и книги [7–9]). Однако впоследствии выяснилось, что при конструировании квантового ансамбля Гиббса возникает много проблем [10], полных ответов на которые не дано до сих пор (см. обзор [11]). Например, в книге [12] рассмотрена ситуация, когда измерения производятся над статистическим ансамблем, состоящем из  $N$  подсистем, которые могут находиться в различных квантовых состояниях. Обсуждается вопрос о вычислении средних значений в чистом состоянии и в состоянии описываемом матрицей плотности  $\rho$ . «Следует заметить, ... что в квантовой статистической механике выражение  $S = -(\ln \rho) = -(\rho \ln \rho)$  определяет энтропию статистического ансамбля, описываемого матрицей плотности  $\rho$ . Энтропия обращается в нуль в случае чистого состояния, и только в этом случае. Используя этот способ, можно обойтись без понятия «фазового пространства», вводимого в классической механике и не имеющего смысла в квантовой механике в силу того, что импульс и координата являются несовместимыми характеристиками» [12]. Однако дальнейшее развитие квантовой физики показало, что вопрос о соответствии квантового и классического описания весьма многогранен и чрезвычайно сложен и требует тщательного и всестороннего анализа (см. работы [10–20]). В настоящее время проблема систематического вывода функций распределения в обобщенных фазовых пространствах продолжает интенсивно изучаться (см. работы [21–23]).

Подробное обсуждение предельного перехода от квантовой статистики к классической дано в книге [24]. Здесь рассмотрен предельный переход как для статистических сумм, так и для равновесных статистических операторов. См. также обсуждение этого вопроса и дополнительные ссылки в работе [25].

1. Никольский К. В. // УФН. 1936. Т. 16. С. 537.
2. Никольский К. В. Квантовые процессы. М.: ГТТИ, 1940.
3. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. 5-е изд. М.: Наука, 1976.
4. Белоусов Ю. М., Манько В. И. Матрица плотности. Представления и применения в статистической механике. М.: Изд-во МФТИ, 2004.
5. Терлецкий Я. П. // ЖЭТФ. 1937. Т. 7. С. 1290.
6. O'Connel R. F., Wigner E. P. Quantum Mechanical Distribution Functions: Conditions for Uniqueness // Phys. Lett. A. 1981. V. 83. P. 145.
7. Zachos C., Fairlie D., Curtright T. Quantum Mechanics in Phase Space. Singapore: World Scientific, 2005.
8. Robinet R. W. Quantum Mechanics: Classical Results, Modern Systems, and Visualized Examples. Oxford: Oxford Uni. Press, 1997.

9. *Ballentine L. E.* Quantum Mechanics: A Modern Development. Singapore: World Scientific, 1998.
10. *Wichmann E. H.* Density Matrices Arising from Incomplete Measurements // *J. Math. Phys.* 1963. V. 4. P. 884.
11. *Kuzemsky A. L.* // *Intern. J. Mod. Phys. B.* 2007. V. 21. P. 2821–2942. (cond-mat/0707.0753).
12. *Кемпфер Ф.* Основные положения квантовой механики. М.: Мир, 1967. Гл. 4.
13. *Khalfin L. A., Tsirelson B. S.* Quantum/Classical Correspondence in the Light of Bell Inequalities // *Foundat. Phys.* 1992. V. 22. P. 879.
14. *Heller E., Tomsovic S.* Postmodern Quantum Mechanics // *Phys. Today.* 1993. No. 7. P. 38.
15. *de Polavieja G. G.* Nonstatistical Quantum–Classical Correspondence in Phase Space // *Foundat. Phys. Lett.* 1996. V. 9. P. 411.
16. *Omnes R.* Quantum–Classical Correspondence Using Projection Operators // *J. Math. Phys.* 1997. V. 38. P. 697.
17. *Galapon E. A.* Quantum–Classical Correspondence of Dynamical Observables, Quantization, and the Time of Arrival Correspondence Problem // *Optics and Spectroscopy.* 2001. V. 91. P. 399.
18. *Sewell G. L.* Quantum Mechanics and its Emergent Macrophysics. Princeton: Princeton Uni. Press, 2002.
19. *Esposito G., Marmo G., Sudarshan G.* From Classical to Quantum Mechanics. An Introduction to the Formalism, Foundations and Applications. Cambridge: Cambridge Uni. Press, 2004.
20. *Ball P.* Quantum All the Way // *Nature.* 2008. V. 453. P. 22.
21. *Wlodarz J. J.* On Phase–Space Representation of Quantum Mechanics // *Phys. Lett. A.* 2001. V. 286. P. 97.
22. *Kakazu K., Kiyuna M., Sakai E.* Systematic Derivation of the Number-Phase Distribution Functions // *Prog. Theor. Phys.* 2007. V. 118. P. 827.
23. *Kakazu K., Kiyuna M., Sakai E.* The Number-Phase and Position-Momentum Distribution Functions // *Prog. Theor. Phys.* 2009. V. 121. P. 217.
24. *Зубарев Д. Н.* Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971.
25. *Куземский А. Л.* // *ЭЧАЯ.* 2008. Т. 39, вып. 1. С. 5–81.

*А. Л. Куземский*

## СВЯЗЬ КВАНТОВОГО АНСАМБЛЯ С КЛАССИЧЕСКИМ АНСАМБЛЕМ ГИББСА. II\*

*Совместно с П. Э. Немировским*

Рассматривается вопрос об условиях аппроксимации квантовой статистики классической. Показано, что от квантового ансамбля, состоящего из одинаковых частиц, нет предельного перехода ( $\hbar \rightarrow 0$ ) к классическому. Классическое описание получается в том случае, когда состояние систем характеризуется положением в фазовых ячейках  $\Omega \gg \hbar$ .

В предыдущей работе<sup>1</sup> было показано, что наиболее общий квантовый ансамбль может быть описан с помощью некоторой функции — импульсов ( $p$ ) и координат ( $q$ ) —  $R(p, q)$ , являющейся полным аналогом классической плотности в пространстве фаз  $f(p, q)$  для ансамбля Гиббса. Ради определенности мы будем называть функцию  $R(p, q)$  также «плотностью в пространстве фаз ( $p, q$ )». Невозможность одновременного измерения координат ( $q$ ) и импульсов ( $p$ ) в таком представлении выражается в обязательной комплексности введенной «плотности фаз»  $R(p, q)$ . Однако величины

$$W(q) = \int R(p, q) \frac{dp}{2\pi\hbar}, \quad (1)$$

$$W(p) = \int R(p, q) \frac{dq}{2\pi\hbar} \quad (2)$$

действительны, и первая из них есть плотность вероятности в пространстве конфигураций ( $q$ ), а вторая имеет то же значение для пространства импульсов ( $p$ ). В I было также показано, что в случае возможности разложения квантовой плотности в пространстве фаз  $R(p, q)$  по степеням  $\hbar$ , последняя аппроксимируется классической плотностью фаз  $f(p, q)$  и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -[H, R]_1 + \sum_{n \geq 2} \frac{(-i\hbar)^{n-1}}{n!} [H, R]_n, \quad (3)$$

где

$$[H, R]_n = \frac{\partial^n H}{\partial p^n} \frac{\partial^n R}{\partial q^n} - \frac{\partial^n H}{\partial p^n} \frac{\partial^n R}{\partial q^n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

и  $H(p, q)$  есть функция Гамильтона. В частности для

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (5)$$

уравнение (3) в раскрытой форме имеет вид

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial R}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 R}{\partial p^2} - \sum_{n \geq 2} \frac{(-i\hbar)^{n-1}}{n!} \frac{\partial^n V}{\partial q^n} \frac{\partial^n R}{\partial p^n}. \quad (3')$$

Написанное в (3') разложение требует гладкости  $R(p, q)$  и  $V(q)$ , причем для первой величины как в отношении  $p$ , так и в отношении  $q$ , т. е. требуется гладкость в пространстве фаз.

С этой точки зрения непосредственно видно, что квантовые ансамбли, имеющие близкие к себе классические ансамбли, должны характеризоваться большой величиной дисперсии как для  $p$  ( $\overline{\Delta p^2}$ ), так и для  $q$  ( $\overline{\Delta q^2}$ ), порознь.

По этой причине более благоприятными в смысле наличия близкого классического ансамбля будут смешанные квантовые ансамбли (смеси), характеризующиеся, в отличие от чистых ансамблей, не одной, а целым набором волновых функций, и соответствующих вероятностей. Как пример приведем состояние, описываемое волновой функцией:

$$\psi_{p_0 q_0}(p, q) = N \exp \left[ -\frac{(q - q_0)^2}{2a^2} + i \frac{p_0(q - q_0)}{\hbar} \right]. \quad (6)$$

Для этого состояния, согласно определению (см. I, (7)), имеем

$$R_{p_0 q_0}(p, q) = \sqrt{2} \exp \left[ -\frac{(q - q_0)^2}{a^2} - \frac{(p_0 - p)^2 a^2}{2\hbar^2} + i \frac{(p_0 - p)(q - q_0)}{\hbar} \right]. \quad (7)$$

Эта плотность не разлагается по степеням  $\hbar$  и при  $\hbar \rightarrow 0$  переходит в

$$f_{p_0 q_0}(p, q) = \sqrt{2} \exp \left[ -\frac{(q - q_0)^2}{a^2} \right] \delta(p - p_0). \quad (7')$$

При наличии поля  $V(q)$  из-за  $\delta$ -функции мы будем иметь бесконечно большие производные  $\partial^n R / \partial p^n$  и закон движения для  $R$  (3') не будет аппроксимироваться классическим. Представим теперь себе, что мы имеем дело с набором состояний  $\psi_{p_0 q_0}$  (смесь), причем каждое состояние встречается с вероятностью  $W(p_0, q_0)$ .

Тогда плотность фаз  $R$  для такого смешанного ансамбля равна

$$R(p, q) = \int W(p_0, q_0) R_{p_0 q_0}(p, q) dp_0 dq_0. \quad (8)$$

Если  $W(p_0, q_0)$  — гладкая функция  $p_0, q_0$ , то и  $R$  будет гладкой функцией  $p, q$ , хотя  $R_{p_0 q_0}$  этим свойством не обладает. Возьмем, например,  $W(p_0, q_0)$  в виде

$$W(p_0, q_0) = N \exp \left( -\frac{q_0^2}{A^2} - \frac{p_0^2}{B^2} \right). \quad (9)$$

Тогда для  $A^2 B^2 \geq \hbar^2$ ,  $A^2 \gg a^2$  получаем из (8) и (9)

$$R(p, q) = \sqrt{2} \exp \left( -\frac{q^2}{A^2} - \frac{p^2}{B^2} - i \frac{2pq\hbar}{A^2 B^2} \right). \quad (8')$$

Получаемая плотность  $R$  уже разлагается по степеням  $p, q$ , и аппроксимируется классической плотностью  $f$

$$f(p, q) = \exp \left[ -\frac{(q - q_0)^2}{A^2} + \frac{(p - p_0)^2}{B^2} \right]. \quad (8)$$

Как уже было отмечено в (1), мы встречаемся с существенно иным положением вещей, если имеем дело с ансамблем, состоящим из одинаковых частиц. Тогда плотность фаз  $R$  подчиняется дополнительным условиям (см. I, (10а), (10б), (10в)), относящимся к перестановке ее аргументов. Именно

$$P_q R(p, q) = \pm R(p, q) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} (p_i - p_k)(q_i - q_k) \right], \quad (10)$$

$$P_p R(p, q) = \pm R(p, q) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} (p_i - p_k)(q_i - q_k) \right]. \quad (10')$$

Здесь  $P_q$  — оператор, переставляющий  $q_i, q_k$ , а  $P_p$  — оператор, переставляющий  $p_i, p_k$ <sup>1</sup>. Знак  $(-)$  соответствует частицам Ферми—Дирака, а знак  $(+)$  — частицам Бозе—Эйнштейна.

Для частиц Ферми—Дирака  $R(p, q)$ , как следует из (10) и (10'), обращается в нуль на всех гиперповерхностях в пространстве фаз, где  $p_i = p_k$  или  $q_i = q_k$  (с учетом спина, следовало бы добавить  $\sigma_i = \sigma_k$ ,  $\sigma'_i = \sigma'_k$ ). Для частиц Бозе—Эйнштейна на этих же гиперповерхностях плотность фаз имеет экстремум  $\left( \frac{\partial R}{\partial p_i} = \frac{\partial R}{\partial p_k} = 0, \frac{\partial R}{\partial q_i} = \frac{\partial R}{\partial q_k} = 0 \right)$ .

Вместе с тем из (10) и (10') следует, что плотность фаз  $R$  не является теперь гладкой функцией  $p$  и  $q$  ни для чистого ансамбля, ни для смешанного, т. е. для квантового ансамбля из одинаковых частиц не может существовать близкого к нему классического (разложение  $R$  по степеням  $\hbar$  невозможно). Поэтому возникает вопрос, какова в этом случае связь с классическим ансамблем Гиббса?

<sup>1</sup> Если учесть спин частиц  $\sigma_i$ , то плотность  $R$  следует писать в виде:  $R(p, \sigma, q, \sigma')$  и разуметь под операторами  $P_p$  и  $P_q$  — операторы, переставляющие пары  $(p_i, \sigma_i)$ ,  $(p_k, \sigma_k)$  и  $(q_i, \sigma'_i)$ ,  $(q_k, \sigma'_k)$  соответственно.

Чтобы осветить этот вопрос, рассмотрим две невзаимодействующие частицы. Тогда, обозначая через  $r(p_1, p_2, q_1, q_2)$  плотность фаз для нашего ансамбля без учета симметрии частиц, мы получим симметризованную плотность фаз  $R$ , удовлетворяющую условиям (10) и (10') в виде

$$R = \frac{1}{2!} \left\{ r \pm P_p r \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} (p_1 - p_2)(q_1 - q_2) \right] \pm P_q r \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} (p_1 - p_2)(q_1 - q_2) \right] + P_p P_q r \right\}. \quad (11)$$

Плотность  $r$  (также и  $P_p r$ ,  $P_q r$ ,  $P_p P_q r$ ) может быть гладкой функцией  $p$  и  $q$  (например для смеси), симметризованная же плотность  $R$  содержит осциллирующие члены. Если  $r$  и  $V(q)$  гладкие функции, то мы можем ограничиться более грубым описанием системы и рассматривать вместо плотности  $R$  усредненную  $\tilde{R}$  по некоторой ячейке в фазовом пространстве. Определим  $\tilde{R}$  формулой

$$\tilde{R} = \frac{1}{\Omega^2} \int_{\Omega^2} R dp_1 dq_1 dp_2 dq_2, \quad (12)$$

где  $\Omega^2$  — объем области

$$\begin{aligned} P_1 - \frac{1}{2}\Delta \leq p_1 \leq P_1 + \frac{1}{2}\Delta, & \quad Q_1 - \frac{1}{2}\delta \leq q_1 \leq Q_1 + \frac{1}{2}\delta, \\ P_2 - \frac{1}{2}\Delta \leq p_2 \leq P_2 + \frac{1}{2}\Delta, & \quad Q_2 - \frac{1}{2}\delta \leq q_2 \leq Q_2 + \frac{1}{2}\delta. \end{aligned}$$

Считая  $r$  гладкой функцией  $p, q$  в объеме  $\Omega$ , мы можем вынести  $r$  за знак интеграла (12):

$$\tilde{R} = \frac{1}{2!} (r + P_p P_q r) \pm (P_p r + P_q r) \frac{1}{\Omega^2} \int_{\Omega^2} e^{-\frac{i}{\hbar} (p_1 - p_2)(q_1 - q_2)} dp_1 dq_1 dp_2 dq_2. \quad (13)$$

Для выполнения интегрирования полагаем  $q_1 - q_2 = \xi$ ,  $q_1 + q_2 = q$ . Интеграл в (12) дает

$$\frac{1}{\Omega^2} \int_{\Omega^2} e^{-\frac{i}{\hbar} (p_1 - p_2)(q_1 - q_2)} dp_1 dq_1 dp_2 dq_2 = \frac{1}{\Omega^2} \int \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} (P_1 - P_2)\xi} \sin^2 \frac{\Delta}{2\hbar} \xi d\xi dq}{\xi^2 / \hbar^2}. \quad (14)$$

Этот интеграл имеет наибольшее значение при  $P_1 = P_2$  или  $Q_1 = Q_2$ . Оно равно  $\hbar\pi/\Omega\sqrt{2}$ .

Таким образом

$$\tilde{R} = \frac{1}{2!} (r + P_p P_q r) + O\left(\frac{\hbar}{\Omega}\right) = r + O\left(\frac{\hbar}{\Omega}\right). \quad (15)$$

Первый член представляет симметричное распределение, которое может быть близким к классическому, а второй меньше первого в отношении  $\hbar/\Delta\delta$ , т. е. в отношении постоянной Планка  $\hbar$  к размеру выбранных фазовых ячеек  $\Omega = \Delta\delta$ .

Таким образом, если мы производим очень точные измерения, то мы всегда встретимся с областями пространства фаз, в которых имеют место существенные отступления от классических. Если же характеризовать состояние систем положением в той или иной ячейке  $\Omega \gg \hbar$ , то такие области оказываются несущественными<sup>1</sup>.

Рассмотрим теперь случай произвольного числа частиц  $N$ . Опять-таки для невзаимодействующих частиц получим в полной параллели с (11):

$$R = \frac{1}{N!} \left[ r + \sum_{(P_p P_q)} (P_p P_q) r \right] + \frac{1}{N!} \sum_{P_p \neq P_q} \pm P_p P_q r \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( \sum_{p,q} p \cdot q - P_p P_q \sum_{p,q} p \cdot q \right) \right], \quad (16)$$

где  $r$  — несимметризованная плотность фаз, а  $P_p$  и  $P_q$ , как и прежде, означают перестановки импульсов и координат соответственно. Далее

$$\sum_{p,q} p \cdot q = \sum_{i=1}^N p_i q_i.$$

В этом случае мы также можем ввести усредненную плотность  $\tilde{R}$  по формуле

$$\tilde{R} = \frac{1}{\Omega^N} \int_{\Omega^N} R dp_1 dq_1 \dots dp_N dq_N, \quad (17)$$

но придем к прежнему результату (15) в отношении различия

$$\frac{1}{N!} \left[ r + \sum_{(P_p P_q)} (P_p P_q) r \right]$$

и  $\tilde{R}$  только в случае малой плотности систем в пространстве фаз  $(p, q)$ . Вычисление  $\tilde{R}$  протекает в полной аналогии с расчетом вириальных коэффициентов для не идеальных газов по методу Урселля<sup>2</sup>. Именно, мы должны произвести группировку частиц по группам, содержащим близкие частицы.

<sup>1</sup> При точном измерении речь может идти только об измерении либо  $p$  либо  $q$ . Тогда наше рассмотрение имеет такое значение: оно показывает, что отступления от классики будут как в пространстве  $(p)$ , так и в пространстве  $(q)$ .

<sup>2</sup> См. особенно новое изложение в работах: Uhlenbeck G. E., Kahn B. // Physica. 1938. V. 5. P. 399; Ursell H. D. // Proc. Camb. Phil. Soc. 1927. V. 23. P. 685.

Не останавливаясь подробнее на этой стороне дела, заметим, что требование, чтобы  $\tilde{R}$  и

$$\frac{1}{N!} \left[ r + \sum_{(P_p P_q)} (P_p P_q) r \right]$$

мало различались, означает малость  $r$  в тех областях пространства фаз, где координаты частиц или их импульсы совпадают, так как только в этих областях усредненные фазовые множители  $\exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \left( \sum_{p,q} p \cdot q - P_p P_q \sum_{p,q} p \cdot q \right) \right]$

имеют заметно отличающиеся от 0 значения (ср. (14)). Представление  $R$  в виде (16) дает метод приближенного учета обменных сил. Действительно, этот вид  $R$  сохраняется не только для взаимодействующих частиц во внешнем поле, но и для взаимодействующих, при условии, что обменные силы малы. (Это соответствует построению симметризованной волновой функции из несимметризованных.)

Допустив, что несимметризованная фазовая плотность  $r$  каким-либо путем найдена, мы получаем симметризованную фазовую плотность  $R$  по формуле (16). Вычисленные с помощью этой плотности средние значения какой-либо величины  $L(p, q)$  (например энергии) по формуле (см. I, формула (12))

$$\bar{L} = \int L(p, q) R^*(p, q) \frac{dp dq}{2\pi\hbar} \quad (18)$$

дадут среднее значение  $\bar{L}$  с приближенным учетом обмена. Если

$$L(p, q) = H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q),$$

то (18) даст среднее значение энергии в ансамбле с учетом обменной энергии.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступила  
1 июля 1940 г.

Комментарий. Данная работа является прямым продолжением предыдущей работы. Здесь рассматривался вопрос об условиях аппроксимации квантовой статистики классической. Было показано, что от квантового ансамбля, состоящего из одинаковых частиц, нет предельного перехода ( $\hbar \rightarrow 0$ ) к классическому. Классическое описание получается в том случае, когда состояние систем характеризуется положением в фазовой ячейке  $\Omega \gg \hbar$ . Таким образом, в работах Блохинцева № 61, № 62 было положено начало нового направления: квантовая механика в фазовом пространстве [1, 2].

Еще раньше, в 1932 г., Вигнер [3] предложил подход для вычисления статистических средних измеряемых наблюдаемых величин. При этом вво-



дилась «весовая» функция  $w(Q)$ , связанная с матрицей плотности; причем статистическая информация как бы «перемещалась» от матрицы плотности к «весовой» функции. Комплексный аргумент «весовой» функции  $Q$  представляет точку фазового пространства  $(q, p)$  исследуемой системы. Основная цель работы Вигнера состояла в том, чтобы *вместо* волновой функции использовать функцию распределения вероятностей в фазовом пространстве. Функция Вигнера нашла большое применение в статистической физике, изучении когерентных свойств света [4–7] и т. п. По существу, Вигнер предложил специальный метод усреднения по квантово-механическому ансамблю, состоящий из процедуры интегрирования по  $c$ -числовым переменным в фазовом пространстве [4]. Было установлено, что этой цели могут служить большое разнообразие функций распределения квазивероятностей в фазовом пространстве [8]; функция Вигнера является одним специальным случаем подобного рода распределений. Термин «квазивероятность» необходимо подчеркнуть; функция Вигнера *играет роль* функции распределения вероятностей в фазовом пространстве, но она не удовлетворяет всем свойствам нормального распределения вероятностей. При этом были найдены общие рецепты установления соответствия между функциями распределения в фазовом пространстве и правилами сопоставления классическим величинам их квантово-механических аналогов — т. е. операторов [4–8]. Существует большое число функций распределения квазивероятностей в фазовом пространстве, служащих тем же целям, что и функция Вигнера [8–10]. В частности, Мойэл [10] в 1949 г. сформулировал общий подход к квантовой механике как статистической теории, или, точнее, как виду «индетерминистической статистической динамики». В этом подходе «функции распределения для полных систем динамических переменных, характеризующих систему, выражаются через волновые векторы квантовой теории. Эти фазовые функции распределения играют основную роль в статистической теории. Показано, что используемая процедура эквивалентна выбору определенного типа теории функций некоммутирующих операторов и, следовательно, может рассматриваться как интерпретация квантовой кинематики» [10]. Далее, на основании уравнений движения квантовой динамики выводились соотношения, определяющие изменения этих фазовых распределений со временем. Оказалось, что они имеют вид, характерный для динамических стохастических процессов. Было показано, что этими уравнениями эволюции в фазовом пространстве можно пользоваться вместо уравнения Шрёдингера. Функция Вигнера и другие функции распределения в фазовом пространстве продолжают интенсивно изучаться и находят все новые области приложения [11–14]. Недавно было показано (в том числе экспериментально), что можно охарактеризовать меру неклассичности квантовых состояний, измеряя объем отрицательной части функции Вигнера [15]. Другие аспекты квантовой теории в фазовом пространстве и разнообразные приложения можно найти в книгах и обзорах [1, 2, 5, 16–20].

1. Kim Y. S., Noz M. E. Phase Space Picture of Quantum Mechanics. Singapore: World Scientific, 1991.
2. Zachos C., Fairlie D., Curtright T. Quantum Mechanics in Phase Space. Singapore: World Scientific, 2005.

3. *Wigner E. P.* The General Properties of the Distribution Function and Remarks on its Weakness // The Physics of Phase Space / Eds. Y. S. Kim, W. W. Zachary. Berlin: Springer, 1987. P. 162.
4. *Kim Y. S., Wigner E. P.* Covariant Phase Space Representation for Localized Light Waves // Phys. Rev. A. 1987. V. 36. P. 1293.
5. *Тамарский В. И.* Вигнеровское представление в квантовой механике // УФН. 1983. Т. 139. С. 587.
6. *Revsen M.* The Wigner Function as Distribution Function // Found. Phys. 2006. V. 36. P. 546.
7. *Cahill K. E., Glauber R. J.* Density Operators and Quasiprobability Distributions // Phys. Rev. 1969. V. 177. P. 1882.
8. *Cohen L.* Generalized Phase-Space Distribution Functions // J. Math. Phys. 1966. V. 7. P. 781.
9. *Schleich W., Walls D. F., Wheeler J. A.* Area of Overlap and Interference in Phase Space versus Wigner Pseudoprobabilities // Phys. Rev. A. 1988. V. 38. P. 1177.
10. *Мойэл Дж.* Квантовая механика как статистическая теория // Вопросы причинности в квантовой механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. С. 208; *Moyal J. E.* // Proc. Camb. Phil. Soc. 1949. V. 45. P. 99.
11. *Torres-Vega Go., Frederick J. H.* Numerical Method for the Propagation of Quantum-Mechanical Wave Function in Phase Space // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 67. P. 2601.
12. *Hug M., Menke C., Schleich W.* Modified Spectral Method in Phase Space: Calculation of the Wigner Function. I. Fundamentals // Phys. Rev. A. 1998. V. 57. P. 3188.
13. *Hug M., Menke C., Schleich W.* Modified Spectral Method in Phase Space: Calculation of the Wigner Function. II. Generalizations // Phys. Rev. A. 1998. V. 57. P. 3206.
14. *Leibfried D., Pfau T., Monroe C.* Shadows and Mirrors: Reconstructing Quantum States of Atom Motion // Phys. Today. 1998. No. 4. P. 22.
15. *Kenfack A., Życzkowski K.* Negativity of the Wigner Function as an Indicator of Non-Classicality // J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 2004. V. 6. P. 396.
16. *Hillery M., O'Connell R. F., Scully M. O., Wigner E. P.* Distribution Functions in Physics: Fundamentals // Phys. Rep. 1984. V. 106. P. 121.
17. *Balazs N. L., Jennings B. K.* Wigner's Function and Other Distribution Functions in Mock Phase Space // Phys. Rep. 1984. V. 104. P. 347.
18. *Lee H.-W.* Theory and Application of the Quantum Phase-Space Distribution Functions // Phys. Rep. 1995. V. 259. P. 147.
19. *Bayfield J. E.* Quantum Evolution. New York: John Wiley and Sons, 1999.
20. *Куземский А. Л.* // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2008. Т. 39. вып. 1. С. 5–81.

*А. Л. Куземский*

## О РАЗДЕЛЕНИИ СИСТЕМЫ НА ЧАСТИ — КВАНТОВУЮ И КЛАССИЧЕСКУЮ \*

*Совместно с Я. Б. Дашевским*

Исследуются возможности разделения взаимодействующей системы на части: квантовую и классическую. Указывается вид возмущения, оказываемого классической частью на квантовую. Рассмотрены примеры столкновений и уравнений для модулированных движений.

### § 1. Введение

Среди физических задач, которые должны быть решены методами квантовой механики, имеются такие, когда подлежащая исследованию система взаимодействующих частиц обладает тем свойством, что одна ее часть во время процессов, происходящих в системе, движется так, как если бы она подчинялась классическим законам движения, т. е. ее движение происходит по траектории. В этом случае эта часть взаимодействующей системы на языке квантовой механики может быть описана с помощью волнового пакета, который настолько медленно расплывается, что то время, в течение которого он успеет сколько-нибудь заметным образом расплыться, будет велико по сравнению с длительностью интересующих нас квантовых процессов, происходящих в той части системы, которая подчиняется существенно квантовым законам. В этом случае рассматриваемую систему взаимодействующих частиц удобно разделить на две части: «квантовую» и «классическую».

Так, например, в теории столкновений одна часть взаимодействующей системы рассматривается как заданный движущийся силовой центр, подчиняющийся классическим законам, в то время как вторая часть — «квантовая» (атом, молекула) подвергается возмущению со стороны «силового центра».

Мы ставим здесь задачу указать некоторый общий метод, с помощью которого возможно произвести разделение системы и указать вид возмущения, оказываемого «классической» частью на «квантовую».

### § 2. Разделение системы

Мы будем исходить из уравнения Шрёдингера для взаимодействующих частиц (или степеней свободы)

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = [H_0(x) + H_0(X) + W(x, X)]\Psi, \quad (1)$$

где  $x$  — совокупность координат (степеней свободы) частиц, подчиняющихся существенно «квантовым» законам;  $X$  — совокупность координат (степеней свободы) частиц, подчиняющихся «классическим» законам движения;  $W(x, X)$  — потенциальная энергия их взаимодействия, а  $H_0(x)$  и  $H_0(X)$  — независимые от времени гамильтонианы, действующие на  $x$  и  $X$  соответственно. Если бы взаимодействие не существовало, то система разделилась бы на две:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = H_0(x) \varphi(x, t), \quad (1a)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = H_0(X) \Phi(X, t). \quad (1б)$$

Мы предположим, что с помощью собственных функций уравнения (1б) можно построить очень медленно расплывающийся волновой пакет, описывающий поведение частицы (или степени свободы)  $X$ . Тот факт, что совокупность  $X$  подчиняется «классическим» законам движения, выразим тем, что будем пренебрегать в дальнейшем реакцией, оказываемой на нее «квантовой частью», когда взаимодействие между ними существует.

Для момента времени  $t = 0$  мы можем выбрать решение (1) совершенно произвольно. Выберем его в форме

$$\Psi_0 = \psi(x, 0) \Phi(X, 0).$$

Теперь мы хотим функцию  $\psi$  выбрать таким образом, чтобы функция

$$\Psi = \psi(x, t) \Phi(X, t) \quad (2)$$

представляла собой с достаточной точностью решение уравнения (1) и в дальнейшем, т. е. для  $t > 0$ . Для этого рассмотрим уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = H_0(x) \psi(x, t) + v(x, t) \psi(x, t), \quad (1a')$$

где

$$v(x, t) = \int \Phi^* W(x, X) \Phi dX.$$

Это уравнение отличается от (1a) последним членом. Покажем, что если в (2) подразумевать под  $\psi(x, t)$  решение (1a'), то при некоторых условиях, которые мы в дальнейшем установим, (2) является достаточно хорошим приближением для решения (1). Представление решения (1) в виде (2) и дает возможность разделить взаимодействующую систему на части «квантовую» и «классическую».

Чтобы оценить, насколько (2) является хорошим приближением для точного решения (1), мы будем искать точное решение (1) в виде

$$\Psi = \psi(x, t) \Phi(X, t) + U(x, X, t). \quad (3)$$

Рассматриваем  $U$  как поправку, тогда степень приближения будет определяться поведением функции  $U$ . В силу произвольности выбора  $\Psi$  при  $t = 0$ , мы

положим  $U(x, X, 0) = U_0 = 0$ . Подставляя (3) в (1) и принимая во внимание (1a') и (1б), получим для функции  $U$  уравнение

$$i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} = \left[ W(x, X) - \int \Phi^* W(x, X) \Phi dX \right] \psi \Phi + [H_0(x) + H_0(X) + W(x, X)] U. \quad (4)$$

Таким образом, степень приближения определяется малостью члена

$$\Delta = W(x, X) - \int \Phi^* W(x, X) \Phi dX.$$

Если бы имело место условие  $\Delta = 0$ , то  $U$  удовлетворяло бы тому же самому уравнению, что и  $\Psi$ , тогда (2) было бы точным решением (как разность двух решений).

Теперь установим условие малости функции  $U$ .

Из (4) следует, что

$$i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = \left[ W(x, X) - \int \Phi^* W(x, X) \Phi dX \right] \psi \Phi. \quad (5)$$

Рассмотрим матричный элемент

$$\begin{aligned} \int \Phi^* W(x, X) \Phi dX &= \int \Phi^*(\bar{X} + \xi) W(x, \bar{X} + \xi) \Phi(x, \bar{X} + \xi) d\xi = \\ &= W(x, \bar{X}) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{X}^2} \overline{\Delta X^2} + \dots, \end{aligned}$$

где  $\bar{X}$  — центр тяжести волнового пакета,  $\overline{\Delta X^2} = \int \Phi^*(X - \bar{X})^2 \Phi d\xi$ . Подставляя последнее в (5) и разлагая  $W(x, X)$  в ряд Тейлора в окрестности  $\bar{X}$ , получим

$$i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial W}{\partial \bar{X}} (X - \bar{X}) \psi \Phi + \dots + \text{члены третьего порядка.}$$

В первом приближении можно положить

$$U = U_1 = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \frac{\partial W}{\partial \bar{X}} (X - \bar{X}) \Phi \psi dt.$$

Далее,  $U_1$  можно рассматривать как малую поправку, если

$$|U_1| = \left| \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \frac{\partial W}{\partial \bar{X}} (X - \bar{X}) \Phi \psi dt \right| \ll |\psi \Phi|. \quad (6)$$

По порядку величины это неравенство означает, что

$$\frac{\Delta W(t)t}{\hbar} \ll 1,$$

где  $\Delta W(t) = (\partial W / \partial X) \Delta X$  — изменение потенциальной энергии на протяжении размеров пакета, а  $\Delta X$  — размеры пакета, которые, вообще говоря, возрастают со временем.

### § 3. Столкновения

Рассуждения §2 включают в себя теорию столкновений, основанную на методе параметра удара (или так называемого прицельного расстояния). Функцию  $v(x, t)$  в уравнении (1a') можно трактовать как возмущение, которое оказывает на атом — движущийся силовой центр в теории столкновений, развитой Каунтом [1].

При очень больших энергиях падающей частицы, таких, что изменение импульса или энергии падающей частицы при неупругих столкновениях будет мало по сравнению с ее полным импульсом,

$$v(x, t) = \int \Phi^* W(x, X) \Phi dX = -\frac{eE_{st}}{vt - r},$$

где  $e$ ,  $E_{st}$  — заряды электрона и падающей частицы,  $v$  — скорость ее движения<sup>1</sup>.

Легко видеть, что в этом случае условие (6) есть условие применимости метода параметра удара, которое сводится к тому, что применимость метода оправдана тогда, когда удастся построить для падающей частицы волновой пакет, размеры которого малы по сравнению с размерами атома и продолжают оставаться малыми при прохождении его через атом [3, 4]. Это всегда имеет место для  $\alpha$ -частиц и быстрых электронов, для которых, как уже указывалось, потери энергии или изменение импульса ничтожны по сравнению с ее полным импульсом.

### § 4. Уравнения для модулированных движений

Под уравнениями для модулированных движений мы будем понимать такие уравнения, в которых параметры системы (момент инерции, масса, частота и т. д.) являются периодическими функциями времени, описывающими малые колебания этих параметров.

Мы получим уравнения для модулированных движений, заставляя «квантовую» систему взаимодействовать с «классической».

$$v(x, t) = \int \Phi^* W(x, X) \Phi dX$$

имеет такой вид, что уравнение (1a') может быть рассмотрено как изменение параметров уравнения (1a). Возможность такого рассмотрения определяется неравенством (6). Разъясним вышеизложенное примером модуляций вращения малыми колебаниями.

Пусть частица массы  $m$  находится в силовом поле  $V(r)$ . Для простоты рассмотрим вращение и колебание в плоскости. Уравнение Шрёдингера будет иметь вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r, \varphi)}{\partial t} = H(r)\Psi + \frac{p_\varphi^2}{2I(r)}\Psi,$$

где  $I(r)$  — момент инерции,  $p_\varphi$  — оператор импульса.

---

<sup>1</sup> Если предположить, как это делает Мотт [2], что падающая частица описывается точечным пакетом.

Чтобы отделить колебания, которые мы будем считать заданными, от вращения, будем искать  $\Psi$  в виде

$$\Psi(r, \varphi, t) = \Phi(t) \psi(\varphi, t) + U(r, \varphi, t).$$

Уравнения (1б) и (1а) будут иметь вид

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= H(r) \Phi, \\ i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{p_\varphi^2}{2I(\bar{r})} \psi, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  — центр тяжести волнового пакета, описывающего колебания. Уравнение (7) описывает вращение с модулированным моментом инерции. Такое представление возможно, если выполнено условие

$$|U| = \left| \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \frac{p_\varphi^2}{2} \left[ \frac{1}{I(\bar{r})} - \frac{1}{I(r)} \right] \Phi \psi dt \right| \ll \Phi \psi.$$

Мы здесь не будем заниматься нахождением решений таких уравнений. Они могут быть решены методами теории возмущений<sup>1</sup>.

### Список литературы

1. *Count* // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1937. V. 23. P. 732.
2. *Mott N. F.* // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1931. V. 27. P. 553.
3. *Williams E.* // Proc. Roy. Soc. A. 1933. V. 139. P. 163.
4. *Mott H., Messu Г.* Теория атомных столкновений. М.–Л.: ОНТИ, 1936. С. 216.

Физический институт  
Академии Наук УССР, Киев

Поступила  
15 октября 1940 г.

Комментарий. Данная работа Д. И. Блохинцева не только интересна сама по себе, но и демонстрирует его глубокую интуицию и способность к предвидению важности исследуемых им проблем. По словам авторов, «среди физических задач, которые должны быть решены методами квантовой механики, имеются такие, когда подлежащая исследованию система взаимодействующих частиц обладает тем свойством, что одна ее часть во время процессов, происходящих в системе, движется так, как если бы она

<sup>1</sup> Один тип уравнений для модулированных движений (осциллятор с частотой  $\omega = \omega_0(1 + \alpha \cos pt)$ ) был весьма изящным методом решен С. М. Рытовым (Москва, неопубликованная работа).

подчинялась классическим законам движения, т. е. движение происходит по траектории».

В работе исследовалась возможность разделения взаимодействующей системы на части: квантовую и классическую. Был указан вид возмущения при воздействии классической части на квантовую. Были рассмотрены также примеры из теории столкновений и уравнений для модулированных движений. Сам Д. И. Блохинцев пишет об этой работе в своем автореферате следующее: «Эта работа проводилась совместно с Я. Б. Дашевским (трагически погибшем в Дарницком лагере от рук фашистов) и вытекала из моего давнего интереса к вопросу о взаимодействии классической системы с квантовой. Позднее это привело меня к важному шагу в понимании механизма квантово-механических измерений».

Эта проблематика в последующие годы приобрела большой интерес [1–3], в особенности во многих задачах физической химии [4–6]. На эту тему написано большое число работ, часть из которых подробно рассмотрена в обзорах [6–12]. Важно отметить, что данная проблематика имеет выход на фундаментальные проблемы квантовой теории, а именно проблему взаимодействия классической системы с квантовой системой [13–14], т. е. проблему взаимодействия квантовой системы с прибором. Выход на проблему измерения в квантовой механике здесь только намечается и будет развит Блохинцевым в дальнейшем в работах № 68 и № 70.

1. Герасименко В. И., Петрина Д. Я. Статистическая механика квантовых-классических систем. Неравновесные системы // ТМФ. 1980. Т. 42. С. 88.
2. Герасименко В. И. Динамические уравнения квантовых-классических систем // ТМФ. 1982. Т. 50. С. 77.
3. Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Энольский В. З. Уравнения движения для одного класса квантовых-классических систем // ДАН СССР. 1990. Т. 315. С. 75.
4. Kapral R., Ciccotti G. Mixed Quantum-Classical Dynamics // J. Chem. Phys. 1999. V. 110. P. 8919.
5. Nielsen S., Kapral R., Ciccotti G. Non-Adiabatic Dynamics in Mixed Quantum-Classical Systems // J. Stat. Phys. 2000. V. 101. P. 225.
6. Kapral R., Sergi A. Quantum-Classical Wigner-Liouville Equation // Ukrain. Math. J. 2005. V. 57. P. 891.
7. Kapral R., Ciccotti G. A Statistical Mechanical Theory of Quantum Dynamics in Classical Environments // Bridging Time Scales: Molecular Simulations for the Next Decade / Eds. P. Nielaba, M. Mareshal, G. Ciccotti. Lect. Notes Phys. Berlin: Springer, 2002. V. 605. P. 445.
8. Kapral R. Progress in the Theory of Mixed Quantum-Classical Dynamics // Annu. Rev. Phys. Chem. 2006. V. 57. P. 129.
9. Kapral R., Ciccotti G. Transport Coefficients of Quantum-Classical Systems // Lect. Notes Phys. Berlin: Springer, 2006. V. 703. P. 519.
10. Wyatt R. E. Quantum Dynamics with Trajectories. Berlin: Springer, 2005. Ch. 12. Mixed Quantum-Classical Dynamics.
11. Ciccotti G., Coker D. F., Kapral R. Quantum Statistical Dynamics with Trajectories // Quantum Dynamics of Complex Molecular Systems (Springer Series in



- Chemical Physics. V.83) /Eds. D. A. Micha, I. Burghardt. Berlin: Springer, 2007. P.275.
12. *Hanna G., Kim H., Kapral R.* Quantum-Classical Reaction Rate Theory // Quantum Dynamics of Complex Molecular Systems (Springer Series in Chemical Physics. V.83) /Eds. D. A. Micha, I. Burghardt. Berlin: Springer, 2007. P.295.
  13. *Halliwel J. J.* Effective Theories of Coupled Classical and Quantum Variables // Open Systems and Measurement in Relativistic Quantum Theory /Eds. H. P. Breuer, F. Petruccione. Lect. Notes Phys. Berlin: Springer, 1999. V.526. P.153.
  14. *Truhlar D. G.* Decoherence in Combined Quantum Mechanical and Quantum Mechanical Methods for Dynamics as Illustrated for Non-Born-Oppenheimer Trajectories // Quantum Dynamics of Complex Molecular Systems (Springer Series in Chemical Physics. V.83) /Eds. D. A. Micha, I. Burghardt. Berlin: Springer, 2007. P.227.
  15. *Leibfried D., Pfau T., Monroe C.* // Phys. Today. 2003. V.56, №4. P.22.
  16. *Zachos C., Fairlie D., Curtright T.* Quantum Mechanics in Phase Space. Singapore: World Scientific, 2005.
  17. *Wigner E. P.* The General Properties of the Distribution Function and Remarks on its Weakness // The Physics of Phase Space /Eds. Y. S. Kim, W. W. Zachary. Berlin: Springer, 1987. P.162.
  18. *Kim Y. S., Wigner E. P.* Covariant Phase Space Representation for Localized Light Waves // Phys. Rev. A. 1987. V.36. P.1293.
  19. *Stenholm S.* The Wigner Function. I: The Physical Interpretation // Eur. J. Phys. 1980. V.1. P.244.
  20. *Татарский В. И.* Вигнеровское представление в квантовой механике // УФН. 1983. Т.139. С.587.
  21. *Reusen M.* The Wigner Function as Distribution Function // Found. Phys. 2006. V.36. P.546.
  22. *Cahill K. E., Glauber R. J.* Density Operators and Quasiprobability Distributions // Phys. Rev. 1969. V.177. P.1882.
  23. *Cohen L.* Generalized Phase-Space Distribution Functions // J. Math. Phys. 1966. V.7. P.781.
  24. *Schleich W., Walls D. F., Wheeler J. A.* Area of Overlap and Interference in Phase Space versus Wigner Pseudoprobabilities // Phys. Rev. A. 1988. V.38. P.1177.
  25. *Мойэл Дж.* Квантовая механика как статистическая теория // Вопросы причинности в квантовой механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. С.208. [*Moyal J. E.* // Proc. Camb. Phil. Soc. 1949. V.45. P.99.]
  26. *Torres-Vega Go., Frederick J. H.* Numerical Method for the Propagation of Quantum-Mechanical Wave Function in Phase Space // Phys. Rev. Lett. 1991. V.67. P.2601.
  27. *Hug M., Menke C., Schleich W.* Modified Spectral Method in Phase Space: Calculation of the Wigner Function. I. Fundamentals// Phys. Rev. A. 1998. V.57. P.3188.
  28. *Hug M., Menke C., Schleich W.* Modified Spectral Method in Phase Space: Calculation of the Wigner Function. II. Generalizations // Phys. Rev. A. 1998. V.57. P.3206.
  29. *Leibfried D., Pfau T., Monroe C.* // Phys. Today. 2003. V.56, №4. P.22.

30. *Kenfack A., Życzkowski K.* Negativity of the Wigner Function as an Indicator of Non-Classicality // J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 2004. V. 6. P. 396.
31. *Hillery M., O'Connell R. F., Scully M. O., Wigner E. P.* Distribution Functions in Physics: Fundamentals // Phys. Rep. 1984. V. 106. P. 121.
32. *Balazs N. L., Jennings B. K.* Wigner's Function and Other Distribution Functions in Mock Phase Space // Phys. Rep. 1984. V. 104. P. 347.
33. *Lee H.-W.* Theory and Application of the Quantum Phase-Space Distribution Functions // Phys.Rep. 1995. V. 259. P. 47.
34. *Bayfield J. E.* Quantum Evolution. New York: John Wiley and Sons, 1999.
35. *Куземский А. Л.* // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2008. Т. 39, вып. 1. С. 5–81.

*А. Л. Куземский*

## АТОМ В ПОЛЕ ЗРЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО МИКРОСКОПА\*

Обсуждается положение, возникающее при наблюдении атома в электронный микроскоп. Показано, что возможно получить несколько тысяч рассеянных электронов, прежде чем атом будет выбит из занимаемого им места.

В связи с намечающейся тенденцией к увеличению разрешающей силы электронного микроскопа как путем перехода к более коротким волнам, так и путем усовершенствования оптической системы, вопрос о возможности наблюдать отдельный атом начинает приобретать практический интерес. Он представляет также интерес и с теоретической точки зрения, так как при наблюдении в электронный микроскоп одного атомарного объекта изображение будет возникать в результате повторения единичных актов рассеяния на одном и том же объекте, в то время как в квантовой механике обычно формулируют результаты по отношению к совокупности объектов, находящихся в одном и том же исходном состоянии. В силу воздействия на атом каждый новый акт рассеяния будет, вообще говоря, заставлять атом в новом исходном состоянии<sup>1</sup>. Поэтому важно проанализировать, как будет влиять рассеяние электронов на состояние наблюдаемого атома<sup>2</sup>.

Во-первых, мы хотим отметить, что возбуждение атома не играет существенной роли. В самом деле, плотность тока  $j$  в месте нахождения объекта наблюдения не превышает  $0,1 \text{ А/см}^2$  (ср. [1]), поэтому промежуток времени  $\tau$  между отдельными актами рассеяния

$$\tau = \frac{e}{Qj} \quad (1)$$

( $e$  — заряд электрона,  $Q$  — полное эффективное сечение атома  $Q < 10^{-16} \text{ см}^2$ ), будет больше  $10^{-2} \text{ с}$ . За это время атом успеет возвратиться из возбужденного состояния в нормальное (время жизни  $\sim 10^{-8} \text{ с}$ ), которое будет, таким образом, благодаря излучению само собой восстанавливаться. Особого

\* ЖЭТФ. 1947. Т. 17, вып. 9. С. 814–817.

<sup>1</sup> Если атом находится первоначально в «чистом» состоянии  $\psi_0$ , то после удара электрона он будет находиться в одном из состояний  $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$  с вероятностями  $W_0, W_1, W_2, \dots$  («смешанное» состояние). При следующем ударе эта смесь перейдет в новую  $W'_0, W'_1, W'_2, \dots$  и т. д.

<sup>2</sup> Этот вопрос отчасти обсуждается в книге Арденне [1]; однако требуется более основательное рассмотрение, которое мы предлагаем в этой статье. Недавняя работа де Бройля [2] вполне перекрывается результатами Арденне и не имеет отношения к реальным случаям.

рассмотрения требовала бы ионизация, так как рекомбинация существенно зависит от условий, в которых находится атом (например, от природы «предметного стекла»).

Однако из дальнейшего будет видно, что и это явление не имеет большого значения в сравнении с эффектом отдачи при упругом рассеянии. Эта отдача особенно опасна, так как при достаточно большой отдаче атом может быть, вообще, сбит с места (мы будем считать, что атом адсорбирован на поверхности пленки «предметного стекла»), и тем самым изображение будет полностью испорчено (фотографирующийся «клиент» сбежит со своего стула!). Именно эту сторону дела мы и намерены рассмотреть в этой работе.

Известным путем, в борновском приближении, для эффективного поперечника рассеяния электрона в угол  $d\Omega$  получается формула

$$dQ_{p'E'n'}(\vartheta) = d\Omega \frac{\mu^2}{4\pi\hbar^4} \frac{v'}{v} |(p'E'n'|w|pEn)|^2, \quad (2)$$

где  $\mu$  — масса электрона,  $\mathbf{p}$  — импульс первичного электрона,  $E$  — энергия (и другие квантовые числа), относящаяся к движению атома как целого,  $n$  — квантовые числа электронов в атоме,  $v$  — скорость первичного электрона,  $\mathbf{p}'$ ,  $E'$ ,  $n'$ ,  $v'$  — те же величины после рассеяния,  $\vartheta$  — угол рассеяния (угол между  $\mathbf{p}'$  и  $\mathbf{p}$ ). Простое вычисление показывает, что матричный элемент в (2) равен

$$(p'E'n'|w|pEn) = \int \Phi_{E'}^*(\mathbf{x}) \zeta_{n'n}(\Delta\mathbf{p}, \mathbf{x}) e^{i\Delta\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar} \Phi_E(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{x}$  есть координата центра тяжести атома, а  $\Phi_E(\mathbf{x})$  — волновая функция, описывающая движение центра тяжести адсорбированного атома,  $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$  есть изменение импульса электрона при рассеянии,  $\zeta_{n'n}(\Delta\mathbf{p}, \mathbf{x})$  есть атомный фактор (электронов и ядра атома). Зависимость его от  $\mathbf{x}$  выражает влияние на рассеяние деформации электронной оболочки, имеющей место при колебаниях атома. Этим влиянием мы будем пренебрегать. Тогда  $\zeta_{n'n}$  попросту совпадает с атомным фактором свободного атома. Мы будем далее считать атом настолько тяжелым, что его волновая функция для возбужденного состояния ( $E'$ ) может быть взята в квазиклассическом приближении

$$\Phi_{E'}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \frac{S_{E'}(x)}{\hbar}, \quad (4)$$

где  $S_{E'}(x)$  есть функция действия. Что касается нижнего (исходного состояния), то здесь предпочтительней использовать квантовую функцию осциллятора

$$\Phi_E(x) = \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2a^2}, \quad a = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega}}, \quad (5)$$

где  $M$  — масса атома, а  $\omega$  — частота нулевых колебаний атома в адсорбированном состоянии.

Атом будет выбит со своего места, если  $E' > D$ , где  $D$  — энергия адсорбции. Приближение (4) будет верно, если энергия адсорбции  $D \gg \hbar\omega/2$  ( $\hbar\omega/2$  — энергия нулевых колебаний  $\sim 0,1$  эВ, а  $D \sim 1$  эВ).

Разлагая (4) около  $x = 0$

$$\Phi_{E'} = \frac{1}{2i\sqrt{\pi}} \left\{ \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} S_{E'}(0) - \frac{i}{\hbar} P_{E'} x + \dots \right] - \text{компл. сопряженн.} \right\}, \quad (4')$$

где  $P_{E'} = (\partial S_{E'}/\partial x)_0$  есть проекция импульса атома на ось  $Ox$  в состоянии  $E'$ , в точке  $x = 0$ , и, подставляя (4') в (3), после простого интегрирования получаем

$$|(\mathbf{p}' E' n' | w | \mathbf{p} E n)|^2 = |\zeta_{n'n}|^2 \left( \frac{a}{\sqrt{\pi}} \right)^3 \exp \left[ -\frac{a}{\hbar^2} (\mathbf{p}_{E'} - \Delta \mathbf{p})^2 \right]. \quad (6)$$

Появляющийся здесь множитель имеет  $\delta$ -образный характер. Ширина этой  $\delta$ -функции — порядка средней величины импульса в нижнем состоянии, которая составляет  $P_0 = \sqrt{M\hbar\omega/2}$ , а  $P_{E'} > \sqrt{2MD}$ , поэтому  $P_{E'}/P_0 = \sqrt{4D/\hbar\omega}$  и при  $D \gg \hbar\omega/2$  мы можем пренебречь импульсом нулевых колебаний, а вместе с тем считать множитель при  $|\zeta_{n'n}|^2$   $\delta$ -функцией. Это означает, что мы можем в этом случае при подсчете матричного элемента (6) считать, что имеет место закон сохранения импульса<sup>1</sup>

$$\mathbf{p}_{E'} = \Delta \mathbf{p}. \quad (7)$$

Приобретаемая атомом энергия  $E'$  будет равна

$$E' = \frac{\mathbf{p}_{E'}^2}{2M} = \frac{\Delta \mathbf{p}^2}{2M} = \frac{2}{Mc^2} (\varepsilon^2 - \mu^2 c^2) \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \quad (8)$$

где  $\varepsilon = T + \mu c^2$ ,  $T$  — кинетическая энергия электрона, а  $\mu c^2$  — энергия покоящегося электрона.

Разрешающая сила микроскопа, поскольку она зависит от характера рассеяния, определяется величиной  $\min(2\pi\hbar/|\Delta \mathbf{p}|)$ . Эта величина равна  $\lambda/2 \sin(\vartheta/2)$  ( $\lambda$  — длина волны электрона), если допускаются любые углы рассеяния  $\vartheta$ . Если же иметь в виду, что при достаточно больших изменениях импульса электрона  $\Delta \mathbf{p}$  энергия  $E'$  может стать больше  $D$  и атом будет выбит со своего места, то из (8) найдем, что максимальное значение  $|\Delta \mathbf{p}|$  будет  $\sqrt{2MD}$ . Поэтому разрешающая сила определяется большей из величин:

$$\Delta x \geq \frac{\lambda}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \quad \text{или} \quad 2\pi \sqrt{\frac{\hbar^2}{2MD}}. \quad (9)$$

Вторая граница вступает в силу, когда  $(2/Mc^2)(\varepsilon^2 - \mu^2 c^4) \sin^2 \vartheta/2 > D$ ; при  $D \sim 1$  эВ для тяжелых атомов (атомный вес  $A > 10$ ) это будет при  $T \sim 10^5$  эВ, т. е. для релятивистских электронов.

<sup>1</sup> Если условие  $D \gg \hbar\omega/2$  не выполняется, то требуются более подробные модельные представления о характере адсорбционных сил. Расчеты для этого случая проводятся.

В кинематической области, определяемой второй границей, возможны опасные удары, когда передаваемая энергия будет больше  $D$ . Вычислим, каково будет отношение этих опасных ударов к полному их числу. Если через  $Q(D)$  обозначить эффективное сечение для опасных ударов ( $E' > D$ ), а через  $Q$  — полное сечение, то мы будем иметь один опасный удар на  $N$  безопасных, причем

$$N = \frac{Q}{Q(D)}. \quad (10)$$

Полное сечение  $Q = Q' + Q''$ , где  $Q'$  — сечение для упругих ударов, а  $Q''$  — для неупругих (включая ионизацию).  $Q''$  мы можем определить из известных формул для торможения (см. [3])

$$Q'' = \frac{3}{16} \Phi_0 \frac{4\mu c^2}{I\beta^2} \left( \ln \frac{\varepsilon - \mu c^2}{2\mu c^2} \frac{\varepsilon^2 \beta^2}{I^2 Z^2} + \frac{\mu^2 c^4}{\varepsilon^2} \right), \quad (11)$$

где  $\Phi_0 = 2,5 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2$ ,  $\beta = v/c$ ,  $I Z$  — средняя потеря энергии при ударе ( $I = 13,5 \text{ эВ}$ ),  $Z$  — номер элемента.

С другой стороны, для упругого рассеяния на ядре на угол  $\vartheta$  имеем [3]

$$Q'(\vartheta) = \frac{3}{16} \Phi_0 Z^2 \frac{2\varepsilon^2 \mu^2 c^4}{(\varepsilon^2 - \mu^2 c^4)^2} \left( \frac{1}{\sin^2 \vartheta/2} - 1 - 2 \frac{\varepsilon^2 - \mu^2 c^4}{\varepsilon^2} \ln \sin \frac{\vartheta}{2} \right). \quad (12)$$

Полное эффективное сечение для упругих ударов получим, если вместо  $\vartheta$  подставить в (12) угол  $\vartheta_{\min}$ , соответствующий полному экранированию заряда ядра зарядом электронной оболочки. Последнее наступает при  $\sin^2 \vartheta_{\min}/2 = \frac{c^2}{4(\varepsilon^2 - \mu^2 c^4)} \frac{\hbar^2}{a^2}$ , где  $a = a_0 Z^{-1/3}$ ;  $a_0 = \hbar^2/\mu c^2$  — радиус боровской орбиты, а  $a$  — радиус атома по Томасу–Ферми. Из (11) и (12) получаем

$$\frac{Q''}{Q'(\vartheta_{\min})} = \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 Z^{2/3} \frac{\mu c^2}{I Z^2} \frac{\varepsilon^2 - \mu^2 c^4}{2\varepsilon^2 \beta^2} \left( \ln \frac{\varepsilon - \mu c^2}{2\mu c^2} \frac{\varepsilon^2 \beta^2}{I^2 Z^2} + \frac{\mu^2 c^4}{\varepsilon^2} \right). \quad (13)$$

Это отношение для тяжелых атомов мало, и в этом случае полное сечение можно отождествить с  $Q'(\vartheta_{\min})$ . В опасные удары следует включить те упругие удары, при которых угол отклонения больше  $\vartheta_0$ , причем (ср. (8))

$$\sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} = \frac{M c^2 D}{2(\varepsilon^2 - \mu^2 c^4)}.$$

Что касается неупругих ударов и ударов, при которых имеет место ионизация, то ими можно пренебречь. В самом деле, амплитуда вероятности возбуждения атома ( $\zeta_{n0}$ ) мала в сравнении с амплитудой для упругого столкновения ( $\zeta_{00}$ ), если передаваемый при неупругом ударе импульс  $\Delta p \gg \hbar/a^*$ , где  $a^* = a_0/Z^*$  есть эффективный радиус той электронной оболочки, которой принадлежит возбуждающийся в атоме электрон, а  $Z^*$  — эффективный заряд ядра.

Нас интересуют  $\Delta p^2 > 2MD$ , а величина  $2MD > \hbar^2/a^{*2}$ , так как последнее неравенство равносильно неравенству  $140AD/Z^{*2} > 1$  ( $A$  — атомный вес атома,  $D$  в электронвольтах), которое выполнено для всех атомов и для всех электронных оболочек (при  $D \sim 1$  эВ). Импульс, передаваемый ядру при ионизации, по порядку величины равен импульсу электрона в атоме  $p_0$ . Последний составляет  $p_0 = (\mu V_i)^{1/2}$ , где  $V_i$  — потенциал ионизации. Из условия  $\Delta p^2 = p_0^2 > 2MD$  получаем  $V_i > 3700AD$ , что для  $D \sim 1$  эВ невозможно; поэтому передаваемый при этом процессе импульс оказывается недостаточным, чтобы выбить атом. Следовательно, роль неупругих столкновений сводится к поправке, которую мы будем игнорировать. В этом приближении  $Q(D) = Q'(\vartheta_0)$  и мы получаем, что  $N$  попросту равно отношению  $Q'(\vartheta_{\min})/Q'(\vartheta_0)$ . Подставляя сюда значение  $Q'$  из (12) и игнорируя в  $Q'(\vartheta_{\min})$  единицу и логарифмический член в сравнении с  $\sin^{-2} \vartheta_{\min}/2$ , находим

$$N = \frac{140AD}{Z^{2/3}} \left[ 1 - \frac{AD \cdot 10^9}{2(\epsilon^2 - \mu^2 c^4)} - \frac{AD \cdot 10^9}{2\epsilon^2} \ln \frac{AD \cdot 10^9}{2(\epsilon^2 - \mu^2 c^4)} \right]^{-1}, \quad (14)$$

где  $\epsilon$ ,  $\mu c^2$  и  $D$  выражены в электронвольтах.

При  $D = 1$  эВ,  $T = \epsilon - \mu c^2 = 10^5$  эВ имеем для Cu:  $N = 2250$ ,  $\vartheta_0 = 64^\circ$  и для Hg:  $N = 15000$ ,  $\vartheta_0 = 144^\circ$ . Таким образом, получаются сравнительно благоприятные числа. Тем не менее вряд ли можно рассчитывать на что-либо большее, чем констатирование факта наличия тяжелого атома.

Причина этого лежит в том, что электронная бомбардировка «предметного стекла» может поддерживать столь высокую температуру среды, окружающей атом, что амплитуда его колебаний может стать нежелательно большой. Эта сторона дела заслуживает специального рассмотрения.

### Список литературы

1. von Ardenne M. // Elektronenübertmikroskopie. 5.5. Berlin, 1940. V. 106. P. 291.
2. De-Broglie L. // Compt. Ren. 1946.
3. Гайтлер В. Квантовая теория излучения. М.: ИЛ, 1940.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступила  
20 января 1947 г.

Комментарий. В 1947 г. Д. И. Блохинцев публикует работу «Атом в поле зрения электронного микроскопа» (см. также разд. 16 книги Д. И. Блохинцева [1]). Известно, что в связи с дискуссией о физической интерпретации методов квантовой теории проблема оценки возможностей измерения была детально проанализирована Н. Бором [2] и В. Гейзенбергом [3]. Дискуссия между Бором и Гейзенбергом по этому вопросу привела к существенному продвижению в понимании квантовой теории [4]. Гейзенберг использовал

мысленный эксперимент с гамма-лучевым микроскопом для иллюстрации принципа неопределенности [5]. Этот прием стал впоследствии популярным и использовался неоднократно [6–11]. Д. И. Блохинцев существенно углубляет и расширяет круг обсуждаемых проблем по оценке возможностей измерения. Он пишет: «Эта работа, посвященная очень специальному вопросу, заслуживает упоминания ввиду несколько необычной постановки вопроса. Происхождение ее таково. Я обратил внимание на то, что под действием рассеянного электрона атом будет получать отдачу и может быть выбит из своей позиции на поверхности «предметного стекла». Если он не будет выбит при первом рассеянии, то он может быть выбит при последующих. Следует заметить, этот опыт не обычен с точки зрения привычной постановки измерений в квантовом ансамбле. Действительно, в этом случае мы имеем дело с повторением измерений на одном и том же экземпляре атома, а не на их совокупности, как это обычно делается. После каждого измерения состояние атома, вообще говоря, меняется, и он становится экземпляром другого квантового ансамбля. Таким образом, необходимая для получения изображения атома серия рассеяний состоит из серии рассеяний, относящихся к объектам, взятых из разных квантовых ансамблей. Кажется, это единственный случай подобной ситуации». Далее в своей статье Д. И. Блохинцев замечает: «В связи с намечающейся тенденцией к увеличению разрешающей силы электронного микроскопа как путем перехода к более коротким волнам, так и путем усовершенствования оптической системы, вопрос о возможности наблюдать отдельный атом начинает приобретать практический интерес». Поскольку в усовершенствовании микроскопа нуждались физики, химики, металлурги, биологи и т. д., то этот вопрос всегда вызывал повышенный интерес; в частности этой проблемой занимался Л. И. Мандельштам. Работа Д. И. Блохинцева продолжает развитие теории микроскопа, но уже на новом, квантовом этапе. Но не только прикладное значение обуславливало интерес к данной проблеме. Согласно Блохинцеву, развитие теории микроскопа «...представляет интерес и с теоретической точки зрения, так как при наблюдении в электронный микроскоп одного атомарного объекта изображение будет возникать в результате повторения единичных актов рассеяния на одном и том же объекте, в то время как в квантовой механике обычно формулируют результаты по отношению к совокупности объектов, находящихся в одном и том же исходном состоянии. В силу воздействия на атом каждый новый акт рассеяния будет, вообще говоря, заставлять атом в новом исходном состоянии. Поэтому важно проанализировать, как будет влиять рассеяние электронов на состояние наблюдаемого атома». Проведя такой анализ, Д. И. Блохинцев показал, что «...возможно получить несколько тысяч рассеянных электронов, прежде чем атом будет выбит из занимаемого им места» (см. разд. 16 книги Д. И. Блохинцева [1]). Он делает вывод: «Произведенные вычисления показали, что есть возможность получить многие тысячи рассеяний на тяжелом атоме типа  $\text{Cu}$ ,  $\text{Hg}$  и т. д., без того, чтобы атом был полностью выбит из своей позиции. Как я тогда выразился, «фотографируемый клиент может быть выбит из кресла». В то время не удалось получить подобного портрета. Фотография отдельного атома была получена только недавно, американскими исследователями».



Последующее развитие физики подтвердило оправданность интереса Л. И. Мандельштама и Д. И. Блохинцева к проблемам теории микроскопа. Это направление получило большое развитие в последующие годы и продолжает интенсивно развиваться. При этом наряду с прикладными достижениями это направление стимулирует развитие самых фундаментальных аспектов квантовой теории. Подробный обзор различных типов современной техники микроскопии и их разнообразных приложений дан в книгах и обзорах [12–16].

1. *Блохинцев Д. И.* Основы квантовой механики. 5-е изд. М.: Наука, 1976.
2. *Bohr N.* The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory // *Nature*. 1928. V. 121. P. 580.
3. *Heisenberg W.* The Physical Principles of the Quantum Theory. New York: Dover, 1949.
4. *Tanona S.* Uncertainty in Bohr's Response to the Heisenberg Microscope // *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*. 2004. V. 35. P. 483.
5. *Busch P., Heinonen T., Lahti P.* Heisenberg's Uncertainty Principle // *Phys. Rep.* 2007. V. 452. P. 155.
6. *Roychoudhuri C.* Heisenberg's microscope — A misleading illustration // *Found. Phys.* 1978. V. 8. P. 845.
7. *Clauser J. F., Li S. F.* «Heisenberg microscope» decoherence atom interferometry // *Phys. Rev. A*. 1994. V. 50. P. 2430.
8. *Kurtsiefer Ch., Pfau T., Spalter S., Ekstrom C. R., Mlynek J.* A Heisenberg Microscope for Atoms // *Annals of the New York Academy of Sciences*. 1995. V. 755. P. 162.
9. *Vyatchanin S. P., Lavrenov A. Yu.* Heisenberg microscope and quantum variation measurement // *Phys. Lett. A*. 1997. V. 231. P. 38.
10. *Tonomura A.* Quantum Phenomena Visualized by Electron Waves // *Intern. J. Mod. Phys. B*. 2007. V. 21. P. 5291.
11. *Hadzidaki P.* The Heisenberg Microscope: A Powerful Instructional Tool for Promoting Meta-Cognitive and Meta-Scientific Thinking on Quantum Mechanics and the «Nature of Science» // *Science and Education*. 2008. V. 17. P. 613.
12. Атомы «глазами» электронов. М.: Знание, 1988.
13. *Binnig G.* In Touch with Atoms // *Rev. Mod. Phys.* 1999. V. 71. P. S324.
14. *Studer F., Hervieu M., Constantini J.-M., Toulemonde M.* High Resolution Electron Microscopy of Track in Solids // *Nucl. Instr. Meth. in Phys. Research B*. 1997. V. 122. P. 449.
15. *Phaneuf R. J., Schmid A. K.* Low-Energy Electron Microscopy: Imaging Surface Dynamics // *Phys. Today*. 2003. № 3. P. 50.
16. *Scanning Probe Microscopies Beyond Imaging. Manipulation of Molecules and Nanostructures* / Ed. P. Samori. New York: Wiley-VCH, 2006.
17. *Куземский А. Л.* // *Физика элементарных частиц и атомного ядра*. 2008. Т. 39, вып. 1. С. 5–81.

## ПРИНЦИП ДЕТАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА\*

Показано, что квантовая механика приводит к равенству вероятности перехода из состояния  $l$  в состояние  $k$  и вероятности обратного перехода из  $k$  в  $l$ , если все скорости, спины частиц и внешнее магнитное поле в последнем случае заменены на противоположные. Установлено условие справедливости принципа детального равновесия, согласно которому вероятности прямого и обратного перехода равны между собой. Приведен пример системы, для которой не соблюдается принцип детального равновесия.

### 1. Принцип детального равновесия и обратимость

Согласно принципу детального равновесия (п. д. р.) вероятность перехода  $P_{kl}$  из некоторого состояния  $l$  в другое состояние  $k$  равна вероятности обратного перехода из состояния  $k$  в состояние  $l$  (в такой форме этот принцип используется при доказательстве  $H$ -теоремы). Весьма распространено неверное мнение, предполагающее, что этот принцип является прямым следствием законов квантовой механики [1]<sup>1</sup>. Между тем, известно, что этот принцип, вообще говоря, не соблюдается уже и в классической механике [4]. Это положение побудило нас рассмотреть подробнее этот принцип с точки зрения квантовой механики. При этом мы сознательно ограничиваемся нерелятивистской квантовой механикой, чтобы избежать известных трудностей, связанных с квантовой теорией поля. Тем не менее наши выводы будут применимы и к релятивистской квантовой механике в той мере, в какой ее можно считать существующей.

Как известно, в классической механике в тех случаях, когда силы инвариантны относительно перемены знака всех скоростей<sup>2</sup>, имеет место принцип обратимости. Согласно этому принципу при изменении знака всех скоростей или, что то же, при изменении знака времени движение протекает в обрат-

\* ЖЭТФ. 1947. Т. 17, вып. 10. С. 924–929.

<sup>1</sup> В новом издании книги Гайтлера [2] имеется замечание, указывающее на несоблюдение этого принципа применительно к теории мезона. Именно, Гамильтон и Пенг [3] обнаружили на ряде примеров, относящихся к теории мезона, несоблюдение п. д. р. При усреднении же по направлению спина мезона этот принцип оказывается вновь верным. Гайтлер отмечает, что нарушение п. д. р. оказывается поэтому «не слишком сильным». Гайтлер выражает также мнение, что этот принцип не будет справедлив в «будущей теории». Между тем, ниже показано, что п. д. р., вообще говоря, несправедлив уже и в современной теории.

<sup>2</sup> В случае наличия внешнего магнитного поля его направление должно быть изменено одновременно с изменением знака скоростей.

ном порядке. Точно такое же положение дел осуществляется и в квантовой механике. Вероятность перехода  $P_{kl}$  из состояния  $l$  в состояние  $k$  за время  $t$  равна

$$P_{kl}(t) = |S_{kl}(t)|^2, \quad S(t) = \exp\left(-i\frac{Ht}{\hbar}\right), \quad (1)$$

где  $H$  — оператор Гамильтона. В силу самосопряженности оператора  $H$  матрица  $S$  унитарна. Вероятность перехода в обратном направлении  $P_{lk}(t) = |S_{lk}(t)|^2$ . Из унитарности матрицы  $S$  следует  $S_{kl}(t) = S_{lk}^{-1}(t) = S_{lk}(-t)$  (последнее в силу (1)). Таким образом

$$P_{lk}(t) = P_{kl}(-t). \quad (2)$$

Будем теперь считать переменные  $k, l$  импульсами. Вероятность обратного перехода за время  $t$  при одновременном изменении знака всех импульсов (скоростей) и знака внешнего магнитного поля  $\mathfrak{H}$  будет  $P_{-l,-k}(t, -\mathfrak{H}) = |S_{-l,-k}(t, -\mathfrak{H})|^2$ . Если оператор Гамильтона  $H$  остается инвариантным при перемене знаков импульсов, знака магнитного поля, то  $H^*(-\mathfrak{H}) = H(\mathfrak{H})$  (так как изменение знаков импульсов равносильно переходу к комплексно-сопряженной функции). На основании этого равенства имеем

$$H_{-l,-k}(-\mathfrak{H}) = \int e^{-ilx} H(-\mathfrak{H}) e^{ikx} dx = \int e^{-ilx} H^*(\mathfrak{H}) e^{ikx} dx = H_{lk}^*(\mathfrak{H}) = H_{kl}(\mathfrak{H}). \quad (3)$$

Поэтому  $S_{-l,-k}(t, -\mathfrak{H}) = S'_{kl}(t, \mathfrak{H})$ . Отсюда следует, что

$$P_{-l,-k}(t, -\mathfrak{H}) = P_{kl}(t, \mathfrak{H}). \quad (4)$$

Это равенство и доказывает обратимость движений в квантовой механике. Оно может быть обобщено и на тот случай, когда частицы обладают спином  $s(s_1, s_2, s_3)$ .

Абсолютное значение этого спина определяется квантовым числом  $J_s$  (целым или полуцелым), которое принимает разные значения для различных частиц системы. Матричные элементы проекций спина в представлении, в котором одна из проекций диагональна  $(s_3)_{\alpha\beta} = \alpha\delta_{\alpha\beta}$ , удовлетворяют равенствам (см., например, [5]):

$$(s_1)_{\alpha\beta} = (s_1)_{-\beta, -\alpha}, \quad (s_2)_{\alpha\beta} = (s_2)_{-\beta, -\alpha}, \quad (s_3)_{\alpha\beta} = -(s_3)_{-\beta, -\alpha}. \quad (5)$$

Поэтому в тех случаях, когда оператор Гамильтона инвариантен относительно одновременной перемены знаков импульсов, спинов и знака внешнего магнитного поля, так что  $H^*(-\mathfrak{H}, -s) = H(\mathfrak{H}, s)$  (здесь  $s$  рассматривается как действительная величина), мы будем иметь<sup>1</sup>

$$H_{-l,-\beta;-k,-\alpha}(-\mathfrak{H}, -s_1, -s_2, s_3) = H_{k,\alpha;l,\beta}(\mathfrak{H}, s_1, s_2, s_3). \quad (3')$$

<sup>1</sup> Знак  $s_3$  оставлен явно неизменным, так как переход от  $(\alpha, \beta)$  к  $(-\beta, -\alpha)$  (согласно (5)) сам по себе обеспечивает изменение знака  $s_3$ .

На основании этого равенства получим

$$P_{-l, -\beta; -k, -\alpha}(t, -\mathfrak{H}, -s_1, -s_2, s_3) = P_{k, \alpha; l, \beta}(t, \mathfrak{H}, s_1, s_2, s_3). \quad (4')$$

Таким образом, из общих принципов квантовой механики вытекает, во-первых, малосодержательное равенство (2) и, при наличии определенной инвариантности функции Гамильтона, равенства (4) и (4'), означающие равенство вероятностей прямых и противоположных переходов. В отличие от (2), (4) и (4') п. д. р. утверждает, что равны вероятности прямых ( $P_{kl}(t)$ ) и обратных ( $P_{lk}(t)$ ) переходов, что, вообще говоря, не совместимо ни с (2), ни с (4) и (4').

Мы обратимся теперь к нахождению условия, при котором имеет место п. д. р. Мы будем основывать наше рассмотрение на стационарном методе расчета вероятностей перехода, в котором явно не фигурирует время, (ввиду большой простоты этого метода) и только позднее отметим тождественность результата с тем, который получается, если пользоваться более обычным, нестационарным формализмом.

Предположим, что наша система обладает непрерывным энергетическим спектром (случай дискретного спектра не представляет большого интереса для изучаемой проблемы). Пусть исходное состояние принадлежит энергии  $E = E_0$ . Волновая функция есть  $\Phi = \psi e^{-iEt/\hbar}$ , где  $\psi$  уже не зависит от времени и подчиняется уравнению

$$E\psi_k = E_k\psi_k + \int W_{kl}\psi_l dl. \quad (6)$$

Здесь  $E_k$  — кинетическая энергия частиц в состоянии  $k$ , а  $W_{kl}$  — матричный элемент энергии взаимодействия. Пусть падающая волна будет  $\psi_0 = \delta(k - k_0)$ , а рассеянная волна —  $u_k$ . Эта волна должна быть расходящейся, поэтому мы можем положить

$$\psi_k = \delta(k - k_0) + u_k, \quad u_k = -2\pi i \delta^+(E_0 - E_k) f_k, \quad (6')$$

где  $\delta^+(x) = \frac{1}{2} \delta(x) - \frac{1}{2\pi i x}$ . Подставляя (6') в (6), получим уравнение для  $f$ , которое, будучи записано в операторной форме, гласит:

$$f = W - i\pi \overline{W} f + T f. \quad (7)$$

Здесь  $T$  — оператор с матричными элементами  $T_{kl} = \frac{W_{kl}}{E_0 - E_l}$ , а черта над произведением  $Wf$  означает, что это произведение взято на поверхности энергии

$$(\overline{W}f)_{kk_0} = \int W_{kl} \delta(E_l - E_0) f_{lk_0} dl. \quad (8)$$

В работе Паули<sup>1</sup> было показано, что уравнение (7) путем итерации может быть сведено к уравнению

$$f = K - i\pi \overline{K} f; \quad (7')$$

где оператор  $K = \sum_0^{\infty} T^s W$ . В этом уравнении  $K$  умножается на  $f$  только на поверхности энергии; таким образом, это уравнение распадается на уравнения, относящиеся к различным значениям полной энергии  $E_0$ . Поэтому в дальнейшем мы будем считать  $K$  и  $f$  диагональными относительно полной энергии. Решая уравнения (7) относительно  $f$ , находим

$$f = \overline{K(1 + i\pi K)^{-1}} = \overline{K(1 + \pi^2 \overline{K^2})^{-1} - i\pi \overline{K^2}(1 + \pi^2 \overline{K^2})^{-1}} = A - i\pi B, \quad (9)$$

где  $A$  и  $B$  — самосопряженные операторы. На основании (9) величина, определяющая вероятность перехода из состояния  $k_0$  в  $k$ , будет равна

$$|f_{kk_0}|^2 = |A_{kk_0}|^2 + \pi^2 |B_{kk_0}|^2 - i\pi (B_{kk_0} A_{kk_0}^* - B_{kk_0}^* A_{kk_0}). \quad (10)$$

Для вероятности перехода из состояния  $k$  в состояние  $k_0$  получим

$$\begin{aligned} |f_{k_0k}|^2 &= |A_{k_0k}|^2 + \pi^2 |B_{k_0k}|^2 - i\pi (B_{k_0k} A_{k_0k}^* - B_{k_0k}^* A_{k_0k}) = \\ &= |A_{kk_0}|^2 + \pi^2 |B_{kk_0}|^2 + i\pi (B_{kk_0} A_{kk_0}^* - B_{kk_0}^* A_{kk_0}). \end{aligned} \quad (10')$$

Стало быть, вероятности перехода  $P_{k_0k}(\infty)$  и  $P_{kk_0}(\infty)$  равны друг другу, если

$$B_{kk_0} A_{kk_0}^* = B_{kk_0}^* A_{kk_0}, \quad (11)$$

что возможно только в том случае, когда матричные элементы  $A_{kk_0}$  и  $B_{kk_0}$  имеют равные аргументы, в частности, если они действительны.

Таким образом п. д. р., вообще говоря, не выполняется, и (11) есть условие его выполнения.

Вычислим теперь приближенное значение  $|f_{kk_0}|^2$ , считая взаимодействие  $W$  пропорциональным малому параметру. Тогда, имея в виду значение  $A$ ,  $B$  и  $K$ , получим из (10) для случая исчезающего первого приближения:

$$\begin{aligned} |f_{kk_0}^{(2)}|^2 &= |W_{kk_0}|^2 + W_{kk_0} (TW)_{kk_0}^* + W_{kk_0}^* (TW)_{kk_0} - \\ &- i\pi [W_{kk_0}^* (\overline{W^2})_{kk_0} - W_{kk_0} (\overline{W^2})_{kk_0}^*], \end{aligned} \quad (12)$$

<sup>1</sup> Еще неопубликованный доклад В. Паули «О трудностях во вторичном квантовании и в теории частиц», любезно присланный им проф. Иваненко для ознакомления с ним советских физиков.

и для случая, когда исчезают нечетные приближения  $(T^3 W)_{kk_0}$ :

$$|f_{kk_0}^{(4)}|^2 = |(TW)_{kk_0}|^2 + (TW)_{kk_0} (T^3 W)_{kk_0}^* + (TW)_{kk_0}^* (T^3 W)_{kk_0} - \\ - i\pi \left[ (TW)_{kk_0}^* (\overline{TW \cdot TW^*})_{kk_0} - (TW)_{kk_0} (\overline{TW \cdot TW})_{kk_0}^* \right]. \quad (12')$$

Формулы (12) и (12') можно получить также обычным, нестационарным методом вычисления вероятностей перехода, если вычислять амплитуды  $f_{kk_0}$  во втором и, соответственно, в четвертом приближении. При этом результат не зависит от того, вычисляем ли мы амплитуду рассеянной волны  $u_{kk_0}^{(2,4)}(t)$  для  $t \rightarrow \infty$ , или вычисляем вероятность перехода за единицу времени, т.е. величину  $\frac{d}{dt} |u_{kk_0}^{(2,4)}(t)|^2$  при  $t \rightarrow \infty$ .

## 2. Условие выполнения п. д. р. и пример

Как видно из приближенных формул (12) и (12'), п. д. р. всегда соблюдается в первом неисчезающем приближении. Далее, из общего условия соблюдения п. д. р. (11) следует, что он будет иметь силу во всех тех случаях, когда матричные элементы энергии взаимодействия  $W_{kl}$  действительны<sup>1</sup>. Рассмотрим условие действительности этих элементов, учитывая спин частиц. Имеем:

$$W_{\alpha\beta} = \int e^{ikx} W_{\alpha\beta}(x, s) e^{-ilx} dx = \int e^{-ikx} W_{\alpha\beta}^*(x, s) e^{ilx} dx = \\ = \int e^{ikx} W_{\alpha\beta}^*(-x, s) e^{-ilx} dx. \quad (13)$$

Следовательно, условие действительности матричных элементов энергии взаимодействия может быть написано в виде:

$$W_{\alpha\beta}^*(-x, s) = W_{\alpha\beta}(x, s). \quad (13')$$

Возьмем для оператора  $s$  представление (5), в котором одна проекция ( $s_3$ ) выделена тем, что она является измеряемой ( $s_3 = \alpha \delta_{\alpha\beta}$ ). Вместо двух других проекций ( $s_1$  и  $s_2$ ) введем операторы  $L_1 = s_1 + is_2$ ,  $L_2 = s_1 - is_2$ , представляемые матрицами с действительными элементами.

Тогда условие (13) равносильно условию

$$W^*(-x, L_1, L_2, s_3) = W(x, L_1, L_2, s_3). \quad (14)$$

Так как мы еще можем вращать векторы  $s_1$ ,  $s_2$ , оставляя их ортогональными между собой и  $s_3$ , то достаточно, чтобы условие (14) было выполнено при каком-либо одном положении  $(s_1, s_2)$ . Из (14) видно, что условие действи-

<sup>1</sup> Это условие достаточное, но не необходимое.

тельности  $W_{k\alpha,l\beta}$ , а вместе с тем и достаточное условие соблюдения п. д. р., выглядит весьма несимметрично относительно зависимости энергии взаимодействия от спинов частиц и поэтому, вообще говоря, не будет иметь места.

Если же между частицами действуют только центральные силы, то  $W(x)$  есть действительная функция от  $x$ , удовлетворяющая условию  $W(-x) = W(x)$ . В этом случае п. д. р. будет заведомо соблюдаться. Нарушение п. д. р. может иметь место лишь в тех системах, в которых силы зависят от углов, например, для частиц, обладающих электрическим или магнитным моментом.

Приведем простой пример подобной системы. Пусть мы имеем неподвижный диполь с моментом  $2ea$ , направленным по оси  $OZ$ . Рассмотрим рассеяние частицы с зарядом  $e$  и массой  $\mu$  на таком диполе. Энергия взаимодействия диполя и заряженной частицы равна

$$W(x) = \frac{e^2}{|x-a|} - \frac{e^2}{|x+a|}. \quad (15)$$

Следовательно,

$$W_{kk_0} = \int W(x) e^{i\Delta k x} dx = \frac{4\pi e^2}{|\Delta k|^2} (e^{i\Delta k_z a} - e^{-i\Delta k_z a}) = i \frac{8\pi e^2}{|\Delta k|^2} \sin(\Delta k_z a), \quad (16)$$

где  $\Delta k = k - k_0$ . Как видно из (16), матричный элемент  $W_{kk_0}$  — чисто мнимый. Вычислим теперь  $W_{kk_0}^2$ . Согласно (15) имеем:

$$\begin{aligned} (\overline{W^2})_{kk_0} &= \int W_{kk'} W_{k'k_0} \rho(E_0) d\Omega' = \\ &= -(8\pi e^2)^2 \rho(E_0) \int d\Omega' \sin \frac{[(k_z - k'_z) a] \sin [(k'_z - k_{z0}) a]}{|k - k'|^2 |k' - k_0|^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Легко убедиться, что это выражение остается конечным всюду, кроме области бесконечно малых углов рассеяния  $\vartheta$  (угол между  $k$  и  $k_0$ ). Простоты ради мы вычислим его для специальной ориентации первичного пучка относительно оси диполя. Пусть первичный пучок падает вдоль оси диполя так, что углы, определяющие направления  $k_0, k', k$ , будут соответственно  $\vartheta_0 = 0; \vartheta', \varphi', \vartheta, \varphi$ . В этом случае

$$\begin{aligned} (\overline{W^2})_{kk_0} &= -\frac{(8\pi e^2)^2}{4k^4} \int_0^\pi \sin \vartheta' d\Omega' \rho(E_0) \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\sin [ka(\cos \vartheta - \cos \vartheta')] \sin [ka(\cos \vartheta' - 1)]}{(1 - \cos \vartheta' \cos \vartheta - \sin \vartheta' \sin \vartheta \cos \varphi')(1 - \cos \vartheta')}. \end{aligned} \quad (17')$$

Интегрирование по  $\varphi'$  выполняется элементарно, и после замены  $\cos \vartheta' = 1 + x$  получаем

$$(\overline{W^2})_{kk_0} = \frac{2\pi(8\pi e^2)^2 \rho(E_0)}{4k'} \int_0^{-2} \frac{\sin [ka(1 - \cos \vartheta - x)] \sin (kax)}{(1 - \cos \vartheta - x)x} dx. \quad (17'')$$

Этот интеграл сводится к интегральным синусам и косинусам и при больших  $ka$  равен

$$(\overline{W^2})_{kk_0} = -\frac{\pi(8\pi e^2)^2 \rho(E_0)}{4k^4 ka(1 - \cos \vartheta)} \left\{ \cos [ka(1 - \cos \vartheta)] \ln (ka \sin^2 \vartheta) + \frac{3\pi}{2} \sin (ka|1 - \cos \vartheta|) \right\}. \quad (18)$$

Для определения вероятности  $|f_{kk_0}|^2$  согласно (12) матричный элемент  $(TW)_{kk_0}$  вообще не нужен, так как он выпадает из выражения (12) благодаря мнимости  $W_{kk_0}$ . Подставляя в (12) значение  $W_{kk}$  из (16) и  $(\overline{W^2})_{kk_0}$  из (18), находим

$$|f_{kk_0}^{(2)}|^2 = \left( \frac{8\pi e^2}{|\Delta k|^2} \right)^2 \sin^2(\Delta k_z a) - \left( \frac{8\pi e^2}{|\Delta k|^2} \right) \frac{2\pi e^2 \mu}{k^2 a \hbar^2} \sin(\Delta k_z a) \left\{ \cos(\Delta k_z a) \ln (ka \sin^2 \vartheta) + \frac{3\pi}{2} \sin |\Delta k_z a| \right\}. \quad (19)$$

Второй член в этом выражении меняет свой знак для обратного перехода ( $k \rightarrow k_0$ ), что и приводит к нарушению п. д. р. Если же переставить местами  $k$  и  $k_0$  и одновременно поменять знак скоростей ( $k$  и  $k_0$  заменить на  $-k_0, -k$ ),

то, как видно из (19),  $|f_{kk_0}^{(2)}|^2 = |f_{-k_0, -k}^{(2)}|^2$ , что и должно быть в соответствии с обратимостью квантовой механики. Рис. 1 иллюстрирует рассмотренный нами пример в терминах классической механики. Из рисунка видно различие движений, ведущих из  $k$  в  $l$  (или из  $-l$  в  $-k$ ) в сравнении с движением, ведущим из  $l$  в  $k$ . Если, например, траектории  $(k, l)$  и  $(-l, -k)$  проходят между зарядами диполя (рис. 1, *a, b*), то траектория  $(l, k)$  должна проходить вне диполя (рис. 1, *c*).

Рис. 1

## Список литературы

1. Fowler R. Statistical Mechanics. 1936. P. 659.
2. Heitler W. Quantum Theory of Radiation. 2nd edition. 1944. P. 252.
3. Hamilton J., Peng A. H. // Proc. Roy. Ir. Ac. 1944. V. 49A. P. 197.
4. Lorentz H. // Sitz. Ber. d. Akad. d. Wiss. zu Wien. 1887. Bd. 95. S. 115.
5. Ван-дер-Варден. Метод теории групп в квантовой механике. ОНТИ, 1938. С. 73.



Комментарий. В данной работе Д. И. Блохинцев обращается к фундаментальной проблеме физики: принципу детального равновесия или принципу детального баланса (ПДБ) [1]. Он пишет: «Как известно в классической механике в тех случаях, когда силы инвариантны относительно перемены знака всех скоростей, имеет место принцип обратимости. Согласно этому принципу при изменении знака всех скоростей или, что то же, при изменении знака времени движение протекает в обратном порядке. Точно такое же положение дел осуществляется и в квантовой механике... Установлено условие справедливости принципа детального равновесия, согласно которому вероятность прямого и обратного перехода равны между собой. Приведен пример системы, для которой не соблюдается принцип детального равновесия». Таким образом здесь рассмотрен вопрос о справедливости принципа детального равновесия для квантовых систем, необходимого для доказательства *H*-теоремы Больцмана, выражающей необратимость релаксационного процесса [2–5]. Вероятности перехода входят в основное кинетическое уравнение [6] и определяют в случае контакта с термостатом стремление системы к распределению Гиббса [5]. В статистической физике ПДБ называют также равенство среднего числа прямых и обратных столкновений для газов в состоянии статистического равновесия [3–8]. Было доказано, что для микроскопической обратимости необходимо выполнение ПДБ и условия эргодичности [9–12].

Нужно подчеркнуть, что ПДБ не является ни самоочевидным, ни всеобъемлющим. Уже Больцман указал на возможность нарушения детального равновесия при классическом описании столкновений между молекулами несферической формы. В квантовой механике считается, что для изолированной системы вероятность прямого перехода между квантовыми состояниями равна вероятности обратного перехода [2, 9–13] (теорема взаимности в теории столкновений [13]). Данное положение является следствием симметрии квантовых уравнений движения относительно обращения времени [9–12]. В книге [14] отмечается, что «этот принцип, называемый обычно *принципом микроскопической обратимости* или *принципом детального равновесия*, оказывает неоценимые услуги при обсуждении процессов обмена энергией в атомных системах». Результаты Блохинцева вошли в монографию [4], где отмечено, что именно в работе Д. И. Блохинцева показано, что в случае центрального закона взаимодействия между частицами принцип детального равновесия выполняется безусловно. Однако в случаях взаимодействий, зависящих от угловых координат, требуется специальное рассмотрение, так как как принцип детального равновесия в таких случаях выполняется не всегда. В частности, это относится к системам со спиновым взаимодействием. Сам Д. И. Блохинцев пишет следующее: «В классической механике имеет место принцип детального баланса в тех случаях, когда силы инвариантны относительно перемены знака скоростей всех частиц. В других случаях этот принцип не соблюдается. Совершенно такое же положение имеет место и в квантовой механике».

Различные аспекты принципа детального баланса как в классическом, так и в квантовом случаях продолжают изучаться и разрабатываться [15–19]. Сейчас изучены многочисленные примеры систем, где ПДБ не выполняется. Это связано прежде всего с изучением открытых систем. В частности, недавно был сформулирован динамический принцип детального баланса [20] для неравновесных состояний. Особый интерес в этой связи вызывают молекулярные [21, 22] и биологические системы [23, 24]. Подробнее различные аспекты принципа детального равновесия рассмотрены в работах [9–24].

1. *Coester F.* Principle of Detailed Balance // *Phys. Rev.* 1951. V. 84. P. 1259.
2. *Блохинцев Д. И.* Основы квантовой механики. 5-е изд. М.: Наука, 1976.
3. *Киттель Ч.* Элементарная статистическая физика. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
4. *Гуров К. П.* Основания кинетической теории. М.: Наука, 1966. С. 73.
5. *Зубарев Д. Н.* Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971.
6. *Kuzemsky A. L.* // *Intern. J. Mod. Phys. B.* 2007. V. 21. P. 2821–2942. (cond-mat/0707.0753).
7. *Исихара А.* Статистическая физика. М.: Мир, 1973.
8. *Morse P. M.* Thermal Physics. 2nd ed. New York: W. F. Benjamin, 1969.
9. *Thomsen J. S.* Logical Relations among the Principles of Statistical Mechanics and Thermodynamics // *Phys. Rev.* 1953. V. 91. P. 1263.
10. *Landsberg P. T.* Method of Transition Probabilities in Quantum Mechanics and Quantum Statistics // *Phys. Rev.* 1954. V. 96. P. 1420.
11. *Klein M. J.* Principle of Detailed Balance // *Phys. Rev.* 1955. V. 97. P. 1446.
12. *Watanabe S.* Symmetry of Physical Laws Part I. Symmetry in Space-Time and Balance Theorems // *Rev. Mod. Phys.* 1955. V. 27. P. 26.
13. *Давыдов А. С.* Квантовая механика. 2-е изд. М.: Наука, 1973.
14. *Шпольский Э. В.* Атомная физика. Т. 2. М.: Наука, 1974.
15. *Van Vleck J. H., Huber D. L.* Absorption, Emission, and Linebreadths: A Semihistorical Perspective // *Rev. Mod. Phys.* 1977. V. 49. P. 939.
16. *Walls D. F., Carmichael H. J., Gragg R. F., Schieve W. C.* Detailed Balance, Liapounov Stability, and Entropy in Resonance Fluorescence // *Phys. Rev. A.* 1978. V. 18. P. 1622.
17. *Verbeure A.* Detailed Balance and Equilibrium // *Commun. Math. Phys.* 1984. V. 95. P. 301.
18. *Denisov A., Castro-Beltran H. M., Carmichael H. J.* Time-Asymmetric Fluctuations of Light and the Breakdown of Detailed Balance // *Phys. Rev. Lett.* 2002. V. 88. P. 243601.
19. *Ben Abdallah N., Escobedo M., Mischler S.* Convergence to the Equilibrium for the Pauli Equation Without Detailed Balance Condition // *Comptes Rendus Mathematique (C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I).* 2005. V. 341. P. 5.
20. *Accardi L., Imafuku K.* Dynamical Detailed Balance and Local KMS Condition for Non-Equilibrium States // *Intern. J. Mod. Phys. B.* 2004. V. 18. P. 435.

21. *Sebastian K.L.* Molecular Ratchets: Verification of the Principle of Detailed Balance and the Second Law of Dynamics // *Phys. Rev. E.* 2000. V. 61. P. 937.
22. *Astumian R.D.* Symmetry Relations for Trajectories of a Brownian Motor // *Phys. Rev. E.* 2007. V. 76. P. 020102.
23. *Андронов А.А.* Хиральность: вращение поляризации, принцип детального баланса и жизнь // *УФН.* 2007. Т. 177. С. 315.
24. *Taileuer J. T., Cates M. E.* Statistical Mechanics of Interacting Run-and-Tumble Bacteria // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 100. P. 218103.

*А. Л. Куземский*

## СВЯЗЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ С АППАРАТОМ МЕХАНИКИ КЛАССИЧЕСКОЙ

*Совместно с Ч. М. Брискиной*

В настоящей работе дается представление о классической статистической механике в пространстве конфигураций, в отличие от обычного представления в пространстве фаз. Показывается соответствие с координатным представлением в квантовой механике.

Математический аппарат квантовой механики существенным образом отличается от аппарата механики классической.

Квантовая механика для изображения динамических переменных, характеризующих систему, пользуется линейными самосопряженными операторами. В классической же механике динамические переменные изображаются действительными функциями координат, импульсов и времени. Далее, квантовая механика имеет дело всегда со статистическими ансамблями, в то время как классическая механика обычно оперирует динамическим описанием движения при точно заданных начальных условиях. Вытекающее отсюда различие в аппаратах обеих теорий, однако, легко устраняется, если проводить параллель между классической статистической механикой и механикой квантовой, а обычную постановку задачи в классической механике рассматривать лишь как предельный случай, когда распределение начальных данных вырождается в точное их задание.

При таком рассмотрении классической механики устанавливается далеко идущее родство обеих теорий.

Именно в статистической механике состояние ансамбля частиц описывается переменными *в пространстве фаз*  $(Q, P)$ <sup>1</sup> посредством плотности вероятности  $D(Q, P)$ , обладающей свойством

$$D(Q, P) = D^*(Q, P) \quad (I)$$

и подчиняющейся уравнению (теорема Лиувилля)

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\partial D}{\partial t} + [H, D] = 0, \quad (II)$$

---

<sup>1</sup> Здесь и в дальнейшем под  $(Q, P)$  подразумевается вся совокупность координат и импульсов всех частиц.

где  $H(Q, P)$  есть функция Гамильтона, а

$$[H, D] = \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial D}{\partial Q} - \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\partial D}{\partial P} - \text{скобка Пуассона.}$$

Среднее значение любой величины  $L(Q, P)$  определяется равенством

$$L = \int L(Q, P) D(Q, P) dQ dP. \quad (\text{III})$$

Далее отметим очевидное в классической теории свойство действительности и коммутативности физических величин

$$L(Q, P) = L^*(Q, P), \quad (\text{IV})$$

$$L_1(Q, P) L_2(Q, P) = L_2(Q, P) L_1(Q, P). \quad (\text{V})$$

С помощью  $D(Q, P)$  определяется вероятность найти определенную конфигурацию  $(Q)$  системы частиц

$$W(Q) = \int D(Q, P) dP. \quad (\text{VI})$$

Вместо плотности вероятности  $D(Q, P)$  для описания состояния квантового ансамбля применяется матрица плотности с элементами  $R(q, q')$  [1], а любая динамическая переменная  $L$  описывается матрицей  $L(q, q')$ . Причем под  $(q)$  мы понимаем точку *конфигурационного* пространства (во избежание смещения мы будем обозначать координаты и импульсы квантовых частиц малыми буквами  $(q)$  и  $(p)$ ). Таким образом, в квантовой механике вместо точки пространства фаз фигурируют пары точек  $(q, q')$  конфигурационного пространства.

Ранее одним из авторов было показано [2], что если ввести смешанное представление, в котором строки матриц нумеруются значениями координат  $(q)$ , а колонки значениями импульсов  $(p)$ , то квантовая механика отображается в пространство фаз  $(q, p)$ . При этом матричные элементы в новом представлении задаются формулами

$$L(q, p) = \int L(q, p') \exp \left( \frac{i(q' - q)p}{\hbar} \right) dq',$$

$$R(q, p) = \int R(q, p') \exp \left( \frac{i(q' - q)p}{\hbar} \right) dq'.$$

Величины  $L(q, p)$  в случае отсутствия произведений  $q$  и  $p$  попросту совпадают с соответствующими классическими функциями  $L(Q, P)$ , а плотность  $R(q, p)$  оказывается по своим свойствам столь аналогичной классической плотности  $D(Q, P)$ , что ее по праву можно назвать плотностью «кзазивероятности» и рассматривать  $R(q, p)$  как *обобщение понятия вероятности на случай одновременно неизмеримых величин*. В этой работе мы намерены рассмотреть

обратную задачу: сформулировать классическую механику посредством пар точек пространства конфигураций.

Указанное выше соответствие подсказывает, что этого можно достигнуть, если вместо классических величин  $L(Q, P)$ ,  $D(Q, P)$  рассматривать их компоненты Фурье в пространстве импульсов

$$L(Q, \xi) = \int L(Q, P) \exp\left(-\frac{i\xi P}{\hbar}\right) dP, \quad (1)$$

$$D(Q, \xi) = \int D(Q, P) \exp\left(-\frac{i\xi P}{\hbar}\right) dP. \quad (2)$$

Здесь  $\hbar$  — постоянная размерности действия;  $\xi$  — новая переменная. Как будет видно из дальнейшего, соответствие с квантовой механикой требует, чтобы  $\hbar$  было равно постоянной Планка, а  $\xi$  должна переходить в  $q' - q$  и  $Q$  в  $(q' + q)/2$ .

Подставляя  $D(Q, P)$  и  $H(Q, P)$  из (1) и (2) в (I), (II), (III), (IV), (V) и (VI), найдем

$$D(Q, \xi) = D^*(Q, -\xi), \quad (I')$$

$$i\hbar \frac{\partial D(Q, \xi)}{\partial t} = \int u H(Q, u) \frac{\partial D(Q, \xi - u)}{\partial Q} du - \int u D(Q, u) \frac{\partial H(Q, \xi - u)}{\partial Q} du, \quad (II')$$

где  $H(Q, \xi)$  — компоненты Фурье функции Гамильтона  $H(Q, P)$ .

Далее,

$$\bar{L} = \int D(Q, \xi) L^*(Q, \xi) dQ d\xi, \quad (III')$$

$$L(Q, \xi) = L^*(Q, -\xi), \quad (IV')$$

$$L_1 L_2 = L_2 L_1, \quad (V')$$

где

$$L_1 L_2(Q, \xi) = \int L_1(q, \xi - u) L_2(q, u) du \quad (3)$$

и, как видно из (2),  $W(Q)$  равно

$$W(Q) = D(Q, 0). \quad (VI')$$

С другой стороны, в квантовой механике матрица плотности обладает свойством

$$R(q, q') = R^*(q', q) \quad (I'')$$

и подчиняется уравнению

$$i\hbar \frac{\partial R(q, q')}{\partial t} = \int H(q, q'') R(q'', q') dq'' - \int R(q, q'') H(q'', q') dq''. \quad (II'')$$

Далее

$$\bar{L} = \iint R(q, q'') L(q'', q) dq'', \quad (III'')$$

$$L(q, q') = L^*(q', q), \quad (\text{IV}'')$$

$$L_1 L_2 \neq L_2 L_1 \quad (\text{V}'')$$

(кроме исключительных случаев коммутативности двух величин  $L_1$  и  $L_2$ , когда это неравенство обращается в равенство). При этом

$$L_1 L_2(q, q') = \int L_1(q, q'') L_2(q'', q') dq''. \quad (4)$$

Наконец,

$$W(q) = R(q, q). \quad (\text{VI}'')$$

Введем теперь новые переменные

$$Q = \frac{q + q'}{2}, \quad \xi = \frac{q' - q}{2}$$

и перепишем уравнения (I''), (II''), (III''), (IV''), (V'') и (VI'') в этих переменных:

$$R(Q, \xi) = R^*(Q, -\xi), \quad (\text{I}''')$$

$$i\hbar \frac{\partial R(Q, \xi)}{\partial t} = \int H\left(Q - \frac{\xi - u}{2}, u\right) R\left(Q + \frac{u}{2}, \xi - u\right) du - \\ - \int R\left(Q - \frac{\xi - u}{2}, u\right) H\left(Q + \frac{u}{2}, \xi - u\right) du, \quad (\text{II}''')$$

$$\bar{L} = \int R(Q, \xi) L^*(Q, \xi) dQ d\xi, \quad (\text{III}''')$$

$$L(Q, \xi) = L^*(Q, -\xi), \quad (\text{IV}''')$$

$$L_1 L_2(Q, \xi) = \int L_1\left(Q - \frac{\xi - u}{2}, u\right) L_2\left(Q + \frac{u}{2}, \xi - u\right) du, \quad (4')$$

$$W(Q) = R(Q, 0). \quad (\text{VI}''')$$

Полная аналогия этих уравнений с классическими уравнениями (I'), (II'), (III'), (IV') и (V') очевидна. Более того, квантовые уравнения (I''')–(VI''') переходят в классические уравнения (I')–(V'), если считать, что все величины плавно зависят от  $Q$ , и на этом основании разложить  $H$  и  $R$  по степеням,  $(\xi - u)/2$  и  $u/2$ . Тогда в качестве первого приближения из (II''') получается в точности классическое уравнение движения в форме (I').

Пусть гамильтонова функция  $H(Q, P) = P^2/(2m) + V(Q)$ . Тогда классическое уравнение движения (I') гласит:

$$i\hbar \frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial^2 D}{\partial Q \partial \xi} + \xi \frac{\partial V(Q)}{\partial Q} D, \quad (5)$$

а квантовое уравнение ( $\Pi'''$ ) в раскрытом виде записывается так:

$$i\hbar \frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial^2 R}{\partial Q \partial \xi} + \left[ V\left(Q + \frac{\xi}{2}\right) - V\left(Q - \frac{\xi}{2}\right) \right] R. \quad (6)$$

Уравнение (6) переходит в уравнение (5), если можно ограничиться областью переменных  $Q$  и  $\xi$ , внутри которой имеет место неравенство

$$\left| \frac{\partial V}{\partial Q} \right| \gg \xi^2 \left| \frac{\partial^3 V}{\partial Q^3} \right|, \quad (7)$$

т. е. если потенциал  $V(Q)$  есть достаточно плавная функция координат<sup>1</sup>.

Таким образом, метод описания состояния ансамбля парами точек в пространстве конфигураций может быть введен и в классическую механику.

Квантовую механику в координатном представлении можно, стало быть, рассматривать как обобщение классической статистической механики, представленной в пространстве  $(Q, \xi)$ .

Как видно из сопоставления уравнений, суть обобщения состоит в том, что в квантовой механике движение зависит от всего пространства так, что существует специфическая связь явлений в разных, пространственно удаленных точках, в то время как в классической механике движение определяется непосредственной окрестностью той точки, в которой оно в данный момент происходит.

## Список литературы

1. Дирак П. Основы квантовой механики. § 37.
2. Блохинцев Д. И. // J. of Phys. USSR. 1940. V. 2. P. 71. — Статья 61 в наст. издании. — Прим. ред.

Кафедра  
теоретической физики

Поступила  
26 июня 1948 г.

Комментарий. В 1948 г. Д. И. Блохинцев еще раз вернулся к проблеме о связи квантовой и классической механики в работе «Связь математического аппарата квантовой механики с аппаратом механики классической». Здесь рассматривалось «представление о классической статистической механике в пространстве конфигураций, в отличие от обычного представления в пространстве фаз. Было показано соответствие с координатным представлением

<sup>1</sup> Аналогичный результат имеет место и в том случае, когда вводится в рассмотрение магнитное поле. Тогда вектор-потенциал должен удовлетворять неравенству  $\left| \frac{\partial A}{\partial Q} \right| \gg \xi^2 \left| \frac{\partial^3 A}{\partial Q^3} \right|$ .



в квантовой механике... В классической механике динамические переменные изображаются действительными функциями координат, импульсов и времени. Далее, квантовая механика имеет дело всегда со статистическими ансамблями, в то время как классическая механика обычно оперирует с динамическим описанием движения при точно заданных начальных условиях». Блохинцев формулирует здесь утверждение, которое составляет центральную тему его понимания квантовой механики: «математический аппарат квантовой механики существенным образом отличается от аппарата механики классической... различие в аппаратах обеих теорий... легко устраняется, если проводить параллель между классической статистической механикой и механикой квантовой».

Проблема о соответствии квантово-механического и классического описания возникла с самого начала развития квантовой механики. Еще в 1924–1925 гг. Яффе [1, 2] показал, что если плотность распределения фаз выразить как функцию не только одного интеграла энергии, но и интеграла, выражающего принцип сохранения движения центра тяжести, то энергия не будет распределяться уже равномерно по степеням свободы. Яффе в этих работах удалось показать, что для осцилляторов в некоторых случаях получается величина энергии, пропорциональная частоте его колебаний, т.е. в определенной мере воспроизвести переход от классического описания к квантовому описанию. Этому вопросу уделяли внимание многие исследователи [3–14], в том числе Бор, Гейзенберг и Дирак [15–16].

Интересно, что в статье Гелл-Манна и Хартля [8] авторы задаются практически тем же вопросом: «Каково происхождение тех феноменологических, детерминистических законов, которые приближенно управляют квазиклассической областью нашего повседневного опыта, во Вселенной, которая управляется на фундаментальном уровне квантово-механическими законами, характеризующимися неопределенностью и распределениями вероятностей? Какие характерные черты и пределы этих классических законов могут быть прослежены вплоть до лежащих в их основе квантово-механических начал?» (Интересное обсуждение вопроса о том, как квантовая механика «...помогает связать воедино и лучше понять сложные закономерности классической механики и классической статистической механики» дано в заметке П. Парадоксова [3].)

Блохинцев с присущей ему интуицией смотрит точно в суть проблемы, а именно анализирует различие в описании ансамбля частиц «в пространстве фаз» [17] и «в пространстве конфигураций» [18]. Поставленная задача «сформулировать классическую механику посредством пар точек пространства конфигураций» позволяет проследить и установить аналогию квантовых и классических уравнений. Из этого сопоставления делается ясный физический вывод: «в квантовой механике движение зависит от всего пространства так, что существует специфическая связь явлений в разных, пространственно удаленных точках, в то время как в классической механике движение определяется непосредственной окрестностью той точки, в которой оно в данный момент происходит». Этот важнейший физический вывод подтверждается всем последующим развитием квантовой физики. В настоящее время вопросы

о соответствии математического аппарата квантовой механики с аппаратом механики классической и, шире, о соотношении квантовой механики и механики классической по-прежнему привлекают исключительно большое внимание физиков, работающих в самых различных областях [3–16, 19–22]. Работа Д. И. Блохинцева по праву входит в число основополагающих трудов в этом важном направлении исследований. Другие аспекты квантовой теории в фазовом пространстве и разнообразные приложения можно найти в книгах-обзорах [1, 2, 5, 16–20].

1. *Jaffe G.* // Ann. Physik (Leipzig). 1924. V. 74. P. 528.
2. *Jaffe G.* // Ann. Physik (Leipzig). 1925. V. 76. P. 680.
3. *Парадоксов П.* Как квантовая механика помогает понять выводы классической механики // УФН. 1966. Т. 89. С. 707.
4. *Nelson E.* Derivation of the Schrodinger Equation from Newtonian Mechanics // Phys. Rev. 1966. V. 150. P. 1079.
5. *Fujiwara I.* Hamilton's Principle from a Quantal Point of View // Progr. Theor. Phys. 1967. V. 38. P. 1.
6. *Дирак П.* Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968.
7. *Holland P. R.* The Quantum Theory of Motion. Cambridge: Cambridge Uni. Press, 1993.
8. *Gell-Mann M., Hartle J. B.* Classical Equations for Quantum Systems // Phys. Rev. D. 1993. V. 47. P. 3345.
9. *Park D.* Classical Dynamics and Its Quantum Analogues. 2nd ed. Berlin: Springer, 1994.
10. *Mantica G., Ford J.* On the Completeness of the Classical Limit of Quantum Mechanics // Quantum Chaos — Quantum Measurement / Eds. P. Cvitanovic et al. Kluwer Academic Publishers, 1992. P. 241.
11. *Robinet R. W.* Quantum Mechanics: Classical Results, Modern Systems, and Visualized Examples. Oxford: Oxford Uni. Press, 1997.
12. *Ballentine L. E.* Quantum Mechanics: A Modern Development. Singapore: World Scientific, 1998.
13. *Esposito G., Marmo G., Sudarshan G.* From Classical to Quantum Mechanics. An Introduction to the Formalism, Foundations and Applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
14. *Bolivar A. O.* Quantum-Classical Correspondence, Dynamical Quantization and the Classical Limit. (Springer Series: The Frontiers Collection.) Berlin: Springer, 2004.
15. *Bokulich A.* Open or Closed? Dirac, Heisenberg, and the Relation between Classical and Quantum Mechanics // Studies in History and Philosophy of Modern Physics. 2004. V. 35. P. 377.
16. *Bokulich P., Bokulich A.* Niels Bohr's Generalization of Classical Mechanics // Found. Phys. 2005. V. 35. P. 347.
17. *Kim Y. S., Noz M. E.* Phase Space Picture of Quantum Mechanics. Singapore: World Scientific, 1991.

18. *Goldberger M.L., Adams E.N.* The Configurational Distribution Function in Quantum-Statistical Mechanics // J. Chem. Phys. 1952. V. 20. P. 240.
19. *Bayfield J.E.* Quantum Evolution. New York: John Wiley and Sons, 1999.
20. *Zurek W.H.* Decoherence, Einselection, and the Quantum Origins of the Classical // Rev. Mod. Phys. 2003. V. 75. P. 715.
21. *Bokulich A.* Can Classical Structures Explain Quantum Phenomena? // Br. J. Philos. Sci. 2008. V. 59. P. 217.
22. *Bokulich A.* Reexamining the Quantum-Classical Relation: Beyond Reductionism and Pluralism. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008.

*А. Л. Куземский*

## ПРИНЦИПИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ\*

### От автора

Эта монография посвящена принципиальным проблемам квантовой механики и базируется на концепции, первоначально изложенной в моем курсе «Основы квантовой механики». Объем и назначение этого курса не позволили с необходимой полнотой остановиться на принципиальных вопросах. К тому же вплоть до последнего времени некоторые важные пункты не были разработаны с достаточной степенью ясности. В особенности это относится к анализу работы измерительного прибора, двойная роль которого как анализатора квантового ансамбля и как детектора индивидуальных событий оставалась недостаточно разъясненной.

Читатель легко убедится, что эта монография является книгой по теоретической физике, а не философским трактатом. Однако я никогда не отделял мировоззрения от науки, особенно от теоретической физики; поэтому в этой книге немало и философии. Это обстоятельство явилось основанием для ее публикации в философской серии.

Что касается рисунков, то, на мой взгляд, немного юмора полезно даже в самом серьезном деле.

Возможно, это только ощущение, основанное на страстном желании перемены устоявшихся принципов, принципов, которые явно устарели, но за которые мы держимся только потому, что у нас нет новых, и еще, может быть, и потому, что многие из нас опасаются этих перемен, могущих разрушить уют установившегося образа мыслей.

Самое удивительное в этом ощутимом движении нового заключается в том, что оно очевидным образом охватывает не только физику, но и биологию и космологию и готовится оказать существенное влияние на наше научное мировоззрение. В этой обстановке критическое отношение к самим основам современной теории является, по-видимому, самым разумным.

К числу таких основ теории относится и концепция классического детерминизма. Вернее сказать, не так сомнителен сам детерминизм, как сомнительно безотчетное преклонение перед идеалом детерминизма.

Человечество долго верило в предопределение божие и, позднее, в железную причинную связь. Близкое философское родство и неполноценность этих воззрений были поняты Энгельсом, а многовековое непонимание этого родства было поводом для трагедий и стоило жизни многим выдающимся людям.

Стремление к познанию истины составляет законную гордость человеческого рода, и перед этим стремлением должно отступить на задний план чувство естественной тревоги за возможную потерю уюта привычных представлений.

Мы должны теперь признать, что в жизни Вселенной нельзя игнорировать элемент азартной игры: если бы мы и решились на минуту признать бога или другую направляющую силу, то все же мы были бы обязаны признать, что бог или нечто ему эквивалентное имеет некоторую склонность к азартным играм. Его Величество Случай пользуется явной благосклонностью Закона и подстраивает нам вещи неожиданные или маловероятные. Более того, можно даже указать область явлений, где он особенно чувствует себя привольно: я имею в виду атомную и молекулярную физику.

Великий физик-материалист Больцман первый заметил это важное обстоятельство и выдвинул изумительную гипотезу о том, что вся наблюдаемая нами область Вселенной есть результат огромной флуктуации, какой еще никогда прежде не видел и не мог видеть мир.

Итак, нам нужно привыкнуть к мысли, что мир не устроен очень прямолинейным образом и не так прост, как этого хотелось бы приверженцам различных постулативных систем.

Для того чтобы привыкнуть, лучше всего увидеть недостатки в идеале, которому поклоняешься. Вот с этого мы и начнем.

Принцип детерминизма особенно просто выглядит в классической механике. Классическая механика учит, что по начальным данным можно определить полностью состояние механической системы в любом сколь угодно далеком будущем.

Рассмотрим влияние этих обстоятельств на предсказания, вытекающие из законов классической механики. Однако сначала несколько слов о двух способах описания движения систем в классической механике.

Рассмотрим механическую систему, обладающую  $f$  степенями свободы. Ее состояние характеризуется набором значений координат системы  $q_1, q_2, \dots, q_f$  (кратко будем писать  $q$ ) и набором значений сопряженных им импульсов  $p_1, p_2, \dots, p_f$  (кратко  $p$ ). Множество точек  $p$  образует пространство *конфигураций*  $\mathfrak{R}(q)$ , а множество точек  $p$  — пространство *импульсов*  $\mathfrak{R}(p)$ . Совокупность обоих пространств  $\mathfrak{R}(q) \times \mathfrak{R}(p)$  называют *фазовым* пространством  $\mathfrak{R}(q, p)$ . Можно сказать, что состояние системы в классической механике характеризуется точкой в фазовом пространстве.

Первый способ описания заключается в том, что мы рассматриваем одну систему, которая в момент времени  $t = 0$  находится в зоне фазового пространства  $q = q_0, p = p_0$ , и в дальнейшем вычисляем ее траекторию  $q = Q(t, q_0, p_0)$ ,  $p = P(t, q_0, p_0)$  в фазовом пространстве  $\mathfrak{R}(q, p)$ . Эта траектория вычисляется, как известно, из уравнений Гамильтона, которые описывают движение точки в фазовом пространстве [1, 2]:

$$\dot{q}_s = [H, q_s], \quad \dot{p}_s = [H, p_s], \quad s = 1, 2, \dots, f. \quad (2.1)$$

Здесь  $H = H(q, p, t)$  есть функция Гамильтона, которая равна сумме  $T + U$  кинетической энергии  $T = T(p, q)$  и силовой функции  $U(p, q, t)$ , характеризующей взаимодействие частей системы между собой и с внешним миром. В частном случае, когда  $\partial U / \partial t = 0$ , силовая функция есть потенциальная энергия. Кинетическая энергия  $T(p, q)$  есть квадратичная функция импульсов  $p$ . Далее,  $[A, B]$  есть классическая скобка Пуассона. По определению

$$[A, B] = \sum_{s=1}^f \left( \frac{\partial A}{\partial p_s} \frac{\partial B}{\partial q_s} - \frac{\partial B}{\partial p_s} \frac{\partial A}{\partial q_s} \right), \quad (2.2)$$

так что

$$[H, q_s] = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad [H, p_s] = -\frac{\partial H}{\partial q_s}. \quad (2.3)$$

Система уравнений (2.1) полностью описывает движение изолированной механической системы.

В случае, когда начальные данные системы неопределенны, более удобно другое описание движения.

Представим себе, что мы имеем дело с большим числом одинаковых систем, находящихся, однако, в различных состояниях.

Тогда изображающие их точки рассеются в пространстве фаз, и при некоторых условиях, на которых мы не будем подробнее останавливаться, можно говорить о плотности этих точек  $\rho(q, p, t)$ , так что

$$\rho(q, p, t) \frac{dp dq}{2\pi\hbar}$$

будет числом систем, имеющих координаты и импульсы, лежащие около точки  $(p, q)$  в момент времени  $t$  ( $dp dq = dp_1 dp_2 \dots dp_f dq_1 dq_2 \dots dq_f$  есть элемент

объема в фазовом пространстве, а множитель  $2\pi\hbar$  выбран в качестве единицы фазового объема). В силу сохранения числа систем плотность  $\rho(q, p, t)$  должна подчиняться уравнению непрерывности в пространстве фаз, т. е.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{s=1}^f \left( \frac{\partial \rho}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \rho}{\partial p_s} \dot{p}_s \right) = 0. \quad (2.4)$$

На основании (2.1) и (2.3) это уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + [H, \rho] = 0. \quad (2.5)$$

С другой стороны, полная производная  $\rho$  по времени равна

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + [H, \rho].$$

Поэтому из (2.5) следует теорема Лиувилля,

$$\dot{\rho} = 0, \quad (2.6)$$

показывающая постоянство  $\rho$  вдоль траекторий.

В этом способе описания движения в момент времени  $t = 0$  задаются не начальные данные, а функция  $\rho_0 = \rho(p, q, 0)$ , которая по своему смыслу описывает распределение начальных значений  $p$  и  $q$ , и далее ищется распределение  $p$  и  $q$  для  $t > 0$ . Это эквивалентно рассмотрению движения совокупности большего числа независимых механических систем, отличающихся друг от друга лишь начальными данными.

## А. Влияние начальных данных

Чтобы не затемнять сущность дела сложностью выкладок, ограничимся одной степенью свободы ( $f = 1$ ). Рассмотрим сначала случай свободного движения, когда  $T = p^2/2m$  и  $U = 0$  ( $m$  — масса частицы). В этом случае уравнение (2.5) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial q} \frac{p}{m} = 0. \quad (2.7)$$

Его общее решение есть

$$\rho(q, p, t) = \rho_0 \left( q - \frac{p}{m}t, p \right), \quad (2.8)$$

где  $\rho_0(q, p)$  — начальное распределение  $q$  и  $p$ . Предположим для определенности, что начальное распределение имеет гауссову форму:

$$\rho_0(q, p) = \frac{1}{\pi ab} \exp \left[ -\frac{(p - p_0)^2}{a^2} - \frac{(q - q_0)^2}{b^2} \right]. \quad (2.9)$$

Для этого распределения среднеквадратичные отклонения равны

$$\overline{\Delta p^2} = \overline{(p - \bar{p})^2} = \frac{1}{2}a^2, \quad \overline{\Delta q^2} = \overline{(q - \bar{q}_0)^2} = \frac{1}{2}b^2.$$

На основании (2.8) при  $t > 0$  получаем

$$\rho(q, p, t) = \frac{1}{\pi ab} \exp \left[ -\frac{(p - p_0)^2}{a^2} - \frac{(q - pt/m - q_0)^2}{b^2} \right]. \quad (2.10)$$

Отсюда следует, что распределение по импульсам  $p$  при  $t > 0$  будет иметь вид

$$\rho(p, t) = \int \rho(q, p, t) dq = \frac{1}{\sqrt{\pi} a} \exp \left[ -\frac{(p - p_0)^2}{a^2} \right], \quad (2.11)$$

а распределение по координатам  $q$  при  $t > 0$

$$\rho(q, t) = \int \rho(q, p, t) dp = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{b^2 + a^2 t^2 / m^2}} \exp \left[ -\frac{(q - p_0 t / m - q_0)^2}{b^2 + a^2 t^2 / m^2} \right]. \quad (2.12)$$

Таким образом, распределение по импульсам остается неизменным, а распределение по координатам меняется. При этом среднеквадратичное отклонение  $\overline{\Delta q^2}$  возрастает со временем:

$$\overline{\Delta q^2} = \frac{1}{2} \left( b^2 + \frac{a^2}{m^2} t^2 \right), \quad (2.13)$$

так что при  $t \gg mb/a$  полностью теряет свое значение первоначальная информация о положении частицы; частицы, различавшиеся при  $t = 0$  по их положению в пространстве, перепутываются. В дальнейшем информация о положении частиц в пространстве продолжает ухудшаться.

Этот вывод применим, согласно замечанию Борна [3], и к значительно более широкому классу систем, а именно к системам квазипериодическим.

В случае квазипериодических систем введем так называемые *циклические переменные*  $\varphi_s$  и соответствующие им действия<sup>1</sup>  $I_s$ . Функция Гамильтона в этих переменных есть постоянная, зависящая только от действия ( $I$ ), а уравнения Гамильтона (для одной степени свободы) гласят:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega, \quad \dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0, \quad (2.14)$$

так что

$$\varphi = \omega t + \varphi_0, \quad \omega = \text{const.} \quad (2.15)$$

Координата  $q$  выражается через переменные  $\varphi$  и  $I$  в виде ряда Фурье:

$$q(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\varphi}, \quad (2.16)$$

где амплитуды  $A_n$  — функции  $I$ .

<sup>1</sup> См., например, [1] или [2].



Уравнения (2.15) формально совпадают с уравнениями для свободного движения частицы:

$$q = \frac{p}{m}t + q_0, \quad \dot{q} = \frac{p}{m} = \frac{\partial H}{\partial p} = \text{const.}$$

Поэтому если первоначальное распределение величин  $\omega$  и  $\varphi$  — гауссовское, то выводы, сделанные для свободного движения, полностью переносятся и на квазипериодические движения. Роль импульса (точнее, скорости  $p/m$ ) играет теперь угловая скорость  $\omega$ , роль координаты  $q$  — угол  $\varphi$ . Очевидно, что информация о положении системы будет полностью потеряна, если неопределенность в  $\varphi$  превзойдет  $2\pi$ . Если первоначальная неопределенность в  $\varphi$  определялась величиной  $b$ , а неопределенность в распределении  $\omega$  — величиной  $a$ , то сравнение с (2.13) показывает, что это произойдет при  $t > 2\pi m/a$ .

Кстати сказать, в квантовой механике имеет место совершенно такая же ситуация, с той лишь существенной разницей, что очень узкое распределение по начальным координатам  $q$  неизбежно приведет к особенно быстрому расплыванию первоначального распределения.

Итак, мы видим, что в случае аperiodического движения всегда существует такое время  $t \gg bm/a$ , при котором неопределенность в координате частицы становится больше любой наперед заданной точности информации, определяемой величиной  $b$ , и тем самым разрушает ее.

В случае периодического движения информация о положении частиц полностью разрушается при  $t \gg 2\pi/a$ .

## Б. Случайные силы

Мы рассмотрели влияние некоторой неопределенности в начальных данных на предсказуемость состояния механической системы в будущем. Однако и в процессе самого движения частицы на нее будут действовать силы, которые не могут быть точно предсказаны. В реальных условиях эти силы неизбежны, они могут быть весьма малыми. Это могут быть, например, силы, вызванные толчками, сообщаемыми телу молекулами среды, или ее турбулентностью, или другими неоднородностями среды, носящими случайный характер.

В общем случае невозможно дать теорию таких явлений, хотя они и были предметом многих глубоких исследований математиков. Однако если основное движение подчиняется линейным уравнениям или если случайные силы малы по сравнению с основными, то учесть эффект этих сил не так уж трудно. В дальнейшем мы и рассмотрим подобный случай.

Выпишем уравнение движения в ньютоновской форме:

$$m\ddot{q} = F(q, t). \quad (2.17)$$

Предположим, что сила  $F(q, t)$  может быть разложена на регулярную часть  $F(q)$  и случайную часть  $f(t)$ , зависящую лишь от времени.

Далее разложим соответствующим образом и координату  $q = Q + \Delta q$ , где  $\Delta q$  есть отклонение, вызванное случайной силой  $f$ . Пренебрегая теперь в уравнении (2.17) высшими степенями  $\Delta q$ , получим линейное уравнение для  $\Delta q$ :

$$\Delta \ddot{q} - \frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial q} \Delta q = \frac{1}{m} f(t). \quad (2.18)$$

Это уравнение может быть решено с помощью функции Грина  $\mathfrak{G}(t - t')$ , которая подчиняется уравнению

$$\ddot{\mathfrak{G}}(t - t') - \frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial q} \mathfrak{G}(t - t') = -\delta(t - t') \quad (2.19)$$

и граничному условию

$$\mathfrak{G}(t - t') = 0 \quad \text{для} \quad t - t' < 0.$$

Пользуясь функцией Грина, решение уравнения (2.18) напомним в виде

$$\Delta q = \frac{1}{m} \int_0^t \mathfrak{G}(t - t') f(t') dt'. \quad (2.20)$$

Обозначим среднее значение произведения случайной силы, взятой в два различных момента времени  $t$  и  $t'$ , через

$$a^2 \Delta(t - t') = \overline{f(t)f(t')}, \quad (2.21)$$

где  $a^2$  — размерный коэффициент; введенная величина имеет смысл корреляции  $f(t)$  для двух моментов времени  $t$  и  $t'$ . С помощью (2.20) и (2.21) вычислим среднеквадратичное отклонение  $\overline{\Delta q^2}$ :

$$\overline{\Delta q^2(t)} = \frac{a^2}{m^2} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \mathfrak{G}(t - t') \mathfrak{G}(t - t'') \Delta(t' - t''). \quad (2.22)$$

Предположим, что функция корреляции  $\Delta(t)$  достаточно быстро убывает так, что она практически равна нулю для  $|t| > \tau$ . Если функция Грина изменяется плавно в течение времени  $\tau$ , то можно, интегрируя по  $t''$  и нормируя  $\Delta(t)$  так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta(t' - t'') dt'' = 1,$$

получить

$$\overline{\Delta q^2(t)} = \frac{a^2}{m^2} \int_0^t dt' \mathfrak{G}^2(t - t'). \quad (2.23)$$

Применим эту формулу к линейному уравнению

$$\ddot{q} + \lambda \dot{q} + \omega^2 q = \frac{1}{m} f(t); \quad (2.24)$$

здесь  $\lambda$  — коэффициент трения,  $\omega$  — частота собственных колебаний,  $f(t)$  — случайная сила. Функция Грина для этого уравнения равна [4]:

$$\mathfrak{G}(t) = \frac{\exp[-(\lambda/2)t]}{\sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}} \times \\ \times \left[ \exp\left(t\sqrt{\lambda^2/4 - \omega^2}\right) - \exp\left(-t\sqrt{\lambda^2/4 - \omega^2}\right) \right] \quad \text{для } t > 0, \quad (2.25)$$

$$\mathfrak{G}(t) = 0 \quad \text{для } t < 0. \quad (2.25^*)$$

Рассмотрим теперь два случая.

а) Свободное движение с трением ( $\omega = 0$ ,  $\lambda \neq 0$ ). При  $t \rightarrow \infty$ , пользуясь (2.23) и (2.25), получаем

$$\overline{\Delta q^2(t)} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{a^2}{m^2} \int_0^t [1 - e^{-\lambda(t-t')}]^2 dt' = \frac{a^2}{\lambda^2 m^2} t + \dots \quad (2.26)$$

б) Гармонический осциллятор, также с трением, при  $t \rightarrow \infty$ . Находим из (2.23) и (2.25):

$$\overline{\Delta q^2(t)} = \frac{a^2}{2\lambda m^2 \omega^2} + \dots \quad (2.27)$$

При отсутствии трения для этих же систем получим:

$$\overline{\Delta q^2(t)} = \frac{a^2}{3m^2} t^3 + \dots, \quad (2.26^*)$$

$$\overline{\Delta q^2(t)} = \frac{a^2}{2m^2 \omega^2} t + \dots \quad (2.27^*)$$

Итак, мы видим из приведенных примеров, что случайные силы могут серьезно повлиять на предсказуемость движения в классической механике.

## В. Граничные условия

В механике обычно не принято упоминать о граничных условиях. Иногда говорят об условии изолированности системы. Под этим подразумевается, что на систему не действуют и не будут действовать в течение интересующего нас промежутка времени никакие силы, кроме указанных в уравнении ее движения.

Фактически предполагается, что область пространства, где происходит движение нашей системы, можно окружить поверхностью, через которую не проникают внешние поля и тела. На рис. 1 изображена такая поверхность для случая одномерного движения по оси  $Ox$ . Система изолирована,

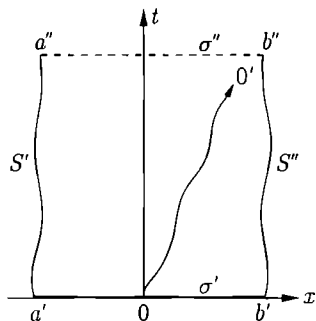


Рис. 1. Начальные данные даются на поверхности  $\sigma'$  (отрезок  $a'b'$ ); граничные — на поверхностях  $S'$  и  $S''$  (отрезки  $a'a''$  и  $b'b''$ ). Линия  $00'$  есть траектория частицы

который по начальным данным намерен предсказать будущее реальной механической системы.

если можно гарантировать, что через поверхности  $S'$  и  $S''$  не будут вторгаться внешние поля или тела. Так, например, планетная система может считаться замкнутой только постольку, поскольку гарантируется, что в течение интересующего нас времени в ее пределах или вблизи нее не появится какое-либо непредусмотренное небесное тело.

Это обстоятельство крайне важно, так как показывает, что детерминистическое предсказание будущего является на самом деле условным: *будущее механической системы может быть предсказано только в том случае, если наперед гарантируется изолированность системы*. Эта гарантия не вытекает, однако, из уравнений движения, а является дополнительным условием, которое наносит серьезный ущерб репутации детерминизма. Грандиозное и мрачное «если» вырастает на пути того пророка,

## Г. Несколько замечаний о поле

Рассмотрим теперь те же проблемы применительно к полю, подчиняющемуся линейному уравнению. Для простоты ограничимся случаем скалярного поля  $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ . Такое поле подчиняется уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi - \kappa^2 \varphi = 0. \quad (2.28)$$

Общее решение этого уравнения может быть выражено через начальные данные  $\varphi(\mathbf{x}, 0)$  и  $\frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, 0)}{\partial t}$  и граничные значения  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial n}$  (здесь  $n$  — нормаль к граничной поверхности), которые задаются для всего будущего времени  $t > 0$  по известной формуле Кирхгофа

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}, t) = \int \left[ g(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}', t')}{\partial n'} - \frac{\partial g(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t')}{\partial n'} \varphi(\mathbf{x}', t') \right] d\sigma' = \\ = \int \mathfrak{G}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') \varphi(\mathbf{x}', t') d\sigma'. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Здесь  $g(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t')$  — функция Грина уравнения (2.28), удовлетворяющая неоднородному уравнению

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - \nabla^2 g - \kappa^2 g = -\delta(t - t')\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'); \quad (2.30)$$

$\mathfrak{G}$  означает оператор  $\mathfrak{G} = g \frac{\partial}{\partial n'} - \frac{\partial g}{\partial n'}$ . Поверхность  $\sigma'$ , по которой идет интегрирование ( $n'$  есть нормаль к этой поверхности), частично состоит из вре-

менных частей  $S'$  и  $S''$  (см. рис. 1) и частично — из пространственной части  $\sigma'$ , на которой задаются начальные данные. Формула (2.29) предсказывает значения внутри объема, ограниченного поверхностями  $\sigma'$ ,  $\sigma''$ ,  $S'$  и  $S''$ .

Из формулы (2.29) непосредственно видно, что поле выражается не только через его начальные данные (на поверхности  $\sigma'$ ), но и через граничные значения (на поверхностях  $S'$  и  $S''$ ), которые мы обязаны задать для всего будущего времени. То «если», о котором мы говорили применительно к механике, в теории поля получает прямое математическое выражение в виде интегралов по временным поверхностям  $S'$  и  $S''$ . Физический смысл этих интегралов очевиден: они описывают влияние полей, приходящих из тех областей пространства, которые не вошли в начальные данные. Если бы мы отказались от учета начальных граничных данных, то мы расплатились бы за это тем, что область пространства, в которой мы предсказывали состояние поля, сокращалась бы со временем, как это показано на рис. 2. Непредвиденные сигналы врываются в рассматриваемую нами область пространства со скоростью света, и с такой же скоростью сокращается эта область; по прошествии времени  $t = R/c$  вся область уже будет заполнена волнами, которые не предусматривались нашими расчетами; сила нашего предсказания была бы к этому времени полностью утрачена.

Линейный характер поля позволяет сразу написать выражение для квадратичных корреляций поля в двух точках,  $\varphi(\mathbf{x}', t')$  и  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ , если начальные данные и граничные значения флуктуируют. Как следует из (2.29):

$$\overline{\varphi(\mathbf{x}', t')\varphi(\mathbf{x}, t)} = \int \mathfrak{G}(\mathcal{P}, \mathcal{P}'')\mathfrak{G}(\mathcal{P}', \mathcal{P}''')D(\mathcal{P}'' - \mathcal{P}''')d\sigma''d\sigma''', \quad (2.31)$$

где

$$D(\mathcal{P}'' - \mathcal{P}''') = \overline{\delta\varphi(\mathcal{P}'')\delta\varphi(\mathcal{P}''')} \quad (2.32)$$

есть корреляция флуктуаций  $\delta\varphi(\mathcal{P}'')$  и  $\delta\varphi(\mathcal{P}''')$  поля в точках  $\mathcal{P}''(\mathbf{x}'', t'')$  и  $\mathcal{P}'''(\mathbf{x}', t''')$ , лежащих на границе области интегрирования (на поверхностях  $S'$ ,  $S''$ ,  $\sigma'$ ). Не будем вычислять это выражение для конкретных случаев, ибо оно аналогично выражению (2.22) в случае механики.

Рассмотрим специальный случай, когда флуктуации имеют место только в начальных данных. Тогда можно предложить более прямой путь для вычисления квадратичных флуктуаций поля. Именно, разложим поле  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  в ряд по собственным колебаниям  $\varphi_k(\mathbf{x})$ :

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \sum_k q_k(t)\psi_k(\mathbf{x}). \quad (2.33)$$

Амплитуды парциальных колебаний  $q_k(t)$  будут удовлетворять гармоническим уравнениям:

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = 0, \quad (2.34)$$

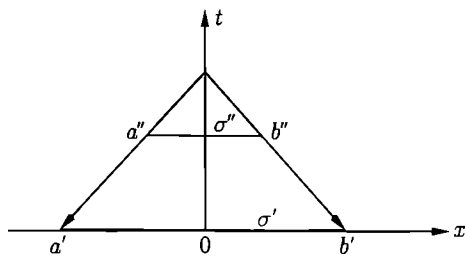


Рис. 2. Если даны только начальные данные на  $\sigma'(a'b')$  и не известны граничные данные, то область  $\sigma''$ , в которой известно поле  $\varphi$ , сокращается со скоростью света  $c$ , и при  $t = a'b'/c$   $\sigma'' = 0$ !

где  $\omega_k$  — частота  $k$ -го колебания,  $q_k = a_k e^{i\omega_k t}$ . Напишем теперь среднее значение для произведения полей в точках  $\mathcal{P}(\mathbf{x}, t)$  и  $\mathcal{P}(\mathbf{x}', t')$ :

$$D(\mathcal{P} - \mathcal{P}') = \overline{\varphi(\mathbf{x}, t)\varphi(\mathbf{x}', t')} = \sum_k \sum_{k'} \psi_{k'}^*(\mathbf{x}') \psi_k(\mathbf{x}) \overline{a_{k'}^* a_k} e^{-i\omega_{k'} t' - i\omega_k t}. \quad (2.35)$$

Если отдельные колебания статистически независимы, то

$$\overline{a_{k'}^* a_k} = \alpha(k) \delta(k - k'), \quad (2.36)$$

и выражение (2.35) принимает форму

$$D(\mathcal{P} - \mathcal{P}') = \sum_k \psi_k^*(\mathbf{x}') \psi_k(\mathbf{x}) \alpha(k) e^{i\omega_k(t-t')}. \quad (2.37)$$

Наконец, при постоянстве  $\alpha(k)$  (среднее значение  $a_{k'}^* a_k$  для всех  $k$  одинаково) вместо (2.37) получаем:

$$D(\mathcal{P} - \mathcal{P}') = \alpha \sum_k \psi_k^*(\mathbf{x}') \psi_k(\mathbf{x}) e^{i\omega_k(t-t')}. \quad (2.37^*)$$

Это выражение совпадает с функцией Грина для уравнения (2.28), и при  $t = t'$  находим

$$D(\mathcal{P} - \mathcal{P}') = \alpha \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}). \quad (2.38)$$

Вычисленное по формуле (2.37) среднеквадратичное отклонение не нарастает со временем. Это есть особенность линейных систем.

Рассмотрение нелинейных систем представляет значительные трудности. Однако можно получить некоторое представление о поведении нелинейного поля, если иметь в виду, что нелинейное поле можно рассматривать как совокупность связанных между собой осцилляторов, число которых бесконечно велико. Система из большого, но конечного числа связанных осцилляторов является квазипериодической системой, и поэтому, если начальные данные такой системы не вполне определены, то среднеквадратичные отклонения будут возрастать со временем. Если это заключение можно перенести на бесконечное число осцилляторов, то следует ожидать, что для нелинейного поля квадратичные флуктуации будут нарастать со временем.

## Д. Резюме

Мы видели, что основное предположение классической механики — возможность однозначного определения будущего состояния системы по ее начальным данным — основано на абстракции, исключающей случайность. Влияние этой случайности в общем случае не может быть игнорировано, так как с течением времени неопределенность в начальных данных возрастает и предсказание по прошествии некоторого конечного времени становится совершенно бессодержательным.

Практически хорошо известно, что даже в такой точной науке, как небесная механика, необходимо время от времени подправлять исходные данные, чтобы устранить накопившуюся ошибку.

Машины и станки также не могут работать долгое время без того, чтобы рука механика не вмешивалась для устранения погрешности, накапливающейся при работе станка.

Поклонники безукоснительного детерминизма делают ошибку, избирая образцом классическую механику: движение, предсказываемое классической механикой, оказывается неустойчивым относительно малых случайных отклонений начальных данных или же в результате действия случайных сил. Как бы ни были малы эти воздействия, всегда можно найти такое время, при котором их эффект оказывается превалирующим. Эта нестабильность движения относительно малых случайностей полностью разрушает иллюзию о возможности однозначного предсказания будущего по начальным данным без того, чтобы в дальнейшем не вносить корректив «по ходу дела».

Произведем теперь измерение каких-либо динамических переменных, например, импульсов  $p$  и координат  $q$ , на большом числе экземпляров систем, составляющих наш ансамбль. Гиббс утверждает, что существует вполне определенная вероятность для того или иного результата опыта, именно имеет место так называемое каноническое распределение:

$$W_{\theta}(p, q)dp dq = \exp \left\{ \frac{1}{\theta} (\psi(\theta) - E(p, q)) \right\} dp dq; \quad (3.1)$$

здесь  $W_{\theta}(p, q)dp dq$  есть вероятность найти импульс системы  $p$ , лежащим в интервале  $p, p + dp$ , и координату  $q$  — в интервале  $q, q + dq$  (простоты ради мы явно выписываем все формулы для одной степени свободы);  $\theta$  есть температура термостата,  $E(p, q)$  — энергия системы,  $\exp[\psi(\theta)/\theta]$  — нормировочный множитель.

Существование этого распределения является постулатом. По этому поводу Гиббс писал, что распределение, задаваемое выражением (3.1), «по-видимому, является наиболее простым мыслимым случаем, так как оно обладает тем свойством, что, когда система состоит из частей с отдельными энергиями, закон распределения по фазам для отдельных частей обладает одинаковой природой — свойство, которое чрезвычайно упрощает исследование и которое является основанием для весьма важных отношений к термодинамике» [1].

Эту мысль Гиббса можно пояснить следующим рассуждением [2]. Согласно теореме Лиувилля плотность точек в фазовом пространстве  $\rho(p, q)$  постоянна вдоль траекторий<sup>1</sup>. Это означает, что она должна быть функцией только интегралов движения. Представим себе, что нашу систему можно разбить на две слабо взаимодействующие части  $A$  и  $B$ . Тогда плотность  $\rho$  будет произведением плотностей подсистем  $A$  и  $B$ :

$$\rho_{A+B} = \rho_A \rho_B. \quad (3.2)$$

Отсюда следует, что  $\rho$  может быть функцией только аддитивных интегралов движения. Если исключить из рассмотрения макроскопические движения всей системы (например, вращение, поступательное движение), то таким аддитивным интегралом движения будет только энергия системы  $E_{A+B} = E_A + E_B$ .

Решение функционального соотношения (3.2) теперь гласит:

$$\rho = e^{\alpha + \beta E}. \quad (3.3)$$

Имея в виду, что число систем, имеющих бесконечно большую энергию, должно быть мало, мы заключаем, что  $\beta < 0$ . Обозначим  $\beta = -1/\theta$  и заметим, что  $\alpha$  определяется из условия нормировки:

$$\int \rho(p, q) \frac{dp dq}{2\pi\hbar} = 1. \quad (3.4)$$

<sup>1</sup> По своему смыслу  $\rho(p, q) = W(p, q)$ . — Прим. ред.



Отсюда  $\alpha = \psi(\theta)/\theta$ . Предположим теперь, что одна из систем очень велика, так что ее можно рассматривать как термостат Гиббса. Тогда сравнение с (3.1) показывает, что  $\theta$  есть температура, характеризующая ансамбль, находящийся в равновесии.

Иногда стремятся обосновать распределение Гиббса, рассматривая так называемые микроканонические ансамбли и вводя при этом новые постулаты. Мы не будем удаляться в дебри аксиоматики и ограничимся первоначальной постановкой вопроса, исходящей от Гиббса, поскольку для наших целей ее вполне достаточно<sup>1</sup>. Мы хотим теперь обратить внимание на исключительно интересную особенность вероятности  $W_\theta(p, q)$ , заключающуюся в том, что она связывает параметры *макроскопической* обстановки  $M$  (температуру термостата  $\theta$ ) с параметрами *микросистемы*  $\mu^2$  (с ее импульсами  $p$  и координатами  $q$ ). Таким образом, мы можем сказать, что *вероятность  $W_\theta(p, q)$  относится к микросистеме, находящейся в определенной макроскопической обстановке*. Ансамбль Гиббса представляет собой воспроизведение большого числа таких ситуаций и во многих случаях может быть осуществлен практически с большой степенью точности.

В связи с дальнейшим мы хотели бы отметить, что вопрос о том, относится ли вероятность  $W_\theta(p, q)$  к одной частице или она является характеристикой многих частиц (вопрос, который задают из соображений главным образом сектантских: «какo верующий?»), не имеет большого значения. Суть дела заключается в том, что какой бы результат наблюдения ни осуществился, в одном-единственном измерении он меняет лишь наше субъективное отношение к обнаруженному факту: если произошло типичное явление, то разумно будет сказать, что «так и ожидалось», а если произошло редкое событие, то мы можем лишь выразить свое удивление или радость, как при хорошем выигрыше в лотерею. Все это относится к субъективным оценкам.

Объективное значение имеет лишь распределение результатов измерения, возникающее при проведении большого числа измерений в ансамбле, и это-то распределение и предсказывается вероятностью  $W_\theta(p, q)$ . Существование этой вероятности есть один из замечательных и фундаментальных законов молекулярной статистической физики.

Здесь будет еще раз уместно поблагодарить игру случая, который, как бы в противоречие со своей собственной природой, порождает такие простые законы, как закон канонического распределения Гиббса.

---

<sup>1</sup> В статистической термодинамике доказывается, что достаточно постулировать одно из распределений (или микроканоническое, или каноническое, или большое каноническое), после чего все оставшиеся распределения выводятся из постулированного. — *Прим. ред.*

<sup>2</sup> В статистической термодинамике микросистема  $\mu$  может иметь и макроскопические характеристики, например, воздух в объеме комнаты и т. д. — *Прим. ред.*

абсолютного нуля. Эта симфония и есть квантовая механика. Квантовая механика изучает законы движения микрочастиц в квантовом ансамбле.

Важнейшая закономерность, характерная для квантового ансамбля, заключается в том, что среднеквадратичное отклонение для координаты  $x$ :  $\overline{\Delta x^2} = \overline{(x - \bar{x})^2}$  (здесь черта означает среднее по ансамблю; в частности,  $\bar{x}$  есть среднее значение какой-либо координаты  $x$  частицы или микросистемы) и среднеквадратичное отклонение сопряженного этой координате импульса  $p$ :  $\overline{\Delta p^2} = \overline{(p - \bar{p})^2}$  (здесь  $\bar{p}$  — среднее значение импульса) — связаны знаменитым соотношением Гейзенберга:

$$\overline{\Delta p^2} \overline{\Delta x^2} \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad (4.1)$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка [2, 3].

До сих пор наши рассуждения были наводящими. Обратимся теперь к более строгому определению понятия квантового ансамбля. Рассмотрим некоторую совокупность макроскопических тел, которую в дальнейшем будем называть *макрообстановкой*  $M$ . Эта макрообстановка тем или иным образом определяет состояние движения микросистемы  $\mu$  (иногда попросту говорят «состояние», опуская слово «движение»). Теперь представим себе, что такая макрообстановка  $M$  вместе с микросистемой  $\mu$  повторяется бесконечное число раз, совершенно так же, как повторяются термостат и микросистемы в ансамбле Гиббса.

Если в этой совокупности систем

$$\overline{\Delta p^2} \overline{\Delta x^2} \approx \frac{\hbar^2}{4}, \quad (4.2)$$

то такой ансамбль мы будем называть *квантовым ансамблем* [2–4].

На рис. 4 квантовый ансамбль проиллюстрирован уходящей вдаль последовательностью повторяющих друг друга совокупностей макроскопических тел  $M$  и микросистем  $\mu$ .

Заметим, что макрообстановка образуется не только макроскопическими телами, но и макроскопическими полями и включает также условия генерации частиц (источники частиц).

Более точное определение квантового ансамбля не содержит предположения об абсолютном нуле температуры, которым ранее мы хотели подчеркнуть, что статистика квантовых явлений не связана с тепловым движением атомов или молекул. В действительности квантовые явления обнаруживаются также и в том случае, когда температура тел больше нуля. В этом случае речь пойдет о *квантовой статистике*, которая исправляет распределение Гиббса при низких температурах. Точнее, можно сказать, что если при соблюдении условия (4.2) кинетическая энергия частиц  $T(p) = p^2/2m \gg \theta$  ( $m$  — масса частицы), то мы будем иметь дело с *квантовой механикой*, а если  $T(p) \approx \theta$ , то с *квантовой статистикой*.

Однако можно ли описать квантовый ансамбль с помощью вероятности вроде той, которая составляет основной закон ансамбля Гиббса? Априори,

Мы сформулируем этот принцип в следующей форме: *динамические переменные микросистемы могут быть разделены на две взаимно дополнительные группы: пространственно-временные и импульсно-энергетические. Не существует ансамблей, в которых обе группы динамических переменных имели бы определенные значения.* Этот принцип является прямым обобщением соотношения Гейзенберга.

Бор сформулировал этот принцип в несколько иной форме, в которой отразились его философские позиции, далекие от материализма. Его формулировка послужила истоком для далеко идущих выводов о том, что современная механика атома несовместима с материализмом. Мы не будем сейчас касаться сколько-нибудь подробнее этой стороны дела. Этому посвящена обширная литература, представляющая различные точки зрения [5–7].

Кажется, что вообще было бы разумнее говорить не о принципе дополненности, а о принципе «*исключительности*»: динамические переменные следовало бы разбить на группы взаимно исключающих переменных, не осуществляющихся одновременно в реальных ансамблях. Но из уважения к великому Бору и к установленной им традиции мы сохраним обычную терминологию.

Принцип дополненности исключает возможность описывать микросистемы с помощью фазового пространства  $\mathfrak{R}(p, q)$ , так как оно содержит дополнительные переменные  $p$  и  $q$ . Однако этот принцип, как следует из его содержания, не запрещает пользоваться пространством конфигураций  $\mathfrak{R}(q)$  или импульсным пространством  $\mathfrak{R}(p)$ , каждое из которых содержит переменные только пространственные  $q$  или только импульсные  $p$ . Если система имеет  $f$  степеней свободы, то в отличие от классической механики она описывается  $f$  переменными или в пространстве конфигураций  $\mathfrak{R}(q)$ , или в пространстве импульсов  $\mathfrak{R}(p)$ . Переменные  $q$  или  $p$  образуют так называемый полный набор переменных.

Точнее, мы определим полный набор динамических переменных, достаточный для исчерпывающего описания квантовой системы с  $f$  степенями свободы, как совокупность  $f$  одновременно измеримых и независимых переменных  $q_1, q_2, \dots, q_f$  — пространственный набор  $q$  или альтернативный, импульсный набор  $p$ :  $p_1, p_2, \dots, p_f$ . Такой набор динамических переменных, как следует из его смысла, содержит максимальную информацию о системе, совместимую с законами, господствующими в микромире.

Соответственно этому в квантовом ансамбле существует вероятность

$$W_M(q)dq \quad (4.3)$$

найти при измерении определенное значение этого набора величин  $q$ . Индекс  $M$ , которым мы снабдили эту вероятность, имеет тот же смысл, что и индекс  $\theta$  температуры у вероятности (3.1) в классическом ансамбле Гиббса; он указывает ту макроскопическую обстановку  $M$ , которая диктует условия движения для микросистемы  $\mu$ , и тем самым определяет ее состояние.

Мы вправе также поставить вопрос о вероятности того, что микросистема, принадлежащая тому же ансамблю, будет иметь то или иное значение

дополнительного набора  $p$ . Эта вероятность может быть написана в виде

$$W_M(p)dp. \quad (4.4)$$

Вероятностей типа (4.3) или (4.4) должно существовать не мало, а в принципе — неограниченно много, столько, сколько возможно различных полных наборов  $q$  или сопряженных им наборов  $p$ .

Заметим, что практически для каждой реальной системы число наборов ограничено тем, что большинство из них попросту не очень удобны для описания системы. Однако это уже чисто практический вопрос. Итак, вероятностей типа (4.3) и (4.4) может быть неограниченно много. Их совокупность полностью характеризует состояние микросистемы в квантовом ансамбле, так как эта совокупность по самому своему смыслу исчерпывает все предсказания результатов всех возможных измерений над микросистемой, принадлежащей данному ансамблю  $(M + \mu)$ .

Но как перечислить всю эту совокупность вероятностей, включая и неудобные для практических целей? Если бы мы нашли такую возможность, мы нашли бы способ описать состояние микросистемы в квантовом ансамбле!

Квантовая механика дает на этот вопрос совершенно неожиданный (с точки зрения классической теории) ответ: существует величина, характерная для данного ансамбля  $(M + \mu)$ , которая полностью характеризует квантовый ансамбль в том смысле, что, зная ее, можно вычислить все возможные вероятности типа  $W_M(q)$  или  $W_M(p)$ . Эта величина есть *волновая функция*

$$\psi_M = \psi_M(q). \quad (4.5)$$

В формуле (4.5) волновая функция  $\psi_M$  записана явно в виде функции координат  $q$ . В этом случае связь между волновой функцией и плотностью вероятности дается формулой

$$W_M(q) = |\psi_M(q)|^2. \quad (4.6)$$

Эта формула является совершенно общей в том смысле, что если волновая функция  $\psi_M$  дана как функция любого другого полного набора переменных, например,  $\psi_M(p)$ , то плотность вероятности найти набор переменных  $p$  равным  $p$  будет

$$W_M(p) = |\psi_M(p)|^2. \quad (4.6^*)$$

Вообще, для полного набора переменных  $a$  будем иметь

$$W_M(a) = |\psi_M(a)|^2, \quad (4.7)$$

для набора  $b$

$$W_M(b) = |\psi_M(b)|^2 \quad (4.7^*)$$

и т.д. Все эти функции:  $\psi_M(q)$ ,  $\psi_M(p)$ ,  $\psi_M(a)$ ,  $\psi_M(b)$ , ... — описывают один и тот же квантовый ансамбль, характеризуемый макрообстановкой  $M$  и микросистемой  $\mu$ .

Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, относительно таких волновых функций говорят, что волновая функция дана в  $q$ -представлении, или в  $p$ -представлении, или в  $a$ -представлении и т. д.

Математически эквивалентность волновых функций, данных в различных представлениях для описания квантового ансамбля, выражается в том, что волновую функцию  $\psi_M$  можно рассматривать как вектор в гильбертовом пространстве, а различные представления — как представление вектора в различных системах ортов, т. е. ортогональных единичных векторов в этом пространстве, линейная комбинация которых позволяет представить любой другой вектор [2].

В таком понимании переход от одного представления волновой функции к другому есть вращение в гильбертовом пространстве. Это вращение осуществляется посредством унитарной матрицы  $S$ , так что

$$\psi_M(b) = S\psi_M(a), \quad (4.8)$$

причем

$$SS^+ = 1, \quad (4.9)$$

где  $S^+$  — матрица, сопряженная с  $S$ . В раскрытом виде соотношения (4.8) или (4.9) гласят:

$$\psi_M(b) = \int S(b|a)\psi_M(a) da, \quad (4.8^*)$$

$$\int S(b|c)S^+(c|a) dc = \delta(b - a), \quad (4.9^*)$$

где интегралы в (4.8\*) и (4.9\*) понимаются в обобщенном смысле, так что пригодны для случаев, когда спектр возможных значений величин  $a$  и  $b$  может иметь разрывы или даже состоять из отдельных точек (дискретный спектр); в этом случае интеграл приводится к сумме. Сами матрицы  $S$  определяются из линейных уравнений<sup>1</sup>.

Преобразование (4.8) позволяет рассматривать волновую функцию как объективную характеристику квантового ансамбля, которая, однако, может быть дана в различных представлениях. Именно это важное обстоятельство и лежит в основе концепции *квантовых ансамблей*: в этой концепции волновая функция  $\psi_M$  рассматривается как величина, заменяющая в квантовой теории классическую вероятность  $W_\theta(p, q)$  того или иного состояния системы в фазовом пространстве  $\mathfrak{R}(p, q)$ . Подобно тому, как знание вероятности  $W_\theta(p, q)$  позволяет определить вероятность любого другого набора динамических переменных в фазовом пространстве  $(P, Q)$ , знание волновой функции  $\psi_M$  в случае квантового ансамбля позволяет определить вероятности для любого полного набора динамических переменных  $a$ . Следовательно, *волновая функция не есть величина, определяющая статистику какого-либо специального измерения; она является величиной, определяющей статистику квантового ансамбля, т. е. статистику любого измерения, совместимого с природой микросистемы  $\mu$  и той макроскопической обстановки  $M$ , которая диктует условия движения для микросистемы  $\mu$ .*

<sup>1</sup> См. курсы квантовой механики, например, [4].

Такое описание с помощью двух рядов величин  $P_{M_s}$  и волновых функций  $\psi_{M_s}$ , конечно, очень неудобно и на первый взгляд уводит нас очень далеко от аналогии с классическим ансамблем Гиббса. Однако эта аналогия восстанавливается, если ввести вместо волновой функции для описания смешанного квантового ансамбля квадратичную форму от волновой функции, а именно так называемую *матрицу плотности*:

$$\rho_M(q, q') = \sum_{M_s} P_{M_s} \psi_{M_s}^*(q') \psi_{M_s}(q); \quad (5.3)$$

здесь  $q$  и  $q'$  означают две различные точки в пространстве какого-либо полного набора динамических переменных (конфигурационных или импульсных). Точки  $q$  отмечают строки матрицы, а точки  $q'$  — ее колонки. Диагональный элемент этой матрицы ( $q' = q$ ) дает вероятность найти в смешанном ансамбле значение динамических переменных, равное  $q$ . Действительно, в этом случае мы получаем обычную формулу сложения вероятностей для независимых событий:

$$W_M(q) = \rho_M(q, q) = \sum_{M_s} P_{M_s} |\psi_{M_s}(q)|^2. \quad (5.4)$$

В частном случае  $P_{M_s} = 1$ , остальные  $P_{M_s} = 0$ , и мы возвращаемся к исходной формуле для чистого ансамбля:

$$W_M(q) = |\psi_M(q)|^2. \quad (5.4^*)$$

Матричные элементы матрицы плотности удовлетворяют определенным условиям симметрии. Волновая функция  $\psi_M(q)$  и сопряженная ей функция  $\psi_M^*(q)$  описывают одно и то же состояние. Из формулы (5.3) следует, что матрица  $\rho(q, q')$  является эрмитовой матрицей:

$$\rho_M(q', q) = \rho_M^*(q, q') = \rho_M^\dagger(q', q). \quad (5.5)$$

Далее, если наша микросистема состоит из тождественных частиц (или частью содержит тождественные частицы), то волновая функция  $\psi_M(q)$  при перестановке пары тождественных частиц,  $i$ -й и  $k$ -й, или остается неизменной (если частицы подчиняются статистике Бозе), или меняет свой знак на противоположный (в случае статистики Ферми).

Если обозначить оператор перестановки динамических переменных  $q_i$  и  $q_k$  пары  $i$ -й и  $k$ -й частиц через  $\mathcal{P}_q$ , то для волновых функций имеем:

$$\mathcal{P}_q \psi_M(q) = \pm \psi_M(q). \quad (5.6)$$

Отсюда следует для матрицы плотности:

$$\mathcal{P}_q \rho_M(q', q) = \pm \rho_M(q', q), \quad (5.7)$$

$$\mathcal{P}_{q'} \rho_M(q', q) = \pm \rho_M(q', q), \quad (5.8)$$

$$\mathcal{P}_{qq'} \rho_M(q', q) = \rho_M(q', q). \quad (5.8^*)$$

Последнее соотношение показывает, что матрица плотности симметрична при перестановке частиц (оператор  $\mathcal{P}_{qq'} = \mathcal{P}_q \mathcal{P}_{q'}$ ).

Если некоторая функция динамических переменных изображается оператором  $\mathcal{L}$  (пусть его матричные элементы в  $q$ -представлении будут  $L(q', q)$ ), то, как известно из квантовой механики, среднее значение физической величины  $L$ , изображаемой оператором  $\mathcal{L}$ , будет

$$\bar{L} = \int \psi_M^*(q') L(q', q) \psi_M(q) dq' dq. \quad (5.9)$$

Отсюда и из формулы (5.3) видно, что среднее значение этой величины в смешанном ансамбле, описываемом матрицей  $\rho_M(q', q)$ , будет

$$\bar{L} = \int \rho_M(q, q') L(q', q) dq' dq = \text{Sp}(\rho_M \mathcal{L}), \quad (5.10)$$

где знак  $\text{Sp}$  означает след матрицы ( $\rho_M \mathcal{L}$ ).

Матрица плотности может быть дана и в смешанном представлении, когда ее строки отмечаются значениями одних динамических переменных  $q$ , а столбцы — значениями других переменных, например,  $p$ . Именно:

$$\rho_M(q, p) = \sum_{M_s} P_{M_s} \psi_{M_s}^*(q) \psi_{M_s}(p), \quad (5.11)$$

причем, согласно общим правилам преобразования волновой функции от одних переменных к другим, имеем:

$$\psi_{M_s}(p) = \int S(p, q) \psi_{M_s}(q) dq, \quad (5.12)$$

где  $S$  — матрица унитарного преобразования от переменных  $q$  к переменным  $p$ .

Если под переменными  $q$  понимать координаты, а под переменными  $p$  — сопряженные им импульсы, то матрица становится прямым аналогом классической плотности в пространстве фаз  $[W(q, p)]$ .

Однако более прямая связь существует между классической плотностью в пространстве фаз и величиной [1]:

$$R_M(q, p) = \rho_M(q, p) S^{-1}(q, p), \quad (5.13)$$

где  $S^{-1}(q, p)$  есть матричный элемент матрицы, обратной матрице  $S(p, q)$ . В случае, когда координаты  $q$  и импульсы  $p$  являются декартовыми, матрица  $S$  имеет элементы

$$S(q, p) = \frac{\exp(ipq/\hbar)}{\sqrt{2\pi\hbar}}, \quad (5.14)$$

и все соотношения становятся особенно простыми. Из (5.11), (5.13) и (5.14) нетрудно вывести, что

$$R_M(q) = \int R_M(q, p) \frac{dp}{2\pi\hbar} \quad (5.15)$$

есть вероятность найти в ансамбле значение координат, равное  $q$ , а величина

$$R_M(p) = \int R_M(q, p) \frac{dq}{2\pi\hbar} \quad (5.16)$$

есть вероятность найти в этом же ансамбле значение импульсов, равное  $p$ . Формулы (5.15) и (5.16) в точности совпадают с формулами классической теории, если  $R_M(q, p)$  рассматривать как плотность в пространстве фаз  $\mathcal{R}_M(q, p)$ . Наконец, имеет место формула для среднего значения физической величины  $\bar{L}$ , изображаемой оператором  $\mathcal{L}$  с матричными элементами  $L(q, p)$  в  $q, p$ -представлении:

$$\bar{L} = \int R_M^*(q, p) L(q, p) \frac{dq dp}{2\pi\hbar}, \quad (5.17)$$

где  $R_M^*(q, p)$  есть матрица, комплексно-сопряженная матрице  $R_M(q, p)$ , а величина  $L(q, p)$  равна

$$L(q, p) = \int L(q, q') S(q', p) dq' \cdot S^{-1}(q, p). \quad (5.18)$$

Аналогия между формулами (5.15)–(5.17) и соответствующими формулами классической, статистической механики настолько полна, что возникает большой соблазн положить в основу описания квантового ансамбля не волновую функцию, а матрицу плотности  $R(q, p)$ . Однако такая тенденция не оправдывается при более глубоком рассмотрении. К этому вопросу мы вернемся позднее. Сейчас лишь отметим, что простые условия для волновой функции и матрицы при перестановке аргументов — динамических переменных тождественных частиц и условия эрмитовости операторов, изображающих физические величины, на языке матрицы  $R(q, p)$  выглядят довольно громоздко. Именно, нетрудно показать [1], что условие (5.5) приводит к интегральному соотношению:

$$R^*(q, p) = \int R(q + \xi, p + \eta) \exp\left(i \frac{\xi\eta}{\hbar}\right) \frac{d\xi d\eta}{2\pi}, \quad (5.19)$$

а условия симметрии при перестановках тождественных частиц (5.8) и (5.8\*) выражаются соотношениями:

$$\mathcal{P}_q R(q, p) = \pm R(q, p) \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(p_i - p_k)(q_i - q_k)\right], \quad (5.20)$$

$$\mathcal{P}_p R(q, p) = \pm R(q, p) \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(p_i - p_k)(q_i - q_k)\right], \quad (5.20^*)$$

$$\mathcal{P}_{pq} R(q, p) = R(q, p) \quad (\mathcal{P}_{pq} = \mathcal{P}_p \mathcal{P}_q), \quad (5.20^{**})$$

где  $q_i, q_k$  — координаты, а  $p_i, p_k$  — импульсы переставляемых частиц ( $i$ -й и  $k$ -й),  $\mathcal{P}_q$  — оператор перестановки координат, а  $\mathcal{P}_p$  — оператор перестановки импульсов.



Все эти соотношения легко удовлетворяются, если величину  $R(q, p)$  рассматривать как билинейную форму от волновой функции, данной в смешанном  $q, p$ -представлении.

Практическое значение матрицы плотности  $R(q, p)$  заключается в том, что если рассматриваемый квантовый ансамбль мало отличается от классического, то матрицу  $R(q, p)$  можно разложить по степеням постоянной Планка  $\hbar$ :

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n R_n. \quad (5.21)$$

Условие эрмитовости (5.19) тоже может быть представлено в виде ряда по степеням  $\hbar$ ; для этого следует разложить  $R(q + \xi, p + \eta)$  по степеням  $\xi$  и  $\eta$  и воспользоваться равенством

$$I_{nm} = \iint \xi^n \eta^m \exp\left(\pm i \frac{\xi \eta}{\hbar}\right) \frac{d\xi d\eta}{2\pi\hbar} = (\pm i\hbar)^{n+m} m! \delta_{nm}. \quad (5.22)$$

Тогда из (5.19) получаем:

$$R^*(q, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\hbar)^n}{n!} \frac{\partial^{2n} R(q, p)}{\partial q^n \partial p^n} \quad (5.23)$$

и, подставляя сюда ряд (5.21), находим:

$$\begin{aligned} R_0 &= R_0^*, & R_1^* &= R_1 + \frac{i}{1!} \frac{\partial^2 R_0}{\partial q \partial p}, \\ R_2^* &= R_2 + \frac{i}{1!} \frac{\partial^2 R_1}{\partial q \partial p} - \frac{1}{2!} \frac{\partial^4 R_0}{\partial q^2 \partial p^2}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Из этих соотношений видно, что матрица  $R(q, p)$  может быть действительной только в пределе классического ансамбля, т.е. при  $\hbar \rightarrow 0$ . При  $\hbar \neq 0$  матрица плотности  $R(q, p)$  обязательно имеет мнимую часть, не равную нулю. Поэтому при  $\hbar \neq 0$  матрица  $R(q, p)$  не является плотностью вероятности в пространстве фаз  $\mathfrak{R}(q, p)$ , как это и должно быть в силу соотношения Гейзенберга, запрещающего ансамбли с точно заданными значениями координат  $q$  и импульсов  $p$ .

Особая ситуация возникает в случае ансамбля, содержащего тождественные частицы. Действительно, условия симметрии (5.20) и (5.20\*) содержат постоянную Планка таким образом, что при  $\hbar \rightarrow 0$  возникает существенно особая точка. Поэтому разложение  $R$  в ряд по степеням  $\hbar$  невозможно. Выход из этого затруднения заключается в замене матрицы  $R$  на матрицу, усредненную по фазовому объему [2, 3]:

$$\tilde{R} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} R dp dq, \quad (5.25)$$

где  $\Omega$  есть объем области,

$$P - \Delta < p < P + \Delta, \quad Q - \delta < q < Q + \delta, \quad \Delta \cdot \delta = \Omega, \quad (5.25^*)$$

по которой производится усреднение. Значение этого усреднения заключается в следующем: из соотношений (5.20) и (5.20\*) следует, что в случае статистики Ферми матрица  $R$  обращается в нуль на всех гиперплоскостях в пространстве фаз, где  $p_i = p_k$  или  $q_i = q_k$  (если не учитывать сейчас усложнений, связанных со спином); в случае статистики Бозе матрица имеет экстремум по относительным переменным  $p_i - p_k$ , или  $q_i - q_k$  на поверхностях  $p_i = p_k$ ,  $q_i = q_k$  (матрица  $\rho$ , которую можно рассматривать как амплитуду матрицы  $R$ , имеет, согласно (5.13), экстремумы на поверхностях  $p_i = p_k$  и  $q_i = q_k$  порознь).

Обращение в нуль или достижение экстремума происходит примерно на расстоянии порядка длины волны частиц  $\lambda \sim \hbar/p$ . Роль этих областей, где происходит обращение в нуль или достигается экстремум, будет несущественна, если вероятность найти две частицы на расстоянии, сравнимом с длиной волны, будет мала. Если плотность частиц в единице объема есть  $n$ , то эта вероятность определяется величиной  $\lambda^3 n$ .

При условии  $\lambda^3 n \ll 1$  можно выбрать такой объем  $\Omega$ , что вклад от аномальных областей ( $q_i \approx q_k$ ,  $p_i \approx p_k$ ) во все фазовое пространство будет мал.

Условие  $\lambda^3 n \ll 1$  можно переписать в виде  $p^3 n \gg \hbar^3$ , и тогда оно означает, что фазовый объем, приходящийся на одну частицу, должен быть велик по сравнению с  $\hbar^3$ . При этом условии можно выбрать такой объем  $\Omega$  для усреднения  $R$ , что  $\Omega \gg \hbar^3$  и  $\Omega \ll p^3/n$ . Усредненная таким образом матрица плотности  $\tilde{R}$  (5.25) не будет уже иметь существенных особенностей по  $\hbar$  (см. [2, 3]).

где  $\mathcal{L}$  — некоторый линейный оператор. Если обозначить волновую функцию в момент времени  $t + dt$  через  $\psi' = \psi + d\psi$ , то предыдущее соотношение можно записать в виде:

$$\psi' = S(dt)\psi,$$

где  $S(dt)$  означает некоторую матрицу, преобразующую  $\psi$  в  $\psi'$ . Ввиду сохранения  $\int |\psi|^2 dq$  эта матрица должна быть унитарной, т.е.  $S^+(dt) = S^*(dt) = S^{-1}(dt)$ . Полагая  $S = 1 + \mathcal{L}dt + \dots$ , мы находим, что  $\mathcal{L} = -\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}$ , где оператор  $\mathcal{H}$  является уже эрмитовым ( $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}^+ = \mathcal{H}$ ), а постоянная Планка  $\hbar$  введена в качестве множителя из соображений размерности и соответствия с классической теорией. Оператор  $\mathcal{H}$  по самому своему смыслу является оператором смещения во времени и называется оператором Гамильтона. Если оператор  $\mathcal{H}$  не зависит от времени, то он является попросту оператором энергии микросистемы.

Из сказанного следует, что уравнение для изменения волновой функции во времени должно быть записано в виде

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi. \quad (6.2)$$

Это и есть знаменитое уравнение Шрёдингера, выражающее причинность в квантовой теории. Так как волновая функция  $\psi$  полностью описывает квантовый ансамбль, то можно сказать, что уравнение (6.2) описывает движение квантового ансамбля и притом причинным образом, т.е. так, что предыдущее во времени состояние ансамбля определяет его последующее состояние.

Заметим, что уравнение для сопряженной функции  $\psi^*$  имеет вид

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \mathcal{H}^* \psi^*, \quad (6.2^*)$$

и если  $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}$ , то

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \mathcal{H} \psi^*. \quad (6.2^{**})$$

Вместо дифференциального уравнения (6.2) можно написать соответствующее ему интегральное уравнение. Это может быть сделано с помощью функции Грина для системы невзаимодействующих частиц. Суть дела заключается в том, что функция Гамильтона  $\mathcal{H}$  обычно может быть представлена в виде суммы оператора кинетической энергии частиц  $T$  и оператора взаимодействия этих частиц между собой и с внешними полями  $V$ . В декартовой системе координат оператор  $T$  имеет особенно простой вид:

$$T = - \sum_{s=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_s} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_s^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_s^2} \right), \quad (6.3)$$

где  $m_s$  — массы частиц,  $x_s, y_s, z_s$  — их декартовы координаты,  $s = 1, 2, \dots, N$  ( $N$  — число частиц в системе). Функция Грина  $\mathcal{G}$  по определению есть реше-

ние уравнения Шрёдингера с правой частью, носящей характер импульсного источника в точке  $x = x'$ , и в момент времени<sup>1</sup>  $t = t'$

$$i\hbar \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} - T\mathcal{G} = -\delta(t - t')\delta(x - x'), \quad (6.4)$$

и равна нулю для  $t < t'$ .

Это уравнение совпадает с уравнением диффузии в многомерном пространстве с мнимым, однако, коэффициентом диффузии и с импульсным источником частиц в точке  $x = x'$ ,  $t = t'$ .

Решение этого уравнения имеет вид

$$\mathcal{G}(x - x', t - t') = \frac{1}{[i\hbar(t - t')]^{N/2}} \prod_{s=1}^N \exp \left[ -\frac{m_s(x_s - x'_s)^2}{2i\hbar(t - t')} \right] \quad \text{для } t' < t, \quad (6.5)$$

$$\mathcal{G}(x - x', t - t') = 0 \quad \text{для } t' > t. \quad (6.5^*)$$

Интересующее нас уравнение Шрёдингера (6.2) может быть переписано в виде

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x', t')}{\partial t'} - T(x')\psi(x', t') = V(x', t')\psi(x', t'). \quad (6.2^{***})$$

Умножая (6.4) на  $V(x', t')\psi(x', t')$  и интегрируя по  $x'$  и  $t'$ , находим, что искомая функция  $\psi(x, t)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$\psi(x, t) = \psi_0(x, t) + \int \mathcal{G}(x - x', t - t')V(x', t')\psi(x', t')dx' dt', \quad (6.6)$$

где  $\psi_0(x, t)$  есть решение свободного уравнения, т. е. уравнения при  $V = 0$ .

Из этого уравнения видно; что если в какой-либо точке пространства  $x'$  в момент времени  $t'$  произошло изменение волновой функции  $\delta\psi(x', t')$  или взаимодействия  $\delta V(x', t')$  и если момент времени  $t'$  является более поздним ( $t' > t$ ), то влияние этого события на состояние ансамбля, т. е. на волновую функцию  $\psi(x, t)$ , равно нулю. Иными словами, влияние на состояние в момент времени имеют только те события, которые происходят ранее  $t$ , при  $t' < t$ .

Заметим, что уравнение (6.2) позволяет не только определить по данному состоянию ближайшее будущее состояние, но и ближайшее предшествующее. Для этого достаточно считать, что  $dt < 0$ . Соответственно этому наряду с «запаздывающей» функцией Грина (6.5) можно рассматривать и «опережающую» функцию Грина:

$$\mathcal{G}(x - x', t - t') = \frac{1}{[-i\hbar(t - t')]^{N/2}} \prod_{s=1}^N \exp \left[ \frac{m_s(x_s - x'_s)^2}{2i\hbar(t - t')} \right] \quad \text{для } t' > t, \quad (6.5^{**})$$

$$\mathcal{G}(x - x', t - t') = 0 \quad \text{для } t' < t. \quad (6.5^{***})$$

<sup>1</sup> Здесь под  $x$  и  $x'$  мы подразумеваем всю совокупность координат частиц, так что  $\delta(x - x')$  есть  $3N$ -мерная  $\delta$ -функция.

Эта функция позволяет определить состояние в прошлом. Такая возможность связана с обратимостью квантовой механики во времени.

Рассмотрим теперь, как выглядят уравнения движения для смешанного ансамбля, описываемого матрицей плотности  $\rho(q, q')$ .

Дифференцируя (5.3) по времени (при этом предполагается, что условия, определяющие смесь, остаются неизменными, так что  $P_s = \text{const}$ ), получаем

$$\frac{\partial \rho(q, q')}{\partial t} = \sum_s P_{M_s} \left[ \frac{\partial \psi_{M_s}^*(q')}{\partial t} \psi_{M_s}(q) + \psi_{M_s}^*(q') \frac{\partial \psi_{M_s}(q)}{\partial t} \right] \quad (6.7)$$

и, пользуясь уравнением (6.2) и сопряженным ему уравнением (6.2\*), находим

$$\frac{\partial \rho(q, q'')}{\partial t} = \sum_s P_{M_s} \frac{1}{i\hbar} [-\mathcal{H}^* \psi_{M_s}^*(q') \psi_{M_s}(q) + \psi_{M_s}^*(q') \mathcal{H} \psi_{M_s}(q)]. \quad (6.7^*)$$

Или, имея в виду, что  $\mathcal{H}(q', q'') = \tilde{\mathcal{H}}^*(q', q'') = \mathcal{H}^+(q', q'')$ , находим

$$\frac{\partial \rho(q, q')}{\partial t} + [\mathcal{H}, \rho] = 0, \quad (6.8)$$

где  $[\mathcal{H}, \rho]$  означает квантовые скобки Пуассона:

$$[A, B] = \frac{1}{i\hbar} (AB - BA). \quad (6.9)$$

Уравнение (6.8) можно записать в форме

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad (6.10)$$

которая выражает теорему Лиувилля в квантовой механике. Уравнения (6.8) или (6.10) выражают причинность, по самому своему смыслу эквивалентную той, которая выражается уравнением Шрёдингера (6.2): первая производная матрицы плотности  $\rho$  определяется самой матрицей плотности, т. е. ближайшее состояние определяется предыдущим.

Если от матрицы плотности  $\rho(q, q')$  перейти к матрице  $R(q, p)$ , то после несложных выкладок получим<sup>1</sup> следующее уравнение для матрицы  $R$ :

$$\frac{\partial R(q, p)}{\partial t} + [\mathcal{H}, R] \equiv \frac{dR}{dt} = 0, \quad (6.11)$$

где

$$[\mathcal{H}, R] = \frac{1}{i\hbar} \int \frac{d\xi d\eta}{2\pi\hbar} e^{-i\xi\eta/\hbar} [H(q, p + \eta) R(q + \xi, p) - H(q + \xi, p) R(q, p + \eta)]. \quad (6.11^*)$$

<sup>1</sup> См. [1-3] к § 5.

Разлагая этот интеграл в ряд по степеням  $\hbar$  (для этого следует использовать формулу (5.22)), найдем

$$\frac{\partial R(q, p)}{\partial t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i\hbar)^{n-1}}{n!} [H, R]_n = 0, \quad (6.12)$$

где

$$[H, R]_n = \frac{\partial H}{\partial p^n} \frac{\partial R}{\partial q^n} - \frac{\partial H}{\partial q^n} \frac{\partial R}{\partial p^n} \quad (6.13)$$

есть классическая скобка Пуассона  $n$ -го порядка. Если оператор функции Гамильтона  $\mathcal{H}$  равен сумме  $T(p) + V(q)$ , то в смешанном  $q, p$ -представлении матричные элементы оператора  $\mathcal{H}$  попросту равны соответствующей классической функции Гамильтона, т. е.

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q). \quad (6.14)$$

Поэтому уравнение (6.12) приобретает вид

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial R}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 R}{\partial q^2} - \sum_{n \geq 2} \frac{(-i\hbar)^{n-1}}{n!} \frac{\partial^n V}{\partial q^n} \frac{\partial^n R}{\partial p^n}. \quad (6.15)$$

В этом уравнении первые два члена в точности совпадают с классическим уравнением для плотности  $\rho(q, p)$  (см. (4.4) или (4.5)), а следующие члены можно рассматривать как квантовые поправки. Эти поправки зависят от высших производных как самой плотности  $R$ , так и потенциала  $V$ , при этом входят как производные по координатам  $q$ , так и производные по импульсам  $p$ . Поэтому эти уравнения могут быть полезны в тех случаях, когда функция плотности является достаточно гладкой функцией в пространстве фаз  $\mathcal{R}(p, q)$ .

Первые два классических члена в уравнении (6.15) показывают, что движение в классическом приближении определяется скоростью в данном месте  $p/m$  и силой  $\partial V/\partial q$ , действующей в этом же месте. Следующие квантовые члены указывают на возрастающее значение всей окрестности точки фазового пространства  $(p, q)$ , причем член с  $\partial^2 R/\partial q^2$  приводит к диффузии плотности  $R(q, p)$  (с мнимым коэффициентом диффузии), а члены типа  $(\partial^n V/\partial q^n)(\partial^n R/\partial p^n)$  указывают на то, что движение ансамбля в квантовой механике определяется характером потенциала не только в данном месте, но и во всем пространстве, доступном для частиц ансамбля.

Приведем еще явный вид уравнения для матрицы плотности  $\rho(q, q')$  в координатном представлении. Для этого заметим, что матричные элементы оператора Гамильтона  $\mathcal{H}$  в  $q$ -представлении имеют вид

$$H(q, q') = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q \partial q'} \delta(q - q') + V(q') \delta(q - q'). \quad (6.16)$$

Подставляя это выражение в (6.8) и вводя переменные  $Q = (q + q')/2$ ,  $\xi = q - q'$ , найдем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial^2 \rho}{\partial Q \partial \xi} - \frac{1}{i\hbar} \left[ V \left( Q + \frac{\xi}{2} \right) - V \left( Q - \frac{\xi}{2} \right) \right] \rho = 0. \quad (6.17)$$

Эта форма уравнения движения для матрицы плотности  $\rho(q, q') \equiv \rho(Q, \xi)$  соответствует в классической механике уравнениям движения для фурье-образа классической плотности  $\rho_{\text{кл}}(Q, P)$  в пространстве фаз [1]:

$$\rho_{\text{кл}}(Q, \xi) = \int \rho_{\text{кл}}(Q, P) e^{-i\xi P/\hbar} dP \quad (6.18)$$

(здесь постоянная  $\hbar$  пока введена чисто формально). Действительно, переходя в (2.4) от  $\rho_{\text{кл}}(Q, P)$  к  $\rho_{\text{кл}}(Q, \xi)$  и полагая

$$H(Q, \xi) = \int H(Q, P) e^{-i\xi P/\hbar} dP, \quad (6.19)$$

найдем

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{\text{кл}}(Q, \xi)}{\partial t} = \int \left[ u H(Q, u) \frac{\partial \rho_{\text{кл}}(Q, \xi - u)}{\partial Q} - u \rho_{\text{кл}}(Q, u) \frac{\partial H(Q, \xi - u)}{\partial Q} \right] du \quad (6.20)$$

и, в частности, при  $H(Q, P) = P^2/2m + V(Q)$  получим из (6.20) в явной форме

$$\frac{\partial \rho_{\text{кл}}(Q, \xi)}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial^2 \rho_{\text{кл}}(Q, \xi)}{\partial Q \partial \xi} + \frac{1}{i\hbar} \xi \frac{\partial V(Q)}{\partial Q} \rho_{\text{кл}}(Q, \xi). \quad (6.21)$$

Сравнение этого уравнения с квантовым уравнением (6.17) показывает, что уравнение (6.17) переходит в (6.21) при выполнении условия

$$\left| \frac{\partial V}{\partial Q} \right| \gg \xi^2 \left| \frac{\partial^3 V}{\partial Q^3} \right|,$$

т. е. если потенциал  $V(Q)$  есть достаточно гладкая функция координат  $Q$ .

Таким образом, мы видим, что метод описания состояния ансамбля парами точек  $q, q'$  в пространстве конфигураций  $\mathfrak{R}(q)$  может быть введен и в классическую механику.



## § 7. Можно ли обойтись без волновой функции?

Основное уравнение квантовой механики — уравнение Шрёдингера, а также и уравнение для матрицы плотности могут быть записаны в форме, которая очень напоминает уравнения классической статистической механики, или уравнения механики роя частиц. Это порождает соблазнительную мысль, которая не раз завлекала исследователей на путь попыток рассматривать квантовую механику как некоторую форму классической механики, дополненную своеобразной «квантовой» силой [1]. Автор этой монографии сам надеялся одно время, что изящные аналогии между уравнениями для матрицы  $R(q, p)$  и уравнениями классической статистической физики, может быть, позволят развить квантовую механику как статистическую механику одновременно не измеримых величин, т. е. имелось в виду положить в основу теории не волновую функцию, а матрицу  $R(q, p)$  — аналога классической плотности  $\rho_{\text{кл}}(q, p)$  в пространстве фаз  $\mathfrak{R}(q, p)$ . Заметим, что все упомянутые попытки так или иначе используют уравнения, которые на языке волновой функции нелинейны относительно волновой функции. В этом обстоятельстве и кроется серьезный подвох для таких попыток.

Рассмотрим сначала ту форму уравнения Шрёдингера, которую иногда называют «гидродинамической». В этом случае в основу теории пытаются положить плотность вероятности  $\rho(x) = |\psi(x)|^2$  и фазу волновой функции  $\theta(x) = \arg \psi(x)$ . Обе эти величины имеют классическую интерпретацию:  $\rho(x)$  можно рассматривать как среднюю плотность частиц, а  $(1/m)\nabla\theta(x)$  — как их среднюю скорость в точке  $x$ , так что  $J = (1/m)\rho\nabla\theta$  имеет смысл плотности потока частиц. Однако уравнения для этих величин нелинейны. Действительно, если в уравнение Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi \quad (7.1)$$

(для простоты мы рассматриваем случай одной частицы) подставить волновую функцию в виде  $\psi = \rho^{1/2} e^{i\theta/\hbar}$ , то получим два уравнения, для  $\rho$  и  $\theta$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \left( \rho \frac{1}{m} \nabla \theta \right) = 0, \quad (7.2)$$



$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla \theta)^2 + V + \frac{\hbar^2}{m} \left[ \frac{\nabla^2 \rho}{\rho} + \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho^2} \right] = 0. \quad (7.2^*)$$

Оба уравнения могут рассматриваться как классические: первое — как уравнение непрерывности для плотности частиц  $\rho$  и для тока  $J = (1/m)\rho \nabla \theta$ , а второе — как уравнение для функции действия  $\theta$ . Это второе уравнение совпадает с классическим, если «квантовый» член  $(\hbar^2/m)[\nabla^2 \rho/\rho + (\nabla \rho)^2/\rho^2]$  рассматривать как дополнительный «квантовый» потенциал, зависящий от плотности частиц  $\rho$  и ее производных.

На первый взгляд кажется, что подобная интерпретация уравнений ничему не противоречит, а сами уравнения, как это следует из их вывода, эквивалентны исходному уравнению Шрёдингера (7.1). Однако это совсем не так.

В квантовой механике фундаментальную роль играет принцип суперпозиции состояний. Согласно этому принципу, если имеются два состояния квантового ансамбля, изображаемые волновыми функциями  $\psi_{M_1}$  и  $\psi_{M_2}$ , то можно осуществить такую макрообстановку ( $M = M_1 + M_2$ ), что новый ансамбль будет представляться волновой функцией такой, что

$$\psi_M = c_1 \psi_{M_1} + c_2 \psi_{M_2}, \quad (7.3)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные числа (при сохранении нормировки  $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ ). Этот простой и важный принцип не может быть выражен на языке величин  $\rho$  и  $\theta$  без того, чтобы не возвратиться к волновой функции.

Еще большее неудобство возникает при формулировке условий симметрии для системы тождественных частиц. Эти условия для волновой функции гласят:

$$\mathcal{P}_{ik} \psi = \pm \psi, \quad (7.4)$$

где  $\mathcal{P}_{ik}$  есть оператор перестановки частиц  $i$ -й и  $k$ -й, а знаки  $\pm$  выбираются в зависимости от типа статистики (Ферми или Бозе). Это простое условие, которое отличным образом вписывается в линейный аппарат квантовой механики, получает лишь крайне неуклюжее отражение на языке функций  $\rho$  и  $\theta$ .

Действительно, пусть мы имеем две одинаковые частицы. Тогда мы можем рассматривать уравнения (7.1) и (7.2) как уравнения для функций, описывающих относительное движение этих частиц, а движение их центра тяжести выделить обычным приемом разделения переменных. Тогда условие симметрии (7.4) переносится на функцию относительного движения (функция, описывающая движение центра тяжести, автоматически симметрична относительно перестановки частиц) и означает, что функция  $\psi(x)$  должна быть четной или нечетной при замене  $x$  на  $-x$ ; при этом из условия (7.4) следует, что

$$\rho(-x) = \rho(x), \quad \theta(-x) = \theta(x) + \pi s, \quad (7.5)$$

где  $s = 0, 2, 4, \dots$  или  $s = 1, 3, 5, \dots$

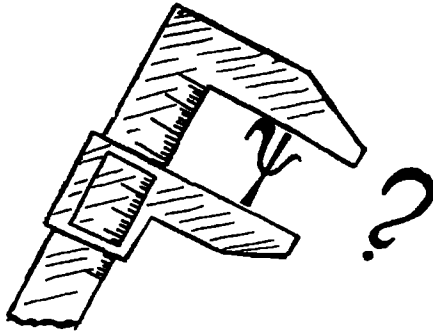
Если требование к функции  $\rho(x)$  оказывается математически вполне удобным, то о втором требовании этого сказать нельзя. И уж если и искать пути удовлетворения второму требованию, то возвращение к волновой функции и к условию четности или нечетности этой функции есть наиболее прямой путь для соблюдения условий (7.5).

Другая форма уравнений квантовой механики, близкая к классической статистической механике, основывается на применении матрицы плотности  $R(q, p)$ . Из формул (5.15), (5.16) и (6.12) видна далеко идущая аналогия между уравнениями классической статистической физики и уравнениями для квантовой плотности  $R(q, p)$ . Однако, как было показано выше (§ 5), матрица  $R(q, p)$ , в отличие от классической плотности, обязательно имеет мнимую часть, не равную нулю, и поэтому в прямом смысле слова не может быть ни вероятностью, ни плотностью в пространстве фаз  $\mathfrak{R}(q, p)$ , которые положительно-дефинитны.

Как было отмечено, комплексный характер  $R(q, p)$  есть выражение принципа дополнительности. Однако могла бы быть надежда рассматривать величину  $R(q, p)$  как обобщение понятия плотности вероятности на случай одновременно не измеримых величин  $q$  и  $p$  и положить в основу теории эту матрицу вместо волновой функции. Само по себе это ничему не противоречило бы. Однако матрица  $R(q, p)$  есть нелинейное образование относительно волновой функции, и поэтому все трудности, которые были отмечены в связи с описанием посредством  $\rho$  и  $\theta$ , находят свое выражение и в этом случае. В частности, указанная выше трудность с формулировкой принципа суперпозиции состояний (7.3) при использовании величин  $\rho$  и  $\theta$  остается в силе и в случае использования матрицы  $R$ .

Далее, условия эрмитовости матрицы (5.19) и условия симметрии (в случае тождественных частиц (5.20)) весьма не просто удовлетворить, не прибегая к понятию волновой функции, и, вероятно, в общем виде их можно удовлетворить только на основе понимания  $R(q, p)$  как билинейной формы из  $\psi^*(p)$  и  $\psi(q)$ .

Эти трудности являются общими для всех попыток формулировать квантовую механику на языке величин, нелинейных относительно волновой функции. Волновая функция, будучи изгнана через дверь, влетает обратно через окно: эта настойчивость волновой функции есть выражение того факта, что язык линейной теории есть язык, имманентный самой природе квантовой механики.



## § 8. Измерима ли волновая функция?

Мы защитили честь волновой функции, но что соответствует ей в реальности? Можно ли ее измерить, установить ее значение из опыта, скажем, так, как можно измерить плотность частиц или температуру газа? Часто на этот вопрос отвечают отрицательно — ведь волновая функция по своему смыслу определена лишь с точностью до постоянной фазы: две волновые функции  $\psi$  и  $\psi'$ , связанные соотношением

$$\psi' = \psi e^{i\alpha}, \quad (8.1)$$

где  $\alpha$  — произвольное действительное число, изображают один и тот же квантовый ансамбль. Поэтому, говоря об измеримости волновой функции, мы с самого начала не будем требовать невозможного (или, лучше сказать, бессмысленного) и будем подразумевать под измерением волновой функции измерение с точностью до постоянной фазы  $\alpha$ .

Чтобы не усложнять обсуждение, будем рассматривать волновую функцию в явном виде как функцию координат  $x$  одной частицы (под  $x$  можно также подразумевать относительные координаты двух частиц). Волновая функция является, вообще говоря, комплексной величиной, и мы запишем ее в виде

$$\psi(x) = |\psi(x)| e^{i\theta(x)}, \quad (8.2)$$

где  $|\psi(x)|$  — действительная амплитуда функции, а  $\theta(x)$  — ее фаза. Из опыта по определению средней плотности частиц  $\rho(x)$ , выполнение которого не встречает каких-либо принципиальных возражений, можно определить амплитуду  $|\psi(x)|$  функции, так как по определению

$$\rho(x) = |\psi(x)|^2, \quad |\psi(x)| = \rho(x)^{1/2}. \quad (8.3)$$

Далее, помимо средней плотности частиц, можно также измерить и среднюю плотность тока:

$$\mathbf{J} = \frac{\hbar}{m} \rho \nabla \theta. \quad (8.4)$$

Тогда фаза  $\theta(x)$  равна

$$\theta(x) = \frac{m}{\hbar} \int_{x_0}^x \frac{\mathbf{J} ds}{\rho}, \quad (8.5)$$

где  $ds$  — элемент длины, а  $x_0$  — некоторая произвольная точка. Этот произвол соответствует произволу в выборе фазы в (8.1). Для определенности мы можем представить себе, что дело идет об измерении  $\rho(x)$  и  $\theta(x)$  в атоме или ионе с одним электроном, находящимся в  $s$ - или  $p$ -состоянии.

В первом случае волновая функция сферически-симметрична и токи отсутствуют, так что

$$\psi(x) = \sqrt{\rho(x)}, \quad (8.6)$$

и измерение  $\rho(x)$  дает нам прямо значение волновой функции.

Во втором случае волновая функция в полярных координатах  $(r, \theta, \varphi)$  имеет вид

$$\psi(r, \theta, \varphi) = A(r, \theta) e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1; \quad (8.7)$$

при этом два знака фазы соответствуют двум возможным ориентациям атома в магнитном поле. Допустим, что посредством магнитного поля установлена одна из возможных ориентаций. Тогда, измеряя  $\rho(x)$ , мы найдем модуль функции

$$A(r, \theta) = \sqrt{\rho(r, \theta)}, \quad (8.8)$$

а измеряя магнитный момент атома, равный

$$M = \frac{e\hbar}{2\mu c} m, \quad (8.9)$$

где  $\mu$  — масса электрона, найдем и фазу волновой функции  $\theta = m\varphi$ . Эти простые примеры показывают, что *волновая функция может быть измерена*.

Приведенный пример измерения волновой функции относится к случаю связанного состояния. Рассмотрим теперь случай рассеяния частиц. Волновая функция в этом случае имеет вид

$$\psi(x) = e^{ikx} + u(x), \quad (8.10)$$

где  $e^{ikx}$  есть первичная, падающая волна ( $k = 1/\lambda$  — волновой вектор для этой волны), а  $u(x)$  — рассеянная волна. Для больших расстояний от рассеивающего центра рассеянная волна имеет вид

$$u(x) = \frac{e^{ikr}}{r} A(k, \theta), \quad (8.11)$$

$$A(k, \theta) = \frac{1}{2ik} \sum_0^{\infty} (e^{2i\eta_l} - 1) P_l(\cos \theta), \quad (8.12)$$

где  $\eta_l(k)$  — фазы рассеянных волн, а  $P_l(\cos \theta)$  — полиномы Лежандра. Допустим, что мы измеряем опять плотность частиц (можно было бы ближе

к практическому исполнению опыта говорить об измерении плотности тока частиц). Эта плотность есть  $|\psi|^2 = |\psi_0 + u|^2$  и содержит интерференционный член  $\psi_0 u^* + \psi_0^* u$ , который усложняет все дело. Однако от него легко избавиться, если представить себе, что описание падающей волны посредством плоской волны представляет собою абстракцию, и, строго говоря, должен быть взят ограниченный в пространстве пучок (волновой пакет). Тогда, наблюдая частицы, рассеянные вдали от первичного пучка, мы избежим интерференции первичных и рассеянных волн (заметим, что эти волны когерентны).

В такой реалистической постановке опыта можно непосредственно измерять  $|u|^2$ , как это обычно и делается. Итак, опыт дает нам величину

$$|u|^2 = \frac{1}{r^2} |A(k, \theta)|^2. \quad (8.13)$$

Отсюда находим амплитуду рассеянной волны  $A(k, \theta)$ , но увы, без фазы. Действительно, в общем случае  $A(k, \theta) = |A(k, \theta)| e^{i\alpha(k, \theta)}$ , и из измеряемой величины фаза  $\alpha(k, \theta)$  выпадает. Дополнительное измерение плотности тока рассеянных частиц ничего нового в этом случае не дает. Действительно, из известной формулы для плотности тока

$$J = \frac{i\hbar}{m} (u^* \nabla u - u \nabla u^*) \quad (8.14)$$

следует, что  $j = \hbar k/m |u|^2$ , и, таким образом,  $j$  попросту пропорциональна  $|u|^2$ . Неопределенность фазы порождает серьезную и трудную проблему восстановления фазы из опытных данных (при этом речь идет о той части фазы  $\alpha(k, \theta)$ , которая может зависеть от угла  $\theta$  и импульса  $k$ ).

Для того чтобы обсудить эту проблему, рассмотрим два частных случая. Пусть сначала среди фаз отлична от нуля только первая фаза ( $s$ -рассеяние). В этом простейшем случае получаем из (8.12)

$$|A(k, \eta)|^2 = \frac{1}{4k^2} \sin^2 \eta_0, \quad (8.15)$$

$$\sin \eta_0 = \pm |A(k, \eta)| 2k, \quad (8.15^*)$$

и, следовательно, фаза  $s$ -рассеяния определяется с точностью до знака. Таким образом, возникает неоднозначность. Эта неоднозначность не является совсем безобидной; за ней скрывается, например, вопрос о том, действуют ли между частицами силы отталкивания или силы притяжения.

Действительно, фаза  $\eta_0$  связана с потенциалом взаимодействия частиц  $V(r)$  (в случае несильного взаимодействия) соотношением [1]:

$$\eta_0 = -\frac{2mk}{\hbar^2} \int_0^\infty V(r) j_0^2(kr) r^2 dr$$

(здесь  $j_0(z)$  — сферическая функция Бесселя), так что знак  $V(r)$  определяет знак  $\eta_0$ .

Обратимся теперь к более сложному случаю, когда отличны от нуля две фазы, например  $s$ -фаза и  $p$ -фаза. В этом случае имеем

$$|A(k, \theta)|^2 = \frac{1}{4k^2} \{ \sin^2 \eta_0 + [2 \cos(\eta_0 - \eta_1) - 2 \cos 2\eta_0 - 2 \cos 2\eta_1] \times \\ \times \cos \theta + \sin^2 \eta_1 \cos^2 \theta \}. \quad (8.16)$$

Определяя коэффициенты при  $\cos \theta$  в нулевой степени,  $\cos \theta$  и  $\cos^2 \theta$ , мы найдем фазы  $\eta_0$  и  $\eta_1$  опять-таки с точностью до знака. Таким образом, из этих простых примеров видно, что задача восстановления волновой функции, даже асимптотической, не является простой, но трудности не носят принципиального характера. Поясним эту мысль замечанием, что, например, в случае рассеяния протонов друг на друге знак фазы  $\eta_0$  может быть определен из интерференции ядерного рассеяния с рассеянием, вызванным кулоновским полем ядра. При учете ядерного взаимодействия дифференциальное поперечное сечение для упругого рассеяния протонов в телесный угол  $d\Omega$  (после усреднения по спинам, см. [2]) равно

$$d\sigma(\theta) = \frac{e^4}{E^2} \cos \theta \left( \frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{1}{\cos^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{1}{\cos^2 \theta} - \right. \\ \left. - \frac{\hbar v}{e^2} \frac{\sin 2\eta_0}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} + \frac{2\hbar v}{e^2} \sin^2 \eta_0 \right) d\Omega, \quad (8.17)$$

где  $E$  — энергия протона,  $v$  — их относительная скорость,  $e$  — элементарный заряд,  $\eta_0$  — фаза ядерного взаимодействия. Мы можем считать, что из опыта нам известно это сечение и, стало быть, известна добавка к чисто кулоновскому рассеянию, вызванная ядерным взаимодействием в  $s$ -состоянии. Эта добавка равна

$$f(E, \theta) d\Omega = -\frac{e^4}{E^2} \cos \theta \left[ \frac{\hbar v}{e^2} \frac{\sin 2\eta_0}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} - \left( \frac{2\hbar v}{e^2} \right)^2 \sin^2 \eta_0 \right] d\Omega. \quad (8.18)$$

Дифференцируя  $f(E, \theta)$  по углу  $\theta$  при данной энергии, получаем

$$\frac{\partial f(E, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{e^4}{E^2} \frac{\hbar v}{e^2} \sin 2\eta_0 \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{\sin^2 \theta \cos \theta} \right), \quad (8.18^*)$$

откуда и определяется фаза  $\eta_0$ . При более высоких энергиях протонов потребуются учет более высоких фаз, и задача усложнится.

Приведенные простые примеры показывают, что *волновая функция может быть измерена*.

Рассмотрим теперь подробнее характер необходимых измерений. Обратимся сначала к рассеянию частиц. Для простоты предположим, что рассеяние упругое. Непосредственно измеряемой величиной является дифференциальное сечение  $\sigma(\theta, k)$ , которое связано с искомой амплитудой рассеяния известным соотношением

$$\sigma(\theta, k) = |A(\theta, k)|^2. \quad (8.19)$$

Поэтому для измерения волновой функции в этом случае необходимо найти путь для косвенного измерения [3] этой функции посредством взаимодействия изучаемой системы с другой, которая допускает прямое измерение. Такой системой может служить свободная частица, рассеивающаяся на изучаемой системе.

Таким образом, эксперимент по косвенному измерению волновой функции связанного состояния (а прямого измерения здесь не существует) сводится к ранее рассмотренному эксперименту по рассеянию свободной частицы. Следует ли еще раз подчеркивать, что никакое единичное измерение не способно дать нам хоть какую-нибудь информацию об искомой волновой функции связанного состояния. Как первый шаг по пути этого косвенного измерения, мы должны найти сечение рассеянной частицы, которая служит нам зондом, с помощью которого изучается внутренность атомной системы. Для этого необходимо набрать, как говорят экспериментаторы, «хорошую» статистику, т. е. сделать большое число наблюдений акта рассеяния пробной частицы на изучаемой атомной системе.

Из прямых измерений числа рассеянных пробных частиц мы определим дифференциальное сечение для этого рассеяния: чтобы теперь сделать заключения о волновой функции изучаемой системы, необходимо восстановить амплитуду рассеяния  $A(\theta, k)$ .

Мы знаем из приведенных выше обсуждений, что эта задача далеко не всегда допускает однозначное решение. Допустим, что нам все же удалось найти амплитуду рассеяния зондирующей частицы. Тогда вся информация об изучаемой атомной системе содержится в бесконечном наборе фаз:  $\eta_0(k)$ ,  $\eta_1(k)$ ,  $\dots$ ,  $\eta_l(k)$ , которые являются функциями энергии относительного движения зондирующей частицы и изучаемой системы. Но и в этом весьма оптимистическом случае возникает сложная математическая задача восстановления структуры изучаемого объекта по его оптическому изображению, которое теперь считается заданным посредством амплитуды  $A(\theta, k)$ . (Напомним, что в исходных экспериментальных данных оно задано распределением интенсивностей рассеянных частиц по углам или, что эквивалентно, дифференциальным сечением.) Однако мы хотели бы подчеркнуть, что как бы ни была сложна математическая задача восстановления структуры объекта, она оказывается разрешимой, по крайней мере, в некоторых случаях, и тем самым доказывается, что путь *косвенного измерения в принципе проходит*.

Ввиду того, что связанное состояние есть состояние изолированной микросистемы, нам будет удобнее в дальнейшем говорить об изучении структуры атомной микросистемы (мы уже употребили эту терминологию), так как в общем случае изучается не только волновая функция системы, но и характер ее взаимодействия с зондирующей частицей. Восстановление структуры микросистемы по ее изображению будет рассмотрено в следующем параграфе.

то величину  $n^2(x)$  можно рассматривать как показатель преломления рассеивающей среды, которую образует наша микросистема.

Рассмотрим случай, когда рассеяние невелико, так что первичная волна мало искажается внутри области, где происходит рассеяние. В этом особо простом случае применимо так называемое борновское приближение, суть которого состоит в замене в произведении  $V(x)\psi(x)$  функции  $\psi(x)$  на первичную, не искаженную рассеиванием волну  $\psi_0(x) = e^{ikz}$ . Это позволяет переписать уравнение (9.2) в форме уравнения с заданной правой частью

$$\nabla^2 u + k^2 u = \frac{2m}{\hbar^2} V(x) \psi_0(x). \quad (9.5)$$

Уравнение для функции Грина уравнения (9.5) имеет вид

$$\nabla^2 \mathfrak{G} + k^2 \mathfrak{G} = -\delta(x - x'), \quad (9.6)$$

а его решение для расходящихся волн может быть записано в форме

$$\mathfrak{G} = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-x'|}}{|x - x'|}. \quad (9.7)$$

Поэтому решением неоднородного уравнения (9.5) будет

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int V(x') \psi_0(x') \frac{e^{ik|x-x'|}}{|x - x'|} d^3 x', \quad (9.8)$$

и при  $|x - x'| \rightarrow \infty$  получаем

$$u(x) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \frac{2m}{\hbar^2} \int V(\mathbf{x}') e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}'} d^3 x', \quad (9.9)$$

где  $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$  есть изменение волнового вектора при рассеянии. Заметим, что  $|q| = 2k \sin \theta/2$ , где  $\theta$  — угол рассеяния между направлением первичной волны и направлением рассеянного луча (см. рис. 6). Сравнение с (9.3) показывает, что амплитуда рассеянной волны равна

$$A(k, \theta) = A(q) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int V(x) e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} d^3 x. \quad (9.10)$$

Отсюда видно, что в борновском приближении амплитуда рассеянной волны попросту равна компоненте Фурье от функции взаимодействия  $V(x)$ .

Обратимся теперь к восстановлению этой функции по данной амплитуде рассеяния  $A(q)$ . Амплитуду представим в виде  $A(q) = a(q) e^{i\alpha(q)}$ , где  $a(q) = |A(q)|$ , а  $\alpha(q)$  есть ее фаза; далее, отметим, что функцию  $V(x)$  мы считаем действительной (отсутствие поглощения, только упругое рассеяние). Тогда чисто формально из фурье-обращения имеем

$$V(x) = -\frac{8\pi m}{\hbar^2} \int A(q) e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} d^3 q, \quad (9.11)$$

где интеграл по передаваемому импульсу взят в бесконечных пределах.



Первое ограничение в отношении знания функции  $V(x)$  вытекает из того обстоятельства, что из измерений при энергии зондирующей частицы, не превышающей  $E$ , мы знаем амплитуду  $A(q)$  только для  $q < 2k$ , где  $k^2 = 2mE/\hbar^2$ , и поэтому вместо (9.11) мы обязаны написать другой интеграл, распространенный в пределах  $|q| < 2k$ . При этом мы получим вместо истинной функции  $V(x)$  только не вполне точно определенный ее образ  $\bar{V}(x)$ :

$$\bar{V}(x) = \int_{q < 2k} A(q) e^{iqx} d^3q. \quad (9.12)$$

Это обстоятельство выражает тот факт, что нельзя видеть деталей объекта, размер которых  $a$  меньше применяемой для «освещения» объекта длины волны  $\lambda$ .

Второе ограничение связано с невозможностью определить фазу амплитуды  $\alpha(q)$ . Из формулы обращения (9.12) видно, что эта фаза счастливым образом равна нулю для того случая, когда функция взаимодействия симметрична относительно преобразования инверсии  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ . Если это взаимодействие содержит еще и несимметричную относительно этого преобразования часть, то фаза  $\alpha(q)$  не равна нулю и определить функцию  $V(x)$ , зная лишь дифференциальное сечение рассеяния, однозначным образом невозможно. Поэтому успех формулы обращения (9.12) существенно зависит от предположений о характере симметрии взаимодействия, которые можно высказать *до измерения*.

Обратимся теперь к связи этого восстановления структуры микрообъекта с проблемой измерения волновой функции связанного состояния. Предположим, что изучаемый микрообъект есть тяжелый ион или атом с одним электроном. Волновую функцию этого электрона, движущегося внутри атома, обозначим через  $\varphi_0(x)$ . Тогда средняя плотность электрического заряда, создаваемая этим электроном в точке  $x$  ( $x$  есть координата электрона по отношению к ядру атома или иона) будет равна  $e\rho(x) = e|\varphi_0(x)|^2$ . Если заряд ядра есть  $+eZ$ , то потенциальная энергия второго электрона, используемого в качестве зондирующей частицы, в поле ядра атома и атомного электрона, очевидно, будет равна

$$V(x) = -\frac{e^2 Z}{r} + e^2 \int \frac{|\varphi_0(x')|^2}{|x - x'|} d^3x'. \quad (9.13)$$

Ее фурье-образ имеет вид

$$\tilde{V}(q) = -\frac{4\pi e^2 Z}{q^2} + \frac{4\pi e^2}{q^2} \tilde{\rho}(q), \quad (9.14)$$

где  $\tilde{\rho}(q)$  есть фурье-образ от плотности  $\rho(x)$ .

Если функция  $\rho(x)$  четна относительно инверсии  $x \rightarrow -x$ , то согласно изложенному выше мы можем определить приближенный образ величины  $\bar{\rho}(x)$ :

$$\bar{\rho}(x) = \int_{q < 2k} \rho(q) e^{iqx} d^3q. \quad (9.15)$$

Если, далее, известно, что из соображений симметрии волновая функция  $\varphi_0(x)$  является действительной функцией, то мы получаем для приближенного образа этой функции

$$\bar{\varphi}_0(x) = \sqrt{\bar{\rho}(x)}. \quad (9.16)$$

Таким образом, мы видим, что и в случае связанного состояния волновая функция в принципе измерима, по крайней мере, в некоторых простейших случаях, когда косвенное измерение может быть расшифровано однозначным образом. Заметим, что при всех обстоятельствах в качестве первого шага необходимо получить дифференциальное сечение упругого рассеяния зондирующих изучаемую систему частиц, т. е. необходимо набрать «хорошую» статистику актов рассеяния, а значит много раз воспроизвести рассеяние электрона на атоме, находящемся в заданном исходном состоянии.

На первый взгляд может показаться, что в такой серии опытов, повторяющих акт рассеяния, по крайней мере, в принципе, можно обойтись одним и тем же атомом в качестве объекта, на котором производится рассеяние зондирующих атом частиц. Однако это не так: суть дела заключается в том, что для изучения структуры объекта, размеры которого имеют порядок  $a$ , необходимо иметь зондирующий пучок с длиной волны  $\lambda = 1/k \ll a$ . Энергия связи частицы (электрона), заключенной в изучаемом объекте, будет порядка  $I \approx \hbar^2/2ma^2$ , т. е. эта энергия меньше, чем кинетическая энергия зондирующей частицы  $E = \hbar^2 k^2/2m \gg I$ . Поэтому в потоке зондирующих частиц атом будет ионизоваться, и его необходимо обновлять.

Это рассуждение нуждается в уточнении для того случая, когда массы частицы (зондирующей  $m$  и внутриатомной  $\mu$ ) различны. Если  $m < \mu$ , то прежнее условие  $E \gg I$  остается в силе; если же  $m > \mu$ , то надо учесть, что борновское приближение становится непригодным при  $v < v_0$ , где  $v$  — скорость зондирующей частицы, а  $v_0$  — скорость частицы внутри изучаемой системы, например, скорость электрона в атоме. По порядку величины имеем  $v_0 \sim \hbar/a\mu$ , откуда вместо  $E > I$  находим  $E > (m/\mu)I$ . Таким образом, кинетическая энергия зондирующих частиц  $E$  превосходит энергию ионизации атома  $I$  и в процессе облучения атом будет ионизоваться. Если это перевести на язык фотографа, то можно было бы сказать, что атом — очень беспокойный клиент для получения хорошего портрета: в процессе экспозиции его лицо изменяется самым неузнаваемым образом.

Количественно это положение может быть описано следующим образом: пусть  $\sigma_0$  — сечение упругих столкновений, а  $\sigma_i$  — сечение неупругих столкновений; тогда отношение числа неупругих рассеяний  $N_i$  к числу упругих  $N_0$  будет равно  $Q_i/Q_0$ . Для получения хорошей «фотографии» атома необходимо, чтобы  $N_i \ll N_0$ . Однако это условие не может быть выполнено, так как условие  $E \gg I$  означает, что электрон, находящийся внутри атома, по отношению к зондирующей частице может рассматриваться как почти свободный, так как его энергия связи  $I$  мала по сравнению с кинетической энергией зондирующей частицы. При этом условии сечение неупругих процессов  $\sigma_i$

превосходит сечение упругих процессов  $\sigma_0$ ; именно при  $E \gg I$  имеем [1]

$$\sigma_i = 2\pi a^2 I \ln \frac{E^3}{2I^2 m}, \quad \sigma_0 = \frac{7\pi}{3} a^2 \frac{I}{E}, \quad (9.17)$$

так что при  $E \gg I$

$$\frac{N_0}{N_i} = \frac{\sigma_0}{\sigma_i} \rightarrow 0.$$

Поэтому невозможно получить четкое изображение атома, если облучать *один и тот же атом*. Отсюда ясно, что нельзя также и восстановить волновую функцию электрона в атоме, если зондировать один и тот же атом, когда, как мы видим, нет гарантий того, что в процессе измерения атом не будет ионизован.

Заметим, что это не означает, что в принципе невозможно обнаружить отдельный атом, скажем, на предметном столике электронного микроскопа.

Если поставить более скромную задачу — ограничиться констатированием факта наличия атома на «столике», не считаясь с возможными изменениями атома при неупругих процессах, то по крайней мере для достаточно тяжелых атомов можно получить тысячи рассеяний без того, чтобы выбить атом из той позиции, где он был первоначально закреплен (абсорбирован) [2].



## § 10. Обратная задача в квантовой механике

Обычная постановка задачи в квантовой механике сводится к отысканию собственных волновых функций  $\psi(x, E)$  и собственных значений  $E$  оператора Гамильтона  $\mathcal{H}(x)$ , который предполагается известным. Это — *прямая задача*.

Однако можно представить себе другую постановку задачи, когда имеются определенные экспериментальные данные о спектре энергетических состояний системы  $E$  и ее собственных функциях  $\psi(x, E)$  и желательно найти гамильтониан системы  $\mathcal{H}(x)$ . Мы видели, как решается эта задача в случае возможности применения борновского приближения. Такую задачу мы будем называть *обратной*.

В последние годы в ряде математических работ [1–4] был найден метод решения этой задачи, который не предполагает использования малости взаимодействия, как это необходимо для применения метода Борна (см. § 9). Для того чтобы иллюстрировать этот метод, будем рассматривать задачу рассеяния в  $s$ -состоянии для системы, обладающей гамильтонианом:

$$\mathcal{H}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(r). \quad (10.1)$$

Обозначая волновое число через  $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$  и полагая  $(2m/\hbar^2)U(r) = V(r)$ , получим уравнение Шрёдингера для  $s$ -волны  $\varphi(r, k)$ :

$$-\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + V(r)\varphi = k^2 \varphi \quad (10.2)$$

с граничными условиями

$$\varphi(0, k) = 0, \quad \frac{d\varphi(0, k)}{dr} = k. \quad (10.3)$$

Предположим также, что  $\int_0^{\infty} r|V(r)|dr < M$  (сходимость интеграла). При  $r \rightarrow \infty$  функция  $\varphi(r, k)$  имеет вид

$$\varphi(r, k) = A(k) \sin[kr + \delta(k)], \quad (10.4)$$

где  $A(k)$  — амплитуда, а  $\delta(k)$  — фаза рассеянной волны.

Фаза  $\delta(k)$  есть наблюдаемая величина, так как полное сечение  $\sigma$  для упругого  $s$ -рассеяния равно

$$\sigma(k) = \frac{\pi}{k^2} \sin^2 \delta(k). \quad (10.5)$$

Что же касается амплитуды  $A(k)$ , то она может быть найдена из дисперсионного соотношения<sup>1</sup>

$$\ln A(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(k') dk'}{(k' - k)}. \quad (10.6)$$

Это дисперсионное соотношение легко выводится, если вместо решения  $\varphi(r, k)$  с асимптотическим поведением (10.4) рассмотреть решение, которое при  $r \rightarrow \infty$  имеет вид

$$u(r, k) = \frac{A(k)}{2i} e^{i[kr + \delta(k)]} \quad (10.4^*)$$

и граничные условия

$$u(0, k) = \frac{1}{2i}, \quad u'(0, k) = \frac{k}{2}. \quad (10.3^*)$$

Тогда имеем

$$f(k) = \frac{2i}{A(k)} e^{-i\delta(k)} u(0, k), \quad S(k) = e^{2i\delta(k)} = \frac{f^*(k)}{f(k)}, \quad (10.7)$$

где  $S(k)$  — матрица рассеяния для  $s$ -волны.

Из (10.7) следует, что

$$\operatorname{Im} \ln f(k) = 2\delta(k), \quad (10.8)$$

и так как  $f(k)$  есть аналитическая функция (при отсутствии связанных состояний) для  $\operatorname{Im} k > 0$  и  $\operatorname{Re} \ln f(k) = -A(k)$ , то на основании (10.8) путем применения теоремы Коши к контуру, состоящему из бесконечно большого полукруга и действительной оси, с обходом точки  $k$  получаем соотношение (10.6).

<sup>1</sup> Здесь мы предположили ради простоты, что в рассматриваемой системе нет связанных состояний. Если такие состояния имеются, то соотношение (10.6) выглядит несколько сложнее (см. например, [2, 4]).

Решение уравнения (10.2), удовлетворяющее условиям (10.3), может быть представлено в виде

$$\varphi(r, k) = \sin kr + \int_0^r K(r, t) \sin kt dt, \quad (10.9)$$

где ядро  $K(r, t)$  при  $0 \leq t \leq r$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 K(r, t)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 K(r, t)}{\partial t^2} = V(r)K(r, t) \quad (10.10)$$

с условиями

$$K(r, 0) = 0, \quad K(r, r) = \frac{1}{2} \int_0^r V(z) dz, \quad (10.11)$$

в чем можно убедиться непосредственной подстановкой (10.9) в (10.2). В силу условий (10.11) потенциал  $V(r)$  может быть исключен из уравнения (10.10):

$$\dot{V}(r) = 2 \frac{dK(r, r)}{dr}. \quad (10.12)$$

Однако мы этого делать сейчас не будем, а выпишем решение уравнения (10.10), которое нетрудно получить методом последовательных приближений:

$$\begin{aligned} K(r, t) = & \frac{1}{2} \int_{(r-t)/2}^{(r+t)/2} V(z) dz + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(r-t)/2}^{(r+t)/2} du_n \int_0^{(r-t)/2} dv_n V(u_n + v_n) \times \\ & \times \int_0^{u_n} du_{n-1} \int_0^{v_n} dv_{n-1} V(u_{n-1} + v_{n-1}) \dots \int_{u_1}^{v_1} V(z) dz. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Отсюда можно получить и выражение для производной  $\partial K(r, t)/\partial r$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial K(r, t)}{\partial r} = & -\frac{\partial K(r, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} V\left(\frac{r+t}{2}\right) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{(r-t)/2} dv_n V\left(\frac{r+t}{2} + v_n\right) \int_0^{(r+t)/2} du_{n-1} \times \\ & \times \int_0^{u_n} dv_{n-1} V(u_{n-1} + v_{n-1}) \dots \int_{u_1}^{v_1} V(z) dz. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Далее, возьмем производную  $\partial \varphi(r, k)/\partial r$  из (10.9) и заменим в ней  $\partial K(r, t)/\partial r$  рядом (10.14).

Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(r, k)}{\partial r} = & k \left[ \cos kr + \int_0^r K(r, t) \cos kt dt \right] + \frac{1}{2} \int_0^r V \left( \frac{r+t}{2} \right) \sin kt dt + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin kt \left[ \int_0^{(r-t)/2} dv_n V \left( \frac{r+t}{2} + v_n \right) \int_0^{(r+t)/2} du_{n-1} \times \right. \\ & \times \left. \int_0^{(r-t)/2} dv_{n-1} V(u_{n-1} + v_{n-1}) \dots \int_{u_1}^{v_1} V(z) dz \right]. \quad (10.15) \end{aligned}$$

Образуем теперь выражение

$$\left[ \frac{1}{k} \frac{\partial \varphi(r, k)}{\partial r} + i \varphi(r, k) \right] e^{-ikr} \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Из (10.15) и (10.9) можно показать после не очень сложных выкладок, что этот предел равен

$$1 + \int_0^{\infty} K_0(u) e^{-iku} du,$$

где  $K_0(u)$  есть предел  $K(r, t)$  при  $r$  и  $t \rightarrow \infty$  вдоль прямой  $r - t = u > 0$ . С другой стороны, из начальных условий (10.3) и асимптотического выражения для  $\varphi(r, k)$  (10.4) следует, что этот предел равен  $A(k) e^{i\delta(k)}$ . Таким образом,

$$1 + \int_0^{\infty} K_0(u) e^{-iku} du = A(k) e^{i\delta(k)} = \psi(k). \quad (10.16)$$

Ядро  $K(r, t)$  может быть продолжено нечетным образом по  $t$  для  $t < 0$  ( $-r \leq t \leq 0$ ), а функция  $\psi(k)$  может быть продолжена для  $k < 0$  таким образом, что  $A(k) = A(-k)$ , а  $\delta(k) = -\delta(-k)$ .

Можно доказать [2], что уравнение (10.10) с учетом соотношения (10.11) имеет единственное решение в треугольнике  $-r \leq t \leq 0$ ,  $r \geq 0$ , для которого  $K(r, t) = -K(r, -t)$  и  $K(r, t) \rightarrow K_0(u)$ , когда  $r, t \rightarrow \infty$  вдоль прямой  $u = r - t$ . Этим самым доказывается возможность, зная  $K_0(u)$ , найти  $K(r, t)$  и, далее, по формуле (10.11) восстановить искомый потенциал  $V(r)$ .

Этот весьма изящный математический метод определения структуры объекта по изучению рассеяния частиц в  $s$ -состоянии (или в другом состоянии с определенным моментом  $l$ ) по фазе  $\delta_l(k)$  оказался на практике не очень эффективным. Суть дела заключается в том, что из опыта мы знаем фазу  $\delta(k)$  не во всем интервале  $0 < k < \infty$ , а только в некотором конечном интервале  $0 < k < k_{\text{макс}}$ . Между тем, потенциал  $V(r)$  весьма чувствителен к поведению

фазы  $\delta(k)$  при больших  $k$ . В этом обстоятельстве отражается великий закон оптики: нельзя видеть детали объекта размером  $a$ , если длина волны «света»  $\lambda$  больше  $a$ .

Для изучения формы  $V(r)$  при  $r \sim a$  необходимо, чтобы длина волны рассеиваемых частиц  $\lambda$  была меньше  $a$ , т.е.  $k \gg 1/a$ . Однако при больших  $k$  фаза  $\delta(k)$  (в пределах упругого рассеяния) становится малой и можно применять более простой метод — приближение Борна.

Практически при попытках определить потенциал взаимодействия нуклонов столкнулись с тем обстоятельством, что при больших  $k$  начинается рождение мезонов и вступают в силу релятивистские эффекты.

Действительно, радиус действия ядерных сил по порядку величины равен длине комптоновской волны мезона  $a = \hbar/mc$  ( $m$  — масса мезона,  $c$  — скорость света). Следовательно, для изучения структуры  $V(r)$  — потенциала взаимодействия нуклонов — необходимо

$$k = \frac{1}{\lambda} \gg \frac{1}{a} = \frac{mc}{\hbar},$$

т.е. относительный импульс нуклонов  $p = \hbar k \gg mc$ . Отсюда следует, что энергия нуклонов

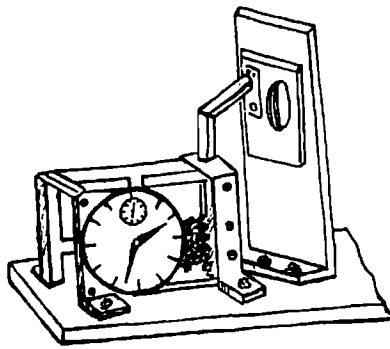
$$2E = \frac{2p^2}{M} \gg \frac{2m}{M} mc^2 \approx \frac{2}{7} mc^2,$$

а их скорость

$$v \gg \frac{mc}{M} = \frac{1}{7} c.$$

Иными словами, мы находимся у порога рождения мезонов и в области, где вступают в силу релятивистские эффекты. Ни то, ни другое не предусмотрено в излагаемой здесь нерелятивистской теории.





"Установка состоит из прибора, в котором затвор жестко соединен с солидными часами..." Н. Бор

## § 11. Почему измерительный прибор есть макроскопическое устройство?

Квантовая механика, подобно тому как это делается и в классической механике, приписывает микросистемам различные, характерные для них динамические переменные. Более того, в самых грубых чертах положение дел можно охарактеризовать тем, что эти динамические переменные имеют свое продолжение и в классической механике, например, координата частицы, ее импульс, полная энергия и многие другие величины. Исключение составляют некоторые специфические квантовые переменные, которые либо вообще не имеют аналогов в классической теории, либо эти аналоги оказываются весьма бессодержательными. К числу подобных величин относится, например, спин частицы  $\sigma$  или ее изотопический спин  $\tau$ .

Что же касается большинства динамических переменных, то они сохраняют свое значение как в классической, так и в квантовой механике, по крайней мере, в том смысле, что они становятся тождественными друг другу, когда физическое явление происходит в области, где обе теории перекрываются. Формально эта область характеризуется тем, что все наблюдаемые величины могут быть представлены в виде рядов по степеням постоянной Планка  $\hbar$ :

$$L = L_0(p, q) + \sum_{s=1}^{\infty} \hbar^s a_s(p, q), \quad (11.1)$$

где первый член соответствует классическому значению величины  $L$ .

В том круге явлений, где такое разложение невозможно, происходит разделение динамических переменных на *дополнительные* друг к другу: пространственно-временные  $q$  и импульсно-энергетические  $p$ .

Это разделение динамических переменных на два класса дополнительных друг к другу величин является фундаментальной особенностью квантовой

механики и ведет к *неустраняемой статистичности* в квантовых ансамблях. Поясним, что это значит. Суть дела заключается в том, что если мы имеем классический ансамбль, в котором есть статистический разброс какой-то механической величины, пусть это будет величина  $L$ , так что среднее квадратичное отклонение

$$\overline{\Delta L^2} = \overline{(L - \bar{L})^2} > 0 \quad (11.2)$$

(здесь черта означает среднее по ансамблю; в частности,  $\bar{L}$  есть среднее значение величины  $L$ ), то, производя измерения этой величины и отбирая экземпляры систем с одним и тем же значением  $L$ , скажем,  $L = L'$ , мы образуем из этих отобранных систем новый ансамбль, в котором  $\overline{\Delta L^2} = 0$ . При этом процесс отбора, вообще говоря, никак не влияет на состояние системы в отношении других динамических переменных, например, переменной  $M$ .

Следуя этому пути, мы можем образовать ансамбль, в котором для всех величин  $\overline{\Delta L^2} = 0$ ,  $\overline{\Delta M^2} = 0$ , т.е. ансамбль, в котором все динамические переменные имеют вполне определенное значение. В частности, такой ансамбль мог бы быть образован классическими системами, находящимися при температуре абсолютного нуля. В этом случае импульс системы  $p = 0$ , а координата имеет значение, соответствующее минимуму потенциальной энергии,  $q = q_{\min}$ , и при соответствующем выборе начала координат можно считать, что  $q = 0$ . Все остальные величины являются функциями переменных  $p$  и  $q$  и поэтому будут также иметь определенные значения, соответствующие  $p = 0$  и  $q = 0$ .

Ничего подобного нет в той области явлений, где господствуют законы квантовой механики. Квантовый ансамбль с определенным значением какой-либо механической величины  $L$  ( $\overline{\Delta L^2} = 0$ ) никогда не может быть ансамблем, в котором все другие динамические переменные также имеют определенное значение. Если величина  $L$  изображается оператором  $\mathcal{L}$ , а некоторая другая механическая величина  $M$  изображается оператором  $\mathcal{M}$ , то, на основании неравенства Шварца, справедливого для линейных и самосопряженных операторов  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{L}$  [1, 2], имеем

$$\overline{\Delta M^2} \overline{\Delta L^2} \geq \frac{1}{4} |C|^2, \quad (11.3)$$

где

$$C = \mathcal{M}\mathcal{L} - \mathcal{L}\mathcal{M}.$$

Это есть соотношение неопределенностей в самой общей форме. В частности, если  $M$  и  $L$  означают канонически сопряженные импульс  $p$  и координату  $q$ , так что для операторов  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{Q}$  имеем

$$\mathcal{P}\mathcal{Q} - \mathcal{Q}\mathcal{P} = -i\hbar, \quad (11.4)$$

то из (11.3) следует

$$\overline{\Delta p^2} \overline{\Delta q^2} \geq \frac{1}{4} \hbar^2, \quad (11.5)$$

т. е. соотношение неопределенностей для  $p$  и  $q$ . Из (11.3) видно, что только для величин, изображаемых коммутирующими операторами,

$$\mathcal{M}\mathcal{L} - \mathcal{L}\mathcal{M} = 0, \quad (11.6)$$

квадратичные отклонения  $\overline{\Delta M^2}$  и  $\overline{\Delta L^2}$  не связаны между собой, и поэтому можно выбирать экземпляры микросистем из ансамбля так, что в новом ансамбле будем иметь  $\overline{\Delta M^2} = 0$  и  $\overline{\Delta L^2} = 0$ . В случае величин, изображаемых некоммутирующими операторами,

$$\mathcal{M}\mathcal{L} - \mathcal{L}\mathcal{M} \neq 0, \quad (11.7)$$

кроме исключительных состояний ансамбля (состояний, в которых случайно  $S\psi = 0$ ), нельзя получить такой ансамбль, где  $\overline{\Delta M^2} = 0$  и  $\overline{\Delta L^2} = 0$ . Поэтому если мы имеем ансамбль с определенным значением некоторой динамической переменной  $L$ , изображаемой оператором  $\mathcal{L}$ , то всегда найдутся такие динамические переменные  $M$ , которые изображаются оператором  $\mathcal{M}$ , не коммутирующим с оператором  $\mathcal{L}$ . Это означает, что в этом ансамбле  $\overline{\Delta M^2} \neq 0$  в соответствии с общим соотношением неопределенности (11.3).

Попытка устранить статистический разброс величины  $M$  путем отбора экземпляров микросистем с определенным значением  $M'$  приведет к новому статистическому коллективу, в котором в силу общего соотношения неопределенностей (11.3) появится статистический разброс величины  $L$  ( $\overline{\Delta L^2}$  теперь не будет равно нулю).

Статистика в квантовой области неустранима. Это обстоятельство приводит к весьма фундаментальному требованию по отношению к принципу работы всех измерительных приборов, которые претендуют на измерения в квантовом ансамбле. Дело в том, что при изучении явлений статистическими методами измерительные приборы, служащие как для фиксации самих ансамблей, так и для анализа распределений в этих ансамблях, должны сами стоять за пределами этих ансамблей: они должны быть лишены элементов случайного, свойственного исследуемым с их помощью статистическим совокупностям. Между тем, любой измерительный прибор, как и любое тело, состоит из атомов, молекул и подобных микрообразований, совершающих случайные, хаотические движения, которые обнаруживаются, например, в броуновском движении. До возникновения квантовой механики предполагали, что этот хаос молекулярных движений может быть «заморожен». Теперь мы знаем, что это движение не прекращается и при абсолютном нуле, так что случайные флуктуации в положении микрочастиц остаются и в абсолютно холодном теле.

Мир микрочастиц слишком оживлен и неупорядочен, чтобы какая-нибудь его часть могла бы быть использована в качестве измерительного прибора. Такой «микроприбор» постоянно подвергался бы многочисленным случайным воздействиям и сам нуждался бы в постоянном контроле. Нужно найти «островок спасения» в хаосе микромира, среди бушующего моря микроявлений. Квантовая механика находит такой «островок» в *макроскопическом приборе*.

На «выходе» всякого прибора всегда происходит макроскопическое явление: поворот стрелки счетчика, образование капелек тумана в камере Вильсона, почернение зерна в фотоэмульсии и тому подобное. Это понятие макроскопичности прибора квантовая теория отождествляет с понятием классичности прибора; иными словами, *измерительный прибор должен быть устроен таким образом, чтобы для осуществления его действия, в конечном счете, использовались только его классические свойства, т. е. такие свойства, в которых постоянная Планка не играет роли*. Такой прибор максимально освобожден от квантовой статистичности [3]. Поэтому будет правильным сказать, что *квантовая механика изучает микромир в его отношении к макромиру. Макроскопические (классические) приборы являются теми системами отсчета, по отношению к которым в квантовой теории определяется состояние микросистем*.

В реальности такие системы отсчета могут быть осуществлены лишь приближенно, но в этом отношении уже нет никакой разницы с классикой. Так, механик-классик сказал бы: «мои выводы строго справедливы лишь применительно к измерениям абсолютно жесткими масштабами и равномерно идущими часами». Если таких нет на самом деле, то, может быть, найдется что-нибудь подходящее к ним так, чтобы выводы теории все же в какой-то мере соответствовали реальным ситуациям.

Теперь несколько замечаний о самом человеке как об измерительном приборе. Несомненно, что, обращаясь к человеку, мы вступаем на весьма шаткую почву, так как при современном состоянии наших знаний о живом нельзя с такой же степенью ясности и полноты анализировать человека, как это можно сделать применительно к какому-либо физическому прибору. Мы, например, не можем сказать в отношении живого существа, в каких случаях следует игнорировать постоянную Планка, а в каких этого нельзя делать. Поэтому приходится обращаться к менее точным критериям и фактам.

Важным является то обстоятельство, что органы чувств человека воспринимают микроявления сглаженно, т. е. как макроскопический процесс. Мы, например, чувствуем тепло или холод. Это ощущение вызывается микропроцессами — неупорядоченным движением молекул окружающей нас среды, но воспринимается этот процесс сглаженно: ударов отдельных молекул мы не чувствуем и за судьбой отдельных молекул следить не можем. То же можно сказать и о восприятии света. Даже в крайних условиях, которые реализуются в опытах Вавилова [4], глаз устанавливает лишь факт флуктуаций света при очень малых интенсивностях. Важно, что и в этом случае окончательный процесс внутри человека носит упорядоченный, макроскопический характер: экспериментатор делает заметку о наблюдаемой флуктуации, и в этом он не отличается от счетчика частиц, передвигающего на деление свою стрелку. Мы даже не в состоянии представить, как чувствовало бы себя воображаемое живое существо, которое было бы способно воспринимать непосредственно движение микрочастиц. Сознание такого существа должно было бы совершать нечто вроде броуновского движения. Следовало бы завидовать его способности или сожалеть о его несчастьи? Даже на этот вопрос мы не в состоянии дать уверенного ответа.

При пуске атомных реакторов при малом уровне средней мощности хаос микроявлений проявляется в неумеренно больших флуктуациях цепной реакции, которые значительно превосходят средний уровень. Это проявление атомного хаоса способно действовать на нервы участников пуска, так как может казаться, что процесс становится неуправляемым. Однако эти угрожающие флуктуации сглаживаются, когда уровень мощности становится большим. Нельзя освободиться от ощущения, что человеческое восприятие более приспособлено к спокойному течению явлений в макромире.

Таким образом, хотя и невозможно применить к человеку простой критерий макроскопичности, которым пользуется квантовая механика, тем не менее мы можем утверждать, что человеческое восприятие сглаживает атомистичность мира и в этом смысле является макроскопическим.

Поэтому человека с точки зрения физики следует рассматривать как макроскопический прибор, далекий к тому же от совершенства. Для изучения микромира он нуждается в расширении возможностей своих органов чувств. Такое расширение достигается с помощью различных измерительных приборов, которые дают возможность *микроявлению заговорить на языке макроявлений*. В этой связи не раз дискутировался вопрос: в какой мере такая постановка вопроса «ограничивает» познание микромира? Мы не намерены здесь углубляться в эту сторону дела, которая имеет отношение, скорее, к гносеологии, чем к физике. Однако трудно удержаться от нескольких замечаний. Критерием истинности познания является практика — это старая и хорошая сама по себе истина. Однако конкретный механизм познания может быть весьма различным у различных живых существ. В этом механизме есть и совершенно общие черты, свойственные любым существам, как бы парадоксально ни выглядело их сознание с точки зрения человека. Эти общие черты, быть может, лучше всего выразить на языке кибернетики: *сознание* (общее знание) дает команду *исполнительным органам* самого живого существа (или находящимся в его ведении машинам или аппаратам). Исполнительный орган производит *действие*: после этого действия в сознание поступает *обратный сигнал*, сообщающий сознанию *результат* действия. Этот сигнал *обратной связи* подсказывает сознанию дальнейшие действия.

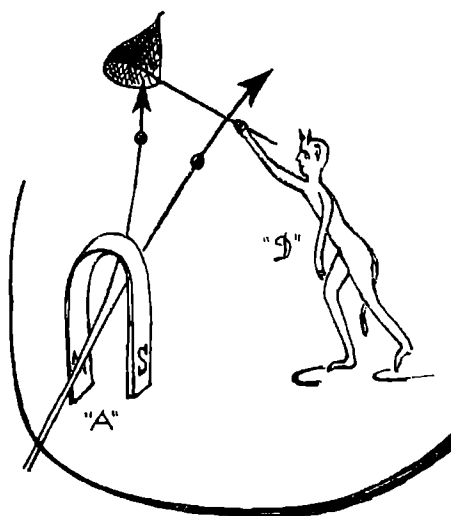
Познание внешнего мира строится именно на этой обратной связи, и формы ее могут быть крайне различны. Ясно, что если обратная связь работает неправильно, не «отображает действительность», то ни отдельный организм, ни целое общество, страдающее таким недостатком, не могут сколько-нибудь длительно существовать.

Однако способы «отображения» могут быть весьма различными. Так, например, в приборах ночного видения не воспринимаемый глазом человека инфракрасный свет преобразуется в свет видимый; цвет предмета может быть передан как световым сигналом (фотохимическое действие света на глаз), так и звуком — если с помощью фотоэлементов преобразовать свет в звук и подать его к слуховым органам.

Слепая от рождения Иоланта, будь она физиком, нашла бы способ отличить красную розу от белой. Из приведенных примеров видно, что не столь

важен способ восприятия сигнала, поступающего от объекта, сколь важен *однозначный характер этого сигнала*.

С этой точки зрения мы не должны подозревать квантовую механику в неполноценности только за то, что она предлагает слушать музыку микромира на языке макроскопических явлений. Это тем более резонно, что практика физического эксперимента и практика прикладной атомной физики показывают, что этот язык нигде не является препятствием для научного и технического прогресса. Да и может ли человек без существенного переустройства своего организма воспринимать мир иначе, чем он воспринимает его сейчас, т. е. как *существо макроскопического мира*?



## § 12. Схема макроскопического прибора

Обратимся сначала к теории. Что означает измерение с теоретической точки зрения? Допустим, что мы намерены измерить некоторую динамическую переменную  $L$ , принадлежащую микросистеме  $\mu$ . Сама эта микросистема  $\mu$  принадлежит квантовому ансамблю, определенному макрообстановкой  $M$ . Для простоты будем считать ансамбль чистым, так что состояние микросистемы будет описываться волновой функцией  $\psi_M(q)$ . Пусть динамическая переменная  $L$  изображается оператором  $\mathcal{L}$  и имеет собственные значения  $L = L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$  и соответствующие собственные функции  $\psi_1(q), \psi_2(q), \dots, \psi_n(q), \dots$ . Тогда волновую функцию  $\psi_M(q)$  можно представить в виде спектрального разложения по собственным функциям оператора  $\mathcal{L}$ :

$$\psi_M(q) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(q). \quad (12.1)$$

Напомним, что совокупность коэффициентов  $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$  следует рассматривать как волновую функцию  $\psi_M$ , взятую в  $L$ -представлении, т. е. отнесенную к системе отсчета динамической переменной  $L$ . В этой связи мы могли бы законно применить обозначение

$$c_n = \psi_M(L_n), \quad (12.2)$$

которое и подчеркивает в явной форме это обстоятельство. Однако мы будем пользоваться более простым обозначением  $c_n$  и используем индекс  $n$  в двойном смысле: как знак собственного значения  $L_n$  величины  $L$  и как знак, указывающий макрообстановку, которая фиксирует это значение.

Допустим, что произведено измерение и найдено, что значение динамической переменной  $L$  равно  $L_m$ . Тогда система после этого измерения будет

принадлежать новому ансамблю, в котором переменная  $L$  имеет одно-единственное значение  $L_m$ , так что  $\overline{\Delta L^2} = 0$  (если ранее, до измерения, было  $\overline{\Delta L^2} \neq 0$ ). Соответствующее состояние системы будет теперь  $\psi_m(q)$  и будет принадлежать некоторой новой макрообстановке, возникшей в результате измерения.

Сравнивая новое состояние  $\psi_m(q)$  с исходным  $\psi_M(q)$ , мы видим, что на математическом языке теории измерение свело спектральное разложение (12.1) к одной функции  $\psi_m(q)$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(q) \rightarrow \psi_m(q). \quad (12.3)$$

Этот процесс обычно называют «*стягиванием волнового пакета*» или «*стягиванием волновой функции*». Коэффициенты спектрального разложения  $c_n$  определяют интенсивность  $|c_n|^2$ , с которой представлено в суперпозиции (12.1) частное состояние  $\psi_M(q)$ , и тем самым определяют вероятность того, что при измерении величины  $L$  будет найдено ее значение, равное  $L_m$ , или, иными словами, что при измерении динамической величины  $L$  волновая функция  $\psi_M(q)$  «стянется» к функции<sup>1</sup>  $\psi_m(q)$ . Такова чисто формальная сторона дела. Посмотрим теперь на примерах, как эта механика осуществляется в реальных условиях.

## А. Анализ поляризованного пучка

Пусть мы имеем источник света  $S$  (рис. 7), коллиматор  $C$  и поляризатор  $P$ . После поляризатора мы имеем пучок поляризованного света, распространяющегося вдоль оси  $ox$ . Всю эту часть макрообстановки мы можем рассматривать как «*приготовление*» микросистемы, в данном примере — кванта света, в определенном чистом состоянии  $\psi_M$ . Здесь  $M$  — индекс макрообстановки (макрообстановка включает в себя перечисленные выше источник света, коллиматор, поляризатор, возможные диафрагмы и т. п., в частности, включает в себя и тот факт, что в области распространения пучка света нет других микро- или макротел, которые могли бы повлиять на распространение света). Состояние линейно поляризованного света  $\psi_M$  может быть представлено в виде суперпозиции двух взаимно перпендикулярных состояний поляризации, скажем,  $\psi_1$  и  $\psi_2$  [1]:

$$\psi_M = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 \quad (12.4)$$

(как известно,  $c_1 = \cos \vartheta$ ,  $c_2 = \sin \vartheta$ , где  $\vartheta$  есть угол между направлением поляризации пучка  $M$  и направлением поляризации в состоянии 1).

Чтобы осуществить на практике спектральное разложение (12.3), мы поставим вдали от поляризатора  $P$  анализатор  $A$ , который будет посылать пучки света  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , имеющие различные поляризации 1 и 2 в различных



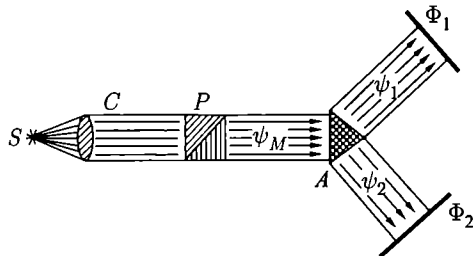


Рис. 7. Опыт с поляризованными пучками света:  $C$  — коллиматор,  $P$  — поляризатор — это «приготавливающая» часть макрообстановки. Возникает ансамбль  $\psi_M$ ;  $A$  — анализатор, разделяющий  $\psi_M$  на два пучка:  $\psi_1$  и  $\psi_2$ ;  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — детекторы фотонов. Итак,  $S + C + P = M$ ;  $A + \Phi_1 + \Phi_2$  — измерительный прибор (ИП)

направлениях. На пути этих пучков поставим приемники света  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , которые будут регистрировать факт попадания кванта света в одно из возможных направлений,  $\psi_1$  или  $\psi_2$ . Таким детектором мог бы быть, например, фотоумножитель, который способен, в принципе, зарегистрировать один фотон и произвести электронную лавину — макроскопически регистрируемый электрический импульс. В зависимости от того, в каком канале произойдет этот импульс, мы будем знать, какую поляризацию имел фотон (1 или 2). При большом числе повторных измерений числа фотонов в обоих каналах  $N_1$  и  $N_2$  согласно (12.3) будут относиться как

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{|c_1|^2}{|c_2|^2} = \operatorname{ctg}^2 \vartheta. \quad (12.5)$$

Все описанное устройство мы и называем *измерительным прибором*. Как видно, он состоит из двух частей, которые имеют различные назначения: во-первых, это *анализатор*, который на самом деле осуществляет спектральное разложение (12.4), и, во-вторых, *детекторы*  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , данном случае — фотоумножители. При этом видно, что для успешной работы этих детекторов необходимо, чтобы пучки света  $\psi_1$  и  $\psi_2$  были ограничены в поперечном направлении, иначе анализатор, фотоумножители  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  перепутают принадлежность кванта к тому или иному пучку.

Ясно, что все это устройство, именуемое *прибором*, на самом деле входит в макрообстановку, и возможность разделения макрообстановки на часть «приготавливающую», которую мы обычно обозначаем через  $M$ , и на часть «измеряющую» — прибор, основана на пространственном удалении «области  $M$ » и «области прибора  $A + \Phi_1 + \Phi_2$ ».

## Б. Измерение импульса

На рис. 8 изображена схема другого опыта. Имеется источник  $S$  частиц, которые могут находиться в сфере действия внешних электромагнитных полей  $\mathcal{E}$  и диафрагмы  $C$ , коллимирующей пучок частиц, покидающих область действия полей  $\mathcal{E}$ .

На выходе из диафрагм мы будем иметь пучок электронов, ограниченный в поперечных размерах и, вообще говоря, с неопределенным импульсом  $p$ .

Причина этой неопределенности может быть двоякой. Она может быть обусловлена немонохроматичностью источника для различных импульсов частиц; в этом случае мы имели бы дело со смешанным ансамблем. Будем считать, что эта причина несущественна — разброс импульсов, вызванный ею, может быть мал. Другой причиной для неопределенности импульса может быть действие внешних переменных полей  $\mathcal{E}$ . В этом случае ансамбль может быть чистым, но иметь разброс по импульсам. В дальнейшем мы будем иметь в виду именно этот случай и предположим, что этот чистый ансамбль описывается волновой функцией  $\psi_M(x, y)$ .

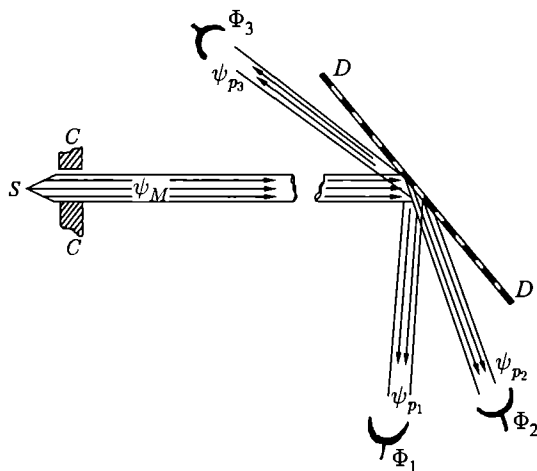


Рис. 8. Измерение импульса дифракционной решеткой  $D$ :  $S$  — источник частиц,  $C$  — диафрагма. Макрообстановка «приготавливающая» есть  $M = S + C$ . Дифракционная решетка  $D$  разлагает  $\psi_M$  в спектр  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$ ;  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots$  — детекторы частиц.  $IP = D + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots$

Эту функцию мы разложим в спектр по собственным функциям оператора импульса  $\psi_p(x) = e^{ipx/\hbar} / \sqrt{2\pi\hbar}$ :

$$\psi_M(x, y) = \sum_p a_p(y) \psi_p(x); \quad (12.6)$$

при этом, чтобы учесть ограниченность пучка в поперечном направлении, мы считаем коэффициенты  $a_p(y)$  медленными функциями координаты  $y$ , исчезающими для  $|y| \gg d/2$ , где  $d$  есть ширина пучка.

Всю только что описанную часть макрообстановки  $M$  можно рассматривать как «приготавливающую» исходный ансамбль  $\psi_M$ .

Если теперь на пути этого пучка поставить дифракционную решетку  $D$ , то она осуществит пространственное разделение пучков, имеющих различные импульсы, т. е. разложит первичную волну  $\psi_M(x, y)$  в спектр. Дифракционная решетка, разлагая в спектр первичную волну, изменяет направление первичного пучка и, в сущности, меняет исходный ансамбль, а именно исходное состояние  $\psi_M(x, y)$  после установки дифракционной решетки  $D$  переходит

в совокупность первичной волны  $\psi_M(x, y)$  и волн, рассеянных решеткой,  $b_p(x, y)\psi_{p_s}(x, y)$  (на рисунке они изображены отдельными пучками  $\psi_{p_s}(x, y)$ ):

$$\psi_M(x, y) \rightarrow \psi'_M(x, y) = \psi_M(x, y) + \sum_s b_s(x, y)\psi_{p_s}(x, y), \quad (12.7)$$

где сумма взята по пучкам  $\psi_{p_s}(x, y)$ , рассеянным решеткой. При этом в силу пространственного разделения пучков коэффициенты для разных значений  $p_s$  удовлетворяют соотношениям

$$b_s(x, y)b_{s'}(x, y) \approx 0. \quad (12.8)$$

Если операция разложения в спектр происходит вдали от «приготавливающей» части, то всю макрообстановку можно разделить на «приготавливающую» часть и на «прибор» — в данном случае дифракционную решетку вместе с устройством  $\Phi_1, \Phi_2, \dots$  для детектирования частиц в том или ином пучке после рассеяния на дифракционной решетке.

По факту локализации частицы в том или ином детекторе мы можем судить о ее импульсе до вмешательства дифракционной решетки, т. е., как обычно говорят, «до вмешательства прибора в состояние объекта». Детектором в рассматриваемом примере мог бы служить счетчик, в котором электрон вызывает лавину электрического разряда, т. е. производит макроявление. Другим видом детектора могла бы быть фотопластинка. В этом случае электрон инициирует химическую реакцию в зерне фотоэмульсии и вызывает макроскопическое явление образования «скрытого» изображения. Как видно из этого примера, дифракционная решетка, разделяя пространственно пучки с различными импульсами, разрушает интерференцию между ними, а частица, заставляя срабатывать детектор того или другого канала, «рассказывает» о своем прежнем (до рассеяния) импульсе. В этом заключается физическая суть «стягивания» волнового пакета: *микрочастица вмешивается в состояние макроприбора*.

## В. Определение квантового состояния атома

Рассмотрим пучок атомов, вылетающих в направлении оси  $ox$  из «черного ящика»  $S$  (рис. 9). Мы не будем входить в конкретное устройство этого ящика и отметим лишь, что ширина пучка предполагается ограниченной диафрагмой  $D$  шириной  $\Delta z_0$ , так что по оси  $oz$ , перпендикулярной оси  $ox$ , имеется неопределенность в импульсе  $p_z$ :

$$\Delta p_z > \frac{\hbar}{2\Delta z_0}. \quad (12.9)$$

Импульс же атомов в направлении оси  $ox$  мы можем считать неограниченно точным и равным  $p_x = M_{\text{ат}}v$ , где  $M_{\text{ат}}$  — масса атома, которую будем считать достаточно большой.

Далее, предположим, что внутреннее состояние атомов, покидающих «черный ящик», может быть различным и описывается волновыми функциями

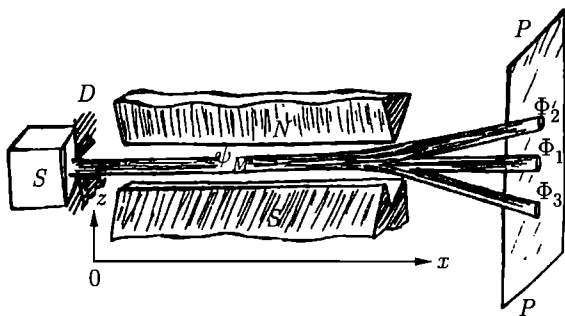


Рис. 9. Измерение внутренней энергии атома (опыт Штерна и Герлаха):  $S$  — «черный ящик»;  $D$  — диафрагма;  $M = S + D$  «приготавливает»  $\psi_M$ ;  $NS$  — магнит, являющийся анализатором;  $P$  — пластинка, являющаяся детектором;  $IP = NS + P$ ;  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  — разделенные пучки

$\psi_n(x)$ , где под  $(x)$  подразумеваются внутренние координаты атома, например, координаты его электронов. Энергия этих состояний пусть будет  $E_n$  соответственно. Если атом в этих состояниях обладает различными электрическими или магнитными моментами, то, действуя на наш пучок неоднородным электрическим или магнитным полем, мы можем разделить его на пучки, в которых атомы находятся во вполне определенных внутренних состояниях  $\psi_n(x)$ . Такое разделение осуществляется, например, в опытах Штерна и Герлаха по измерению магнитного момента атома (заметим, что в этих опытах фактически изменяется энергия атома во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}$  (см. [2, 3])). После помещения атома во внешнее неоднородное поле его внутренняя энергия  $E_n$  будет зависеть от положения атома в пространстве:

$$E_n \rightarrow E_n(X, Y, Z), \quad (12.10)$$

где под  $X, Y, Z$  понимаются координаты центра тяжести атома; в частности, если имеется в виду, что в состояниях  $n$  атом обладает различным магнитным моментом  $\mu_n$ , то

$$E_n(X, Y, Z) = E_n - \mu_n H, \quad (12.11)$$

где  $\mu_n$  есть проекция магнитного момента атома на направление внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}$ , которое является функцией координат  $X, Y, Z$ . Для определенности будем считать его направленным по оси  $Oz$ , зависящим от  $z$ . Проекция магнитного момента атома  $\mu_n$  равна магнетону Бора  $e\hbar/2mc$ , умноженному на некоторый числовой фактор  $g$ , зависящий от структуры атома (множитель Ланде, см. [2]). Если внешнее поле невелико, то оно не изменяет внутренней структуры атома, и поэтому волновые функции  $\psi_n(x)$  в этом приближении можно считать не зависящими от положения атома в пространстве, т. е. от координат  $X, Y, Z$ .

Эти функции образуют полную систему функций, так что волновую функцию всего атома в целом  $\Psi(X, Y, Z, x)$ , зависящую как от внутренней координаты  $x$ , так и от координат центра тяжести атома  $X, Y, Z$ , можно разложить в ряд по функциям  $\psi_n(x)$ :

$$\Psi_M(X, Y, Z, x) = \sum_n \Psi_n(X, Y, Z) \psi_n(x). \quad (12.12)$$

Представляя состояние атомов в нашем ансамбле в виде суперпозиции состояний  $\psi_n(x)$ , мы тем самым в явной форме допускаем, что наш «черный ящик» готовит чистый ансамбль  $\Psi_M$ , но с неопределенной энергией атомов  $E_n$ , так что  $\overline{\Delta E^2} \neq 0$ . Этот «черный ящик» и есть «приготавливающая» часть макрообстановки  $M$ . Наш измерительный прибор будет состоять из магнита  $NS$ , создающего неоднородное магнитное поле  $H$ , направленное по оси  $Oz$  и зависящее от  $z$ , и из детекторов  $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ , а также, как мы увидим далее, сам атом в данном случае является частью измерительного устройства.

Волновая функция  $\Psi(X, Y, Z, x)$  должна удовлетворять уравнению Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{H}\Psi, \quad (12.13)$$

где  $\mathcal{H}(X, Y, Z, x) = T(X, Y, Z) + \mathcal{H}_0(x, X, Y, Z)$ ,  $\mathcal{H}_0$  — гамильтониан, описывающий внутреннее движение атома.

При наличии внешнего поля мы имеем

$$\mathcal{H}_0(x, X, Y, Z)\psi_n(x) = E_n(X, Y, Z)\psi_n(x), \quad (12.14)$$

причем здесь использовано предположение, что внешнее поле не деформирует атом (функция  $\psi_n(x)$  осталась неизменной). Далее,  $T(X, Y, Z)$  есть гамильтониан для движения центра тяжести атома; так как никакого другого взаимодействия атома с внешним полем, кроме того, которое вызвано наличием у атома магнитного (или электрического) момента, не предполагается, то гамильтониан  $T(X, Y, Z)$  есть попросту гамильтониан кинетической энергии всего атома в целом.

Подставляя теперь (12.12) в уравнение (12.13), умножая результат на какую-либо из функций  $\psi_m^*(x)$  и интегрируя по внутренним переменным ( $x$ ), мы получим в силу условия ортогональности этих функций

$$\int \psi_m^*(x)\psi_n(x)dx = \delta_{nm} \quad (12.15)$$

систему уравнений для функций  $\Psi_m(X, Y, Z)$ :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_m}{\partial t} = [T + E_m(X, Y, Z)]\Psi_m. \quad (12.16)$$

В этих уравнениях зависящая от координат  $X, Y, Z$  энергия атома  $E_m(X, Y, Z)$  играет роль потенциальной энергии для движения атома как целого.

Ввиду макроскопического характера внешнего поля  $H$  оно меняется совсем плавно на протяжении длины волны  $\lambda = \hbar/M_{\text{ат}}v$  атома так, что  $(\partial H/\partial z)\lambda \ll H$ . Это условие и есть как раз условие применимости классической механики к движению атома как целого. Поэтому мы представим функцию  $\Psi_m(X, Y, Z)$  в виде

$$\Psi_m(X, Y, Z) = \sqrt{\rho_m(X, Y, Z)} e^{\frac{i}{\hbar} S_m(X, Y, Z)}, \quad (12.17)$$

где  $S_m(X, Y, Z)$  — классическая функция действия, а  $\rho_m(X, Y, Z)$  — плотность атомов в пространстве  $X, Y, Z$ . Подставляя (12.17) в уравнение Шрёдингера (12.16) и пренебрегая высшими степенями постоянной Планка  $\hbar$ , после отделения мнимой части от действительной получим

$$\frac{\partial S_m}{\partial t} = \frac{1}{2M_{\text{ат}}}(\nabla S_m)^2 + E_m(X, Y, Z)S_m, \quad (12.18)$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} - \frac{1}{M_{\text{ат}}}(\rho_m \nabla S_m) = 0. \quad (12.18^*)$$

Первое из этих уравнений есть уравнение Гамильтона–Якоби для функции действия  $S_m$ , а второе — уравнение непрерывности для плотности  $\rho_m$  атомов в  $m$ -м пучке. Отношение  $-(\nabla S_m/M_{\text{ат}})$  есть не что иное, как скорость атомов  $v_m$  пучка; поэтому уравнение (12.18\*) утверждает, что частицы будут двигаться так, что их поток через любое сечение трубки, образованной траекториями частиц, будет постоянен. Нам нет необходимости решать эти уравнения. Проще, имея в виду классический характер движения, воспользоваться прямо уравнениями Ньютона

$$M_{\text{ат}} \frac{d^2 X_m}{dt^2} = 0, \quad M_{\text{ат}} \frac{d^2 Y_m}{dt^2} = 0, \quad M_{\text{ат}} \frac{d^2 Z_m}{dt^2} = -\frac{\partial E_m}{\partial Z}. \quad (12.19)$$

Из этих уравнений находим

$$X_m = vt + X_0, \quad Y_m = Y_0, \quad Z_m = \frac{1}{2M_{\text{ат}}} \frac{\partial E_m}{\partial Z} t^2 + Z_0, \quad (12.19^*)$$

где  $X_0, Y_0, Z_0$  — начальные значения координат  $X, Y, Z$ , а  $v$  — скорость атома вдоль оси  $Ox$ . Напомним, что наше решение приближенно. В действительности атомы, проходящие диафрагму  $D$ , не будут двигаться по классическим траекториям; пучок будет расползаться. Чтобы учесть это квантовое явление, следует сделать еще один шаг в приближенном решении уравнения (12.16), приняв во внимание члены, содержащие первые степени  $\hbar$ . Мы не будем этого делать и ограничимся оценками. В силу соотношения неопределенностей (12.9) ширина пучка в направлении  $Oz$  будет возрастать. Именно, из соотношения (12.9) следует, что  $v_z > \hbar/2M_{\text{ат}}\Delta Z_0$ , стало быть,  $\Delta Z_t = v_z t > (\hbar/2M_{\text{ат}}\Delta Z_0)t$ . Для того чтобы пучки, принадлежащие разным внутренним состояниям  $n$  и  $m$  разделились, необходимо, чтобы

$$\left| \frac{\partial E_m}{\partial Z} - \frac{\partial E_n}{\partial Z} \right| \frac{t^2}{2M_{\text{ат}}} > \frac{\hbar t}{2M_{\text{ат}}\Delta Z_0}, \quad \text{или} \quad \left| \frac{\partial E_n}{\partial Z} - \frac{\partial E_m}{\partial Z} \right| \Delta Z_0 t > \hbar. \quad (12.20)$$

В силу слабой зависимости  $E_n$  от  $z$  можно записать

$$|E_n - E_m|t > \hbar, \quad (12.21)$$

т. е. возникает известное соотношение между энергией измеряемого состояния  $E$  и длительностью измерения  $t$ . Это соотношение не следует смешивать с соотношением неопределенностей для  $p$  и  $q$  [4].

Обратимся теперь к работе детекторов  $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ , стоящих на пути пучков.

Для дальнейшего нам будет удобнее считать, что функции, описывающие движение центра тяжести атома  $\Psi_n(X, Y, Z)$ , также нормированы на единицу во всем пространстве  $X, Y, Z$ ; для этого достаточно положить  $\Psi_n(X, Y, Z) = c_n \Phi_n(X, Y, Z)$ , тогда суперпозиция (12.12) перепишется в виде

$$\Psi_n(X, Y, Z, x) = \sum_n c_n \Phi_n(X, Y, Z) \psi_n(x). \quad (12.22)$$

Отсюда следует, что вероятность того, что атом находится в окрестности точки  $X, Y, Z$ , будет равна

$$\begin{aligned} W(X, Y, Z) dX dY dZ &= \int |\Psi_M(X, Y, Z, x)|^2 dx = \\ &= \sum_n |c_n|^2 |\Phi_n(X, Y, Z)|^2 dX dY dZ. \end{aligned} \quad (12.23)$$

Найдем теперь вероятность того, что атом принадлежит пучку  $m$ . Это эквивалентно тому, что он имеет энергию  $E_m$ . Согласно (12.23) эта вероятность равна интегралу от  $W(X, Y, Z)$ , распространенному по объему  $V_m$  пучка  $m$ ; если пучки для разных  $m$  не перекрываются друг с другом (что возможно при выполнении условия (12.21)), то этот интеграл равен

$$W_m = \sum_n |c_n|^2 \int_{V_m} |\Phi_n(X, Y, Z)|^2 dX dY dZ = |c_m|^2 \quad (12.24)$$

в полном соответствии с интерпретацией коэффициентов  $c_m$  как указывающих относительное участие состояний  $\psi_m$  с определенной энергией в исходном ансамбле  $\Psi_n$  (12.22).

Обратимся теперь к детекторам, которые регистрируют факт принадлежности атома тому или иному пучку. Такими детекторами могут служить холодные пластинки, поставленные на пути пучков (на рис. 9 пластинки  $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ ). Атом, попадая на такую пластинку, будет отдавать ей всю энергию и абсорбироваться на ней.

Было бы нетрудно показать, что поток атомов на пластинку в каждом пучке пропорционален вероятности  $W_m$ . Поэтому, определяя концентрацию налета и атомов на пластинке, мы можем определить величину  $|c_m|^2$ . «Классичность» прибора, его макроскопичность определяются в нашем примере не только уже отмеченной макроскопичностью полей, отклоняющих атомы, но и классическим характером движения центра тяжести самого атома. В этом любопытном примере сам атом используется как часть макроскопических устройств, направленных на выяснение внутреннего состояния атома. Атом, будучи относительно тяжелой системой, не обнаруживает существенных дифракционных эффектов, движется почти по классической траектории и при-

липает в хорошо определенном месте «холодной» пластинки. Поэтому само прилипание атома в нашем примере есть уже макроскопическое явление, хотя, быть может, и не очень большого масштаба.

Итак, в этом примере мы снова обнаруживаем отмеченные ранее характерные черты процесса измерения: с помощью макроскопических полей и макроскопического движения центра тяжести атома разрушается интерференция различных состояний  $\psi_n(x)$ , образующих исходный квантовый ансамбль  $\Psi_M(X, Y, Z, x)$ . Прилипание тяжелого атома в определенном месте пластинки служит основанием для «стягивания» исходной волновой функции  $\Psi_M$  (12.12) к одному из частных состояний  $\psi_n(x) : \Psi_M \rightarrow \psi_n$ .



детектора. Этот существенный пробел является источником многих недоразумений и неправильных представлений.

Итак, обратимся к математической теории измерения. Вся макрообстановка  $\mathfrak{M}$  может быть представлена в виде условной суммы ее частей:

$$\mathfrak{M} = M + A + D,$$

здесь  $M$  — та часть макрообстановки, которая диктует состояние исходного ансамбля; чтобы не усложнять изложение, будем считать, что исходный ансамбль возникает в чистом состоянии, описываемом волновой функцией  $\Psi_M(x)$  (где  $x$  означает совокупность динамических переменных изучаемой микросистемы  $\mu$ ). Буква  $A$  означает ту часть макрообстановки, которая выполняет роль анализатора, осуществляющего спектральное разложение  $\Psi_M(x)$  по собственным состояниям измеряемой динамической переменной — пусть это будет переменная  $L$ . Для определенности мы будем считать, что эта величина имеет дискретный спектр собственных значений  $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$  и соответствующие им собственные состояния микросистемы  $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x), \dots$ .

Далее идет часть макрообстановки, содержащая детектор  $D$ . По самой сути детектор под действием микрочастицы изменяет свое состояние. Это изменение есть макроскопическое явление. Динамические переменные детектора, с помощью которых описываются его состояние и изменение этих состояний, обозначим через  $Q$ . Поскольку детектор является макроскопической системой (в частности, ему можно приписать температуру  $\theta$ ), то его целесообразней описывать не волновыми функциями  $\Psi(Q)$ , а матрицей плотности  $\rho_D(Q, Q')$ . В связи с этим нам удобнее и нашу микросистему  $\mu$ , взаимодействующую с детектором, также описывать не волновой функцией  $\psi_M(x)$ , а матрицей плотности  $\rho_M(x, x')$ . При наличии взаимодействия обе матрицы должны быть объединены в одну общую матрицу плотности, которая теперь зависит от времени:

$$\rho_{D+\mu} = \rho_{D+\mu}(Q, x; Q', x', t). \quad (13.1)$$

Эта матрица плотности подчиняется уравнению движения

$$\frac{\partial \rho_{D+\mu}}{\partial t} + [\mathcal{H}, \rho_{D+\mu}] = 0, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_D(Q) + \mathcal{H}_\mu(x) + W_{D\mu}(Q, x), \quad (13.2)$$

причем здесь  $\mathcal{H}_\mu(x)$  — гамильтониан микросистемы  $\mu$ ,  $\mathcal{H}(Q)$  — гамильтониан детектора  $D$ , а  $W_{D\mu}(Q, x)$  — оператор, описывающий их взаимодействие.

Это уравнение нетрудно написать, но в интересных случаях крайне трудно решить. Достаточно вспомнить, что детекторы обычно представляют собой крайне сложные макроскопические системы: это чувствительное зерно фотоэмюльсии, переохлажденный пар в камере Вильсона, электронная лавина в счетчике Гейгера и т. п.! Впоследствии мы все же приведем некоторые схематические примеры работы условных детекторов, а сейчас рассмотрим формально работу детектора на основе матрицы  $\rho_{D+\mu}$ .

Общую матрицу плотности  $\rho_{D+\mu}(Q, x; Q', x')$  можно без всяких ограничений представить в виде

$$\rho_{D+\mu}(Q, x; Q', x') = \sum_{m,n} \psi_m^*(x) \rho_{mn}(Q; Q') \psi_n(x'), \quad (13.3)$$

где  $\psi_n(x)$  — собственные функции измеряемой величины  $L$ . В общем случае эта матрица, конечно, недиагональна по переменной  $L$ .

Если наш измерительный прибор хорошо выполняет свое назначение, то при достаточно большом времени  $t$  возникает такая ситуация, что если динамические переменные детектора  $Q$  лежат в некотором интервале  $Q'_n < Q < Q''_n$ , то в этой области переменных  $Q$  (это, например, может быть положение стрелки макробиора на определенном месте его шкалы!) все элементы матрицы при  $t \rightarrow \infty$

$$\rho_{mn}(Q, Q', t) = 0, \quad (13.3^*)$$

кроме

$$\rho_{nn}(Q, Q', t) \neq 0 \quad (13.3^{**})$$

при

$$Q'_n < Q, \quad Q' < Q''_n. \quad (13.3^{***})$$

Это условие означает, во-первых, разрушение интерференции отдельных частных состояний микросистемы  $\psi_n(x)$ , во-вторых, однозначное соответствие значения измеряемой динамической переменной  $L = L_n$  состоянию детектора  $Q$ . Изложенная теория является наиболее общей схемой измерения в квантовой механике, включающей не только микросистему, но обе части макробиора — анализирующую и детектирующую.

Условие (13.3\*), (13.3\*\*) и (13.3\*\*\*) можно рассматривать как «техническое условие» на хороший макроскопический прибор.

## А. Определение внутреннего состояния атома

Рассмотрим теперь с учетом работы детектора пример определения состояния атома путем отклонения во внешнем поле, описанный в § 12.

В этом случае мы должны теперь пополнить нашу систему атом+электрон еще детектором, которым в данном примере являлась холодная пластинка, абсорбирующая на своей поверхности атом. Обозначим через  $q$  совокупность динамических переменных, описывающих пластинку; это, например, могут быть нормальные координаты, описывающие колебания ее атомов. Температура пластинки пусть будет  $\theta$ . Тогда вся матрица плотности, описывающая систему атом+электрон+детектор, может быть записана в виде

$$\rho(Q, x, q; Q', x', q', \theta, t) = \sum_{m,n} \Psi_m^*(Q, t) \psi_m^*(x) \rho_{mn}(q, q', \theta, t) \Psi_n(Q', t) \psi_n(x'), \quad (13.4)$$

где  $\Psi_n(Q, t)$  и  $\psi_n(x)$  имеют те же значения, что и в § 12: волновая функция  $\psi_n(x)$  описывает состояние электронов в атоме, а функция  $\Psi_n(Q, t)$  — состояние движения атома в целом; наконец, матричный элемент  $\rho_{mn}(q, q', \theta, t)$  описывает состояние детектора  $D$ .

Под действием внешнего поля пучки, описываемые функциями  $\Psi_n(Q)$ , разделяются в пространстве, так что матрица (13.4) в течение достаточно большого времени  $t$  перейдет в матрицу

$$\rho(Q, x, q; Q', x', q', \theta, t) \rightarrow \sum_n |\Psi_n(Q)|^2 |\psi_n(x)|^2 \rho_{nn}(q, q', \theta). \quad (13.5)$$

В этой матрице функции  $\Psi_n(Q)$  имеют вид

$$\Psi_n(Q) = \exp \left[ -\frac{(Q - Q_n)^2}{2a^2} \right] H \left( \frac{Q - Q_n}{a} \right), \quad (13.6)$$

описывающий состояние атома, адсорбированного на пластинке около точки  $Q = Q_n$ . Такой атом колеблется около этой точки с амплитудой, равной  $a = \sqrt{\hbar/2M_{\text{ат}}\omega_0}$ , где  $M_{\text{ат}}$  — масса атома, а  $\omega_0$  — частота его колебаний. Матричный элемент  $\rho_{nn}(q, q', \theta, t)$  описывает возбужденное состояние решетки атомов пластинки, которое возникло в результате передачи энергии адсорбированного атома атомам пластинки. Тот факт, что функция, описывающая  $n$ -й пучок, перешла в функцию  $\Psi_n(Q)$ , означает, что «стрелка» прибора (в нашем случае — тяжелый атом) заняла определенное положение на «шкале» прибора — на холодной пластинке! Действительно, в соответствии с общей теорией, развитой в предыдущем параграфе, в силу пространственного разделения пучков, при заданном значении координат атома, адсорбированного около  $Q \approx Q_n \pm a$ , все члены матрицы (13.5) равны нулю, кроме  $n$ -го.

Заметим, что для того чтобы наш детектор был достаточно эффективным, необходимо, чтобы при каждом попадании атома из пучка на пластинку атом адсорбировался. Необходимым условием такой адсорбции является низкая температура  $\theta$  пластинки. При этом условии система пластинка + атом пучка является нестабильной в том смысле, что передача энергии атома пучка атомам пластинки ведет к ее нагреванию, т.е. к увеличению энтропии системы. Обратный же процесс маловероятен, так как он сопровождался бы уменьшением энтропии пластинки.

## Б. Определение импульса микрочастицы по ее взаимодействию с макроскопическим телом

Рассмотрим теперь простой, но несколько формальный пример определения импульса  $k$  микрочастицы  $\mu$  по ее взаимодействию с макроскопическим телом [1].

С самого начала очевидно, что это тело должно находиться в неустойчивом (или в почти неустойчивом) равновесии, иначе микрочастица не сможет «сдвинуть» его с места. В качестве такого тела мы предложим шарик массы  $M$ , координата его центра тяжести пусть будет  $Q$ , имеющий потенциальную

энергию  $U(Q)$  вида, изображенного на рис. 10. Мы, следовательно, предполагаем, что шарик находится в максимуме потенциальной энергии  $U$ . Его относительная устойчивость обусловлена небольшим относительным минимумом энергии  $U(Q)$ . Достаточно сообщить ему незначительную энергию  $\Delta E > U_0 - E_0$ , и шарик покатится под «откос». Таким образом, потенциальная энергия  $U(Q)$  имеет вид высокого вулкана с неглубоким кратером (см. рис. 10). Этот шарик и будет служить детектором, определяющим направление импульса микрочастицы (она может толкнуть шарик *направо* или *налево*).

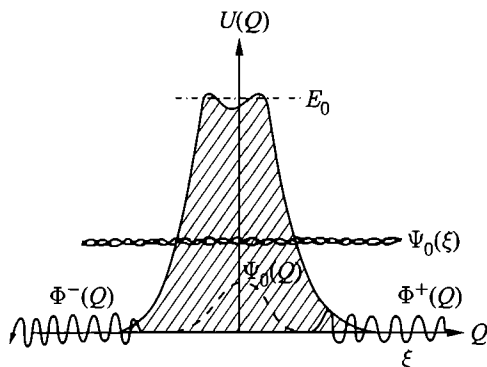


Рис. 10. Здесь изображена потенциальная энергия  $U(Q)$  тяжелого шарика.  $E_0$  — исходное состояние. На этом же графике приведены волновые функции  $\Psi_0(Q)$ ,  $\Phi^\mp(Q)$  и  $\Psi_0(\xi)$

Ввиду того, что, преследуя максимальную простоту, мы приписываем шарiku лишь одну степень свободы  $Q$ , нам будет удобнее описывать всю задачу не матрицей плотности, а волновыми функциями.

Предположим, что в начальный момент времени  $t = 0$  микрочастица  $\mu$  описывается волновой функцией

$$\Psi_0(\xi) = A^+ e^{ik\xi} + A^- e^{-ik\xi}, \quad (13.7)$$

где  $\xi$  — координата микрочастицы,  $k$  — импульс. Таким образом, предполагается, что имеется чистое состояние, однако с неопределенным импульсом  $\pm k$ . Задача нашего прибора заключается в определении знака импульса (направления движения частицы).

Волновую функцию макроприбора (шарика  $M$ ) при  $t = 0$  обозначим через

$$\Psi_0(Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{Q^2}{2a^2}\right), \quad (13.8)$$

где  $a = \sqrt{\hbar/M\omega_0}$ ,  $\omega_0$  — частота колебаний шарика в глубине кратера. Таким образом, при  $t = 0$  волновая функция всей системы (микрочастица  $\mu$  + шарик  $M$ ) будет

$$\Phi(Q, \xi, 0) = \Phi_0(Q, \xi) = \Psi_0(Q)\psi_0(\xi). \quad (13.9)$$

Гамильтониан, описывающий эту систему, очевидно, равен

$$\mathcal{H}(Q, \xi) = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial Q^2} + U(Q) - \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + W(Q, \xi), \quad (13.10)$$

где  $W(Q, \xi)$  — энергия взаимодействия шарика и микрочастицы. Микрочастицу мы считаем свободной, а шарик  $\mu$  имеет потенциальную энергию  $U(Q)$ . Для простоты предположим, что  $W(Q, \xi)$  имеет вид

$$W(Q, \xi) = g\delta(Q - \xi) \quad (13.11)$$

и волновая функция  $\Phi(Q, \xi, t)$  для любого момента времени  $t$  подчиняется уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mathcal{H}(Q, \xi)\Phi. \quad (13.12)$$

Будем искать эту функцию в виде

$$\Phi(Q, \xi, t) = \Phi_0(Q, \xi) + \Phi^+(Q, \xi, t) + \Phi^-(Q, \xi, t). \quad (13.13)$$

Считая, что константа связи  $g$  мала, найдем функции  $\Phi^+$  и  $\Phi^-$  в первом приближении теории возмущений. В этом приближении

$$\begin{aligned} \Phi^+(Q, \xi, t) &= \int U^+_{p'k'}(t) \Psi_{p'}(Q') e^{ik'\xi} e^{i(\omega_{p'} + \omega_k)t} dp' dk' = \\ &= e^{i(\omega_0 + \omega_k)t} \int U^+_{p'k'}(t) \Psi_{p'}(Q) e^{ik'\xi} e^{-i\Omega t} dp' dk', \end{aligned} \quad (13.14)$$

$$\Omega = \omega_0 + \omega_k - \omega_{p'} - \omega_{k'} = \frac{z}{t}. \quad (13.15)$$

Здесь  $\omega_0 = E_0/\hbar$  — энергия шарика в начальном состоянии;  $\omega_{p'} = E_{p'}/\hbar$ ;  $E_{p'}$  — его энергия в конечном состоянии,  $p'$  — импульс шарика после перехода в возбужденное состояние;  $\omega_k = \varepsilon_k/\hbar$  и  $\omega_{k'}/\hbar$  — энергия частицы до взаимодействия и после взаимодействия с шариком.

Функция  $\Phi^-(Q, \xi, t)$  имеет аналогичный вид.

Далее, интегрирование уравнения (13.12) после подстановки в него функции (13.13) с учетом (13.14) дает

$$U^+_{p'k'}(t) = \frac{1}{\hbar} \frac{(e^{i\Omega t} - 1)}{\Omega} U^+_{p'k', 0k}, \quad (13.16)$$

где матричный элемент  $U^+_{p'k', 0k}$  равен

$$U^+_{p'k', 0k} = gA^+ \int \Psi_{p'}^*(Q) e^{-ik'\xi} \delta(Q - \xi) \Psi_0(Q) e^{ik\xi} dQ d\xi. \quad (13.17)$$

Волновая функция шарика в возбужденном состоянии  $\Psi_p(Q)$  может быть записана в квазиклассическом приближении в виде

$$\Psi_{p'}(Q) \sim N_{p'} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{p'}(Q)\right), \quad (13.18)$$

где  $N_{p'}$  — нормирующий множитель, а  $S_{p'}(Q)$  — функция действия, приближенно равная  $S_{p'}(Q) \approx p'Q$ . По этой причине интеграл в (13.17) равен фурье-образу  $\tilde{\Psi}_0(\alpha)$  от  $\Psi_0(Q)$  при  $\alpha = p' + k - k$ . Поэтому

$$\Phi^+(Q, \xi, t) = e^{i(\omega_0 + \omega_k)t} \frac{gA^+}{\hbar} \int N_{p'}^* \tilde{\Psi}_0(p' + k' - k) \frac{(1 - e^{-ik\xi})}{\Omega} \Psi_{p'}(Q) e^{ik'\xi} dp' dk'. \quad (13.19)$$

Пусть теперь  $P$  есть то значение импульса шарика, которое отвечает сохранению энергии при взаимодействии. Из (13.15) следует, что это будет при  $z/t = 0$  и  $\omega_p = E_p/\hbar = \omega_0 + \omega_k - \omega_{k'}$ ,  $E_p = P^2/2M + \text{const}$ ; поэтому

$$\frac{P'^2}{2M} - \frac{P^2}{2M} = -\frac{z}{t}. \quad (13.20)$$

Отсюда находим, что  $P' - P = -z/(vt)$ ,  $dP' = -dz/(vt)$ , где  $v = P/M$  есть скорость шарика. Далее, при  $z \approx 0$

$$\frac{k'^2}{2\mu} - \frac{k^2}{2\mu} = \omega_0 - \frac{P'^2}{2M}, \quad (13.21)$$

или

$$(k' - k)(k' + k) = 2\mu\omega_0 - \frac{\mu}{M}P'^2. \quad (13.21^*)$$

Если функция  $\Psi_0(Q)$  не слишком острая (амплитуда не очень мала, что будет при не очень глубоком кратере!), то ее образ Фурье  $\tilde{\Psi}_0(p' + k' - k)$  будет заметно отличен от нуля только при

$$p' + k' - k \approx 0. \quad (13.22)$$

Из (13.21) и (13.22) при  $M \rightarrow \infty$  следует

$$k' = -k, \quad (13.23)$$

$$P = 2k, \quad (13.24)$$

что и следовало ожидать при столкновении легкой частицы с тяжелым, *слабо* связанным шариком: произошло упругое отражение легкой микрочастицы с малой (при  $M \rightarrow \infty$  — исчезающе малой) передачей энергии.

Обозначим теперь

$$p' + k' - k = P + k' - k - \frac{z}{vt} = q,$$

так что

$$dk' = dq, \quad k' = q - P + k + \frac{z}{vt}.$$

Вводя в интеграл (13.19) новые переменные интегрирования  $q$  и  $z$ , получим из (13.19)

$$\Phi^+(Q, \xi, t) = \frac{gA^+}{\hbar} e^{i(\omega_0 + \omega_k)t} \frac{|N_p|^2}{v} \Psi_0(\xi) e^{iPQ} e^{i(k-P)\xi} I^+ \left( \frac{Q - \xi}{vt} \right), \quad (13.25)$$

где

$$I^+ \left( \frac{Q - \xi}{vt} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-iz}}{z} \exp \left[ -\frac{iz}{vt} (Q - \xi) \right] dz. \quad (13.26)$$

Если обозначить известный разрывный интеграл

$$J(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iaz}}{z} dz = \begin{cases} \pi i, & a > 0, \\ -\pi i, & a < 0, \end{cases} \quad (13.27)$$

то

$$I^+ \left( \frac{Q - \xi}{vt} \right) = J \left( \frac{\xi - Q}{vt} \right) - J \left( \frac{vt + \xi - Q}{vt} \right). \quad (13.28)$$

Заметим, что для  $I^+ vt > 0$ , так как в этом случае  $P = 2k > 0$ . Поэтому из (13.28) следует, что  $I^+ = -2\pi i$  для  $vt > Q - \xi$  и  $Q - \xi > 0$ ; иначе  $I^+ = 0$ . Напомним, что ввиду наличия в  $\Phi^+$  множителя  $\Psi_0(\xi)$  важны только малые значения  $|\xi| \lesssim a$ . Поэтому полученный результат означает, что  $\Phi^+(Q, \xi, t)$  отлична от нуля при  $t \rightarrow \infty$  только в области  $0 < Q < \infty$ , т. е. справа от вершины кратера, что соответствует полученному от микрочастицы положительному импульсу  $P = 2k$ .

Подобным же образом вычисляется и функция  $\Phi^-(Q, \xi, t)$ . В этом случае  $P < 0$ ,  $v < 0$ , и вместо множителя  $I^+$  получим множитель

$$I^- \left( \frac{Q - \xi}{vt} \right) = J \left( \frac{Q - \xi}{vt} \right) - J \left( \frac{vt + \xi - Q}{vt} \right), \quad (13.28^*)$$

отличный от нуля для  $vt < Q - \xi < 0$ . В этом случае шарик выпадает из кратера налево.

Построим теперь матрицу плотности для нашего случая:

$$\begin{aligned} \rho(Q, \xi; Q', \xi', t) &= \Phi^*(Q, \xi, t) \Phi(Q', \xi', t) = \\ &= \Phi_0^*(Q, \xi, t) \Phi_0(Q', \xi', t) + \Phi_0^*(Q, \xi, t) \Phi^+(Q', \xi', t) + \\ &+ \Phi_0^*(Q, \xi, t) \Phi^-(Q', \xi', t) + \Phi^{+*}(Q, \xi, t) \Phi_0(Q', \xi', t) + \\ &+ \Phi^{-*}(Q, \xi, t) \Phi_0(Q', \xi', t) + \Phi^{+*}(Q, \xi, t) \Phi^-(Q', \xi', t) + \\ &+ \Phi^{-*}(Q, \xi, t) \Phi^+(Q', \xi', t) + \Phi^{+*}(Q, \xi, t) \Phi^+(Q', \xi', t) + \\ &+ \Phi^{-*}(Q, \xi, t) \Phi^-(Q', \xi', t). \end{aligned} \quad (13.29)$$

При  $t \rightarrow \infty$  и  $|Q|, |Q'| > a$  все члены этой матрицы исчезают, кроме двух последних. Именно, члены, содержащие  $\Phi_0$  исчезают при  $Q, Q' \rightarrow \infty$  как

$\exp(-Q^2/a^2)$  или  $\exp(-Q'^2/a^2)$ , а интерференционные члены, содержащие произведения типа  $\Phi^{+*}\Phi^-$ , исчезают при  $t \rightarrow \infty$  из-за свойств функции  $I^\pm((Q - \xi)/vt)$ . Поэтому при  $t \rightarrow \infty$ , и для  $|Q|, |Q'| \gg a$  получаем

$$\rho(Q, \xi; Q', \xi', t) = \Phi^{+*}(Q, \xi, t)\Phi^+(Q', \xi', t) + \Phi^{-*}(Q, \xi, t)\Phi^-(Q', \xi', t),$$

$$t \rightarrow \infty, \quad |Q|, |Q'| \gg a. \quad (13.30)$$

Мы видим, что макроскопический прибор разрушает интерференцию состояний микрочастицы  $A^+e^{ik\xi}$  и  $A^-e^{-ik\xi}$ ; далее, при  $Q, Q' \rightarrow \infty$

$$\rho(Q, \xi; Q', \xi', t) \rightarrow \Phi^{+*}(Q, \xi, t)\Phi^+(Q', \xi', t) \quad (13.31)$$

и при  $Q, Q' \rightarrow \infty$

$$\rho(Q, \xi; Q', \xi', t) \rightarrow \Phi^{-*}(Q, \xi, t)\Phi^-(Q', \xi', t). \quad (13.31^*)$$

Эти два случая отвечают наблюдению шарика либо справа от кратера (13.31), либо слева от него (13.31\*).

При  $Q \rightarrow \infty$  и  $Q' \rightarrow -\infty$  или  $Q \rightarrow -\infty$  и  $Q' \rightarrow \infty$  (это случаи интерференции результатов наблюдений справа и слева)  $\rho(Q, \xi; Q', \xi', t) \rightarrow 0$ . Этого и следовало ожидать от «хорошего» прибора: его «стрелка» должна занимать одно из возможных, определенных положений. В нашем примере «стрелкой» служит тяжелый макроскопический шарик.

## В. Термодинамически неустойчивый детектор

Рассмотрим схематический прибор, поясняющий работу термодинамически неустойчивого детектора микрочастицы.

В качестве микрочастицы будем иметь в виду атом, имеющий один валентный электрон, так что весь атом имеет магнитный момент; равный магнитному моменту этого электрона:  $\mu_B \sigma$ , где  $\mu_B$  — магнетон Бора, а  $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  — это спиновые матрицы Паули. Волновая функция атома  $\Psi$  может быть записана в виде

$$\Psi(Q, x) = \Psi_1(Q)\psi_1(x) + \Psi_2(Q)\psi_2(x), \quad (13.32)$$

где  $\Psi_1(Q)$  и  $\Psi_2(Q)$  — функции, описывающие движение атома в целом;  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$  функции, описывающие внутреннее состояние атома и соответствующие двум возможным ориентациям магнитного момента атомного электрона.

Для определенности будем считать, что магнитное поле направлено по оси  $Oz$ , так что функция  $\psi_1$  отвечает ориентации момента по оси  $Oz$ , а функция  $\psi_2$  — ориентации против направления этой оси. Предположим, что под действием внешнего магнитного поля  $H$ , которое мы считаем неоднородным, пучки атомов, имеющих различную ориентацию магнитных моментов, уже разделены пространственно, так что

$$\Psi_1(Q)\Psi_2(Q) = 0, \quad (13.33)$$

как это было описано в § 12.



Таким образом, будем считать, что первая задача измерительного прибора — разрушение интерференции состояний  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$ , соответствующих различным ориентациям спина валентного электрона, уже выполнена. Иными словами, после прохождения неоднородного магнитного поля нам остается только «подставить» под каждый из пучков свой детектор, который бы зарегистрировал факт попадания частицы, принадлежащей соответствующему пучку, т. е. фактически зарегистрировал бы то или иное состояние частицы («состояние» — в смысле ориентации ее спина).

В качестве такого детектора рассмотрим систему из большого числа осцилляторов  $s = 1, 2, \dots, N$  ( $N \rightarrow \infty$ ), которые, чтобы не утяжелять расчет дополнительными обозначениями, будем считать двумерными, совершающими колебания в плоскости  $xu$ .

Далее, предположим, что колебания типа  $x$  и колебания типа  $y$  практически не взаимодействуют друг с другом. Это позволит нам приписать различную температуру  $\theta$   $x$ - и  $y$ -колебаниям. Именно, мы будем считать, что в исходном состоянии детектора (в «исходном» — означает до взаимодействия с микрочастицей  $\mu$ )  $x$ -колебания связаны с термостатом Гиббса, имеющим температуру  $\theta$ ; поэтому и сами  $x$ -колебания имеют при  $t = 0$  ту же температуру; что касается  $y$ -колебаний, то мы предположим, что в момент  $t = 0$  они находятся при температуре абсолютного нуля. Таким образом, детектор находится в термодинамически неустойчивом состоянии: всякое, даже небольшое воздействие, связывающее  $x$ - и  $y$ -колебания, немедленно приведет к интенсивной передаче энергии от  $x$ -колебаний к  $y$ -колебаниям [2].

Факт нагревания  $y$ -колебаний и есть то макроскопическое явление, которое *удостоверяет* состояние данной индивидуальной микрочастицы, в нашем примере — атома.

Рассмотрим теперь математически работу такого детектора. Гамильтониан невозмущенной системы наших осцилляторов напомним в виде

$$H_0 = \sum_{s=1}^N H_0(x_s, y_s) - E_0, \quad (13.34)$$

$$H_0(x_s, y_s) = -\frac{\hbar^2}{2M} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_s^2} \right) + \frac{M\omega_0^2}{2} (x_s^2 + y_s^2), \quad (13.35)$$

где  $E_0$  — нулевая энергия,  $E_0 = N\hbar\omega_0/2$ ,  $M$  — масса осцилляторов,  $\omega_0$  — частота их собственных колебаний.

Энергию взаимодействия  $W$  этих осцилляторов с микрочастицей из пучка, падающего на детектор, примем в виде<sup>1</sup>

$$W = \omega \sum_{s=1}^N \mathbf{M}_s \boldsymbol{\sigma}_s = -i\hbar\omega \sum_{s=1}^N \sigma_z \frac{\partial}{\partial \varphi_s}, \quad (13.36)$$

<sup>1</sup> Вывод энергии взаимодействия  $W$  и явная формула для параметра  $\omega$  даны в работе № 70, лекция 13. — Прим. ред.

где  $\mathbf{M}_s$  — механический момент осциллятора, а  $\sigma_s$  — спиновая матрица оптического электрона атома. Так как мы предположили, что спины атомов в пучке ориентированы по оси  $Oz$ , то вместо  $\mathbf{M}\sigma$  мы написали  $M_z\sigma_z$ , где

$$M_z = -i\hbar \left( x_s \frac{\partial}{\partial y_s} - y_s \frac{\partial}{\partial x_s} \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi_s},$$

и вместо  $\sigma$  — просто

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

очевидно, для одного детектора нужно вместо  $\sigma_z$ , взять  $+1$ , а для другого  $-1$ .

Заметим, что

$$x_s = r_s \cos \varphi_s, \quad y_s = r_s \sin \varphi_s, \quad (13.37)$$

$$r_s = \sqrt{x_s^2 + y_s^2}. \quad (13.37^*)$$

Детектор  $D$  будем описывать матрицей плотности  $\rho$ , которую возьмем в  $x, y$ -представлении. Подразумевая под  $x$  всю совокупность  $x$ -координат осцилляторов  $(x_1, x_2, \dots, x_s, \dots, x_N)$ , а под  $y$  — таким же образом все координаты  $(y_1, y_2, \dots, y_s, \dots, y_N)$ , мы можем записать матрицу  $\rho$  в виде

$$\rho = \rho(x, y; x', y', t).$$

Матрица  $\rho$  удовлетворяет уравнению (см. § 6)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + [H_0 + W, \rho] = 0. \quad (13.38)$$

Нам удобнее будет вместо матрицы  $\rho$  иметь дело с матрицей

$$\tilde{\rho} = \exp \left( \frac{iH_0 t}{\hbar} \right) \rho \exp \left( -\frac{iH_0 t}{\hbar} \right). \quad (13.39)$$

Заметим, что  $[W, H_0] = 0$ , поэтому  $\widetilde{W} = W$ , и, подставляя вместо  $\rho$  ее выражение через  $\tilde{\rho}$ , мы получим для  $\tilde{\rho}$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + [W, \tilde{\rho}] = 0. \quad (13.40)$$

При подстановке сюда оператора  $W$  в виде (13.36) следует придерживаться правила умножения матриц с непрерывными строками и колонками. Для этого надо записать  $W$  в матричной форме. Например, вместо оператора  $-i\hbar(\partial/\partial q)$  следует писать

$$P_{q'q''} \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial q'} \delta(q' - q''). \quad (13.41)$$

Умножение  $P$  на  $\rho$  означает

$$(P\rho)_{q'q''} = \int P_{q'q''} \rho(q''', q'') dq''' = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q'} \rho(q', q'') \quad (13.41^*)$$

и т. п.

Если воспользоваться этими простыми правилами, то подстановка  $W$  в (13.40) приводит в раскрытом виде к простому уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \omega \sum_{s=1}^N \left( \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \varphi_s} + \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \varphi'_s} \right) = 0. \quad (13.42)$$

Это уравнение решается элементарно. Его общий интеграл есть

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\omega t + \varphi_1, \omega t + \varphi_2, \dots, \omega t + \varphi_s, \dots, \omega t + \varphi_N; r_1, r_2, \dots, r_s, \dots, r_N; \omega t + \varphi'_1, \omega t + \varphi'_2, \dots, \omega t + \varphi'_s, \dots, \omega t + \varphi'_N; r'_1, r'_2, \dots, r'_s, \dots, r'_N), \quad (13.43)$$

здесь  $r_1, r_2, \dots, r_N$  и  $r'_1, r'_2, \dots, r'_N$  входят как параметры.

Обратимся теперь к начальным данным для этой матрицы. Чтобы избежать загромождающих формулы множителей, введем в качестве единицы длины величину  $l = \sqrt{\hbar/2M\omega_0}$  и вместо температуры  $\theta$  обратную ей величину  $\beta = \hbar\omega_0/\theta$ . В этих единицах все величины станут безразмерными. При  $t = 0$  матрица  $\tilde{\rho}(x, y; x', y', 0) = \rho_\theta(x, x')\rho_0(y, y')$ .

Соответственно сделанным предположениям об абсолютном нуле температуры  $y$ -колебаний имеем

$$\rho_0(y, y') = C_0 \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{s=1}^N (y_s^2 + y_s'^2) \right], \quad (13.44)$$

где  $C_0$  — постоянный нормировочный множитель, а  $\exp(-y_s^2/2)$  — волновая функция, описывающая нулевое колебание  $s$ -го осциллятора по оси  $Oy$ .

Значительно сложнее обстоит дело с вычислением матрицы  $\rho_\theta(x, x')$ , так как  $x$ -колебания находятся при температуре  $\theta$ . В этом случае состояние является смешанным и веса отдельных состояний  $\psi_n(x)$ , имеющих энергию  $E_n$ , будут  $e^{-E_n/\theta} = e^{-\beta E_n}$ . Поэтому матрица  $\rho_\theta(x, x')$ , описывающая ансамбль, находящийся в равновесии с термостатом Гиббса при температуре  $\theta$ , запишется в виде

$$\rho_\theta(x, x') = e^{\beta F(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \psi_n^*(x) \psi_n(x') = e^{\beta F(\beta)} Z_\theta(x, x'), \quad (13.45)$$

где

$$Z_\theta(x, x') = \sum_n e^{-\beta E_n} \psi_n^*(x) \psi_n(x'). \quad (13.46)$$

Здесь сумма распространена сначала по всем состояниям  $n$ , имеющим энергию  $E_n$ , а затем — по всем состояниям с различной энергией  $E_n$ .

Даже в случае осцилляторов прямое вычисление такой суммы весьма затруднительно. Поэтому мы применим обходной маневр, основанный на том факте, что если  $H(x)$  есть оператор Гамильтона рассматриваемой системы, а  $\psi_n^*(x)$  — его собственная функция, то

$$H(x)\psi_n^*(x) = E_n\psi_n^*(x),$$

и, стало быть,

$$f(H)\psi_n^*(x) = f(E_n)\psi_n^*(x). \quad (13.47)$$

Поэтому мы можем записать (13.46) в виде

$$Z_\theta(x, x') = \sum_n e^{-\beta H(x)} \psi_n^*(x) \psi_n(x'), \quad (13.46^*)$$

и, дифференцируя по  $\beta$ , найдем, что сумма  $Z_\theta(x, x')$  удовлетворяет дифференциальному уравнению [1]:

$$\frac{\partial Z_\theta}{\partial \beta} + H Z_\theta = 0. \quad (13.48)$$

Вместо  $H(x)$  мы должны подставить сюда невозмущенный оператор Гамильтона для  $x$ -колебаний, т. е.

$$H_0(x) = \sum_{s=1}^N \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} + \frac{1}{2} x_s^2 \right) - \frac{1}{2} N, \quad (13.49)$$

который мы берем из (13.34) и (13.35), учитывая новые единицы измерения длины  $x$ .

Переменные в уравнении (13.48) в силу аддитивности гамильтониана (13.49) разделяются, и мы можем решать (13.48) в явном виде для одной переменной  $x$ . В этом случае (13.48) гласит:

$$\frac{\partial Z_\theta(x, x')}{\partial \beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z_\theta(x, x')}{\partial x^2} + \frac{1}{2} x^2 Z_\theta(x, x') = 0. \quad (13.50)$$

Будем искать решение этого уравнения в форме

$$Z_\theta(x, x') = \exp(a + bx^2 + cxx' + bx'^2) \quad (13.51)$$

с граничным условием

$$Z_\theta(x, x') \sim \frac{1}{\sqrt{\beta}} \exp \left[ -\frac{1}{2\beta} (x - x')^2 \right] \quad (13.52)$$

при  $\theta \rightarrow \infty$  ( $\beta \rightarrow 0$ ).

Это соответствует «испарению» осцилляторов при  $\theta \rightarrow \infty$ , так как (13.52) имеет вид суммы для частиц идеального газа.

Подстановка (13.51) в (13.50) приводит к уравнениям

$$\frac{\partial a}{\partial \beta} = b, \quad \frac{\partial b}{\partial \beta} = 2b^2 - \frac{1}{2}, \quad (13.53)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \beta} = 2bc, \quad \frac{\partial b}{\partial \beta} = \frac{1}{2}c^2. \quad (13.53^*)$$

Эта система совместна и имеет решение

$$b = -\frac{1}{2} \frac{e^{2\beta} + 1}{e^{2\beta} - 1} \rightarrow -\frac{1}{2\beta} \rightarrow -\frac{1}{2} \ln \beta, \quad (13.54)$$

$$a = \int b d\beta \rightarrow -\frac{1}{2} \ln \beta, \quad (13.54^*)$$

$$c^2 = 4b^2 - 1, \quad c = +\sqrt{4b^2 - 1}; \quad (13.54^{**})$$

введем еще параметр  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{c}{2b} = -\sqrt{1 - \frac{1}{4b^2}} \rightarrow -1. \quad (13.54^{***})$$

Легко убедиться в том, что условие (13.52) в этом случае удовлетворено.

На основании (13.51) и (13.54), (13.54\*), (13.54\*\*), (13.54\*\*\*) мы можем теперь записать матрицу  $\rho_\theta(x, x')$  в явном виде:

$$\rho_\theta(x, x') = C_\theta \exp \left[ b \sum_{s=1}^N (x_s^2 - 2\gamma x_s x'_s + x_s'^2) \right]. \quad (13.55)$$

Здесь  $C_\theta$  — некоторый нормирующий множитель, именно  $C_\theta = e^{\beta F(\beta)}$ , где  $F(\beta)$  — свободная энергия осциллятора.

Учитывая теперь еще (13.44), получим полную матрицу плотности  $\tilde{\rho}$ , описывающую состояние детектора при  $t = 0$ :

$$\tilde{\rho}(x, y; x', y', 0) = C_0 C_\theta \exp \left[ b \sum_{s=1}^N (x_s^2 - 2\gamma x_s x'_s + x_s'^2) - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N (y_s^2 + y_s'^2) \right]. \quad (13.56)$$

Чтобы найти теперь матрицу  $\tilde{\rho}$  в момент времени  $t$ , надо учесть (13.57) и (13.57\*) и заменить всюду в (13.56), согласно (13.43), углы  $\varphi_s$  на  $\varphi_s + \omega t$  и углы  $\varphi'_s$  на  $\varphi'_s + \omega t$ . В результате получим

$$\tilde{\rho}(x, y; x', y', t) = C_0 C_\theta \exp (\Delta + A \cos 2\omega t + B \sin 2\omega t), \quad (13.57)$$

где

$$\Delta = \frac{b}{2} \sum_{s=1}^N [r_s^2 + r_s'^2 - 2\gamma r_s r'_s \cos (\varphi_s - \varphi'_s)] - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N (r_s^2 + r_s'^2), \quad (13.58)$$

$$A = \frac{b}{2} \sum_{s=1}^N [r_s^2 \cos 2\varphi_s + r_s'^2 \cos 2\varphi'_s - 2\gamma r_s \cos(\varphi_s + \varphi'_s)] - \\ - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N (r_s^2 \cos 2\varphi_s + r_s'^2 \cos 2\varphi'_s), \quad (13.59)$$

$$B = -\frac{b}{2} \sum_{s=1}^N [r_s^2 \sin 2\varphi_s + r_s'^2 \sin 2\varphi'_s - 2\gamma r_s r'_s \sin(\varphi_s + \varphi'_s)] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N (r_s^2 \sin 2\varphi_s + r_s'^2 \sin 2\varphi'_s). \quad (13.60)$$

Этот несколько громоздкий результат следует усреднить за период  $\pi/\omega$ , если мы считаем, что частота, характеризующая связь атома с детектором, достаточно велика. Поэтому наблюдаемый результат будет определяться матрицей

$$\overline{\tilde{\rho}(x, y; x', y', t)} = C_0 C_\theta e^{\Delta} \frac{\pi}{\omega} \int_0^{\pi/\omega} \exp(A \cos 2\omega t + B \sin 2\omega t) dt. \quad (13.61)$$

Последний интеграл приводится к функции Бесселя мнимого аргумента

$$\frac{\pi}{\omega} \int_0^{\pi/\omega} \exp(A \cos 2\omega t + B \sin 2\omega t) dt = \frac{1}{2} I_0(R) + \dots, \quad (13.62)$$

где  $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ , а многоточие означает члены, экспоненциально убывающие при  $R \rightarrow \infty$ . Поэтому усредненная по времени матрица  $\tilde{\rho}(x, y; x', y', t)$  равна

$$\overline{\tilde{\rho}(x, y; x', y', t)} = C_0 C_\theta e^{\Delta} I_0(R), \quad (13.63)$$

$$I_0(R) = 1 + \frac{1}{4} R^2 + \dots, \quad |R| \ll 1, \quad (13.64)$$

$$I_0(R) \approx \frac{e^R}{\sqrt{2\pi R}} + \dots, \quad |R| \gg 1. \quad (13.64^*)$$

При малых  $R$  имеем

$$\overline{\tilde{\rho}(x, y; x', y', t)} = \frac{1}{2} C_0 C_\theta e^{\Delta}, \quad (13.65)$$

а при больших  $R$

$$\overline{\tilde{\rho}(x, y; x', y', t)} = C_0 C_\theta \frac{e^{\Delta+R}}{\sqrt{8\pi R}}. \quad (13.65^*)$$

Если вспомнить, что  $b = -1/(2\beta) = -\theta/2$ , то появление множителя  $e^{\Delta}$  с  $\Delta$  из (13.58) указывает на то, что энергия перемешалась между  $x$ -колебаниями и  $y$ -колебаниями, а температура понизилась с  $\theta$  до  $\theta/2$ .

При больших значениях  $R$  результат также свидетельствует о перераспределении энергии между  $x$ - и  $y$ -колебаниями, но не является столь наглядным, как при малых  $R$ .

Итак, мы видим, что микрочастица, вторгнувшись в термодинамически неустойчивый детектор, произвела там полное перераспределение энергии, т. е. произошло *макроскопическое явление*.

Из приведенных примеров видно, что макроскопический измерительный прибор должен быть *неустойчивой системой* (точнее, *почти* неустойчивой). Только в этом случае микрочастица способна изменить его состояние, а это изменение и есть макроскопическое явление. Микрочастица бессильна воздействовать на прибор, представляющий собой устойчивую макроскопическую систему. Она не сможет «сдвинуть» его «стрелку» с нулевого положения!

$$\Psi = a_1 \cdot \text{[cat]} + a_2 \cdot \text{[dead cat]}$$

"Суперпозиция состояний живой и  
мертвой кошки ...."

Е. Шрёдингер

## § 14. Волновая функция — записная книжка наблюдателя (?)

Правильно ли представление о том, что волновая функция есть записная книжка наблюдателя? Книжка, в которую он записывает результаты своих измерений, произведенных над микросистемами? Вспомним, как обычно излагается этот вопрос в учебниках. Пусть из каких-либо предыдущих измерений известно, что волновая функция, представляющая состояние микросистем в ансамбле, будет  $\Psi_M(x)$ . Тогда наблюдатель запишет в свою книжку лаконичный знак:

$$\Psi_M(x). \quad (14.1)$$

Этот знак есть тот справочник, который в принципе позволяет наблюдателю предсказать вероятности результатов всевозможных измерений над микросистемой  $\mu$ .

Предположим, что наблюдатель намерен измерять величину  $L$ , имеющую (чтобы не усложнять дела) только два собственных значения  $L_1$  и  $L_2$ ; соответствующие им собственные функции пусть будут  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$  (это, например, могут быть состояния спина частицы). Тогда исходную функцию  $\Psi_M(x)$  можно представить в виде суперпозиции частных состояний  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$ :

$$\Psi_M(x) = c_1 \psi_1(x) + c_2 \psi_2(x), \quad (14.2)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — коэффициенты, определяющие относительно участие состояний с определенными значениями величины  $L = L_1$  и  $L = L_2$ .

Допустим, что измерение сделано и установлено:  $L = L_1$ . После этого наблюдатель припишет частицу, прошедшую контрольный пункт — измерительный аппарат — к новому ансамблю, характеризующемуся новой волновой функцией  $\psi_1(x)$ . Наблюдатель возьмет свою записную книжку и зачеркнет в ней функцию  $\Psi_M(x)$  как устаревшую, непригодную для дальнейших предсказаний результатов и новых измерений над «пострадавшей» при измерении частицей. Вместо  $\Psi_M(x)$  наблюдатель запишет теперь в свою книжку

$$\psi_1(x). \quad (14.3)$$



Переход от  $\Psi_M(x)$  к  $\psi_1(x)$

$$\Psi_M(x) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) \rightarrow \psi_1(x) \quad (14.4)$$

и есть процесс «стягивания» волнового пакета. С изложенной точки зрения «стягивание» есть прямое следствие изменения *информации наблюдателя*. Сама волновая функция есть не что иное, как лаконичная запись информации наблюдателя о состоянии ансамбля микросистем.

В этом весьма распространенном понимании волновой функции и процесса «стягивания» нет неправды, и оно удобно как рецепт, против которого трудно возражать. Употребляя слова «наблюдатель», «измерение», «информация» и т. д., мы лишь отдаем дань профессиональному жаргону физиков, который совсем не является лучшим языком для обсуждения принципиальных вопросов физики и методологии физики. Вся теория измерения приобретает при этом сомнительный привкус субъективизма, который становится совсем неприемлемым, если мы хотим ответить на вопрос: *«будет ли квантовая механика применима к описанию физических явлений, протекающих без участия наблюдателя?»*

Наблюдатель не является абсолютно обязательным существом в этом мире, и возможно, что мир мог бы обходиться без него. Квантовые закономерности вряд ли пострадали бы даже на йоту, если бы беспокойный наблюдатель совсем исчез со сцены.

В одной из своих работ, посвященных квантовой механике [1], Шрёдингер приводит пример суперпозиции состояний, который многим читателям неприятно подействовал на нервы. Именно, Шрёдингер рассматривает микросистему, которая имеет два состояния:  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . Первое из них заставляет срабатывать счетчик Гейгера; второе оставляет его в покое. Срабатывание счетчика Гейгера через усилители разбивает ампулу с синильной кислотой в камере, где находится... кошка.

Итак, дело начинается с того, что наблюдатель, заглядывая в свою записную книжку с целью предсказать результат будущего измерения, среди возможных результатов наблюдения находит «факт» возможной интерференции состояний живой и мертвой кошки! В самом деле, из (14.4) следует

$$|\Psi_M|^2 = |c_1\psi_1|^2 + |c_2\psi_2|^2 + 2 \operatorname{Re} c_1^* c_2 \psi_1 \psi_2, \quad (14.5)$$

и последний член указывает на такую странную возможность. После наблюдения фактического события ( $\psi_1$  или  $\psi_2$ ) судебная медицина свидетельствует о смерти несчастной кошки или о ее здоровье, а волновая функция «стягивается» в судебном протоколе к  $\psi_1$  или  $\psi_2$ !

Нетрудно видеть, что этот страшный пример можно сделать еще более волнующим, если на место кошки поставить самого наблюдателя вместе с медицинскими чиновниками. Тогда в случае  $\psi_1$  уже «некому будет стягивать» волновую функцию.

Обратимся, однако, к более реалистическим примерам. Представим себе, что речь идет о распаде радиоактивного атома. Пусть состояние  $\psi_1$  есть состояние нераспавшегося атома, а состояние  $\psi_2$  — распавшегося. Теория

показывает, что  $c_1 \approx e^{-\lambda t}$ , где  $t$  — время, а  $T = 1/\lambda$  — период полураспада;  $|c_2|^2 = 1 - |c_1|^2$ , так что коэффициент  $c_2$  возрастает со временем, а коэффициент  $c_1$  уменьшается.

Вообразим себе, что речь идет о далеком прошлом, когда ни один наблюдатель не мог бы передать нам информацию о фактической судьбе радиоактивного атома. Пусть это происходит во времена ихтиозавров! Если период  $t$ , отделяющий нас от этого времени, значительно превосходит период полураспада атома  $T$ , то мы можем с большой степенью вероятности утверждать, что атом распался. Однако для окружения атома совсем не безразлично, когда именно он распался на самом деле.

Уместно вспомнить рассказ писателя-фантаста Рэя Бредбери, который описывает, как путешественники в доисторическое прошлое по неосторожности раздавили бабочку и это малое событие повлияло на исход президентских выборов в США в 2000 году!

Распад атома мог вызвать ту или иную цепочку событий, содержание которой могло существенно зависеть от того момента времени, когда произошел этот распад. Между тем современный нам наблюдатель все еще не имел случая «стянуть» волновую функцию из функции  $\Psi$ , содержащую суперпозицию двух возможностей: атом распался ( $\psi_2$ ) или он еще находится в исходном состоянии ( $\psi_1$ ).

Если современный наблюдатель все же даст себе труд измерить состояние атома, то скорее всего он найдет, что атом распался и находится в состоянии ( $\psi_2$ ). Однако если  $t \gg T$ , то наш современник серьезно опаздывает со своим заключением, так как какой-либо другой наблюдатель пришел бы к тому же выводу намного раньше нашего современника. Таким образом, хотелось бы выразить на языке квантовой механики утверждение: атом распался независимо от наблюдателя. Действительно, это событие ведет к различным следствиям в зависимости от момента распада атома и поэтому не может быть связано с изменениями информации наблюдателя. Наблюдатель не участвует в событиях, о которых идет речь, и поэтому должен быть исключен из игры.

Если вообразить себе последовательность наблюдателей, из которых один — наш современник, а другие предшествуют ему, то в этой последовательности наблюдателей один будет выделен тем, что он первым отметит факт распада атома. Этот момент должен иметь объективное значение и находить свое отражение в аппарате квантовой механики без привлечения наблюдателя.

Из того, что было сказано выше о физическом смысле измерения как о макроскопическом процессе, вызванном к жизни микросистемой, ответ на описанные выше несколько парадоксальные проблемы весьма очевиден. Все же ввиду важности «проблемы» наблюдателя мы остановимся на этой стороне дела подробнее и резюмируем сказанное ранее о сущности измерения.

Обозначим всю макроскопическую обстановку, в которой разыгрываются интересные нас микроявления, символом  $\mathfrak{M}$ .

Представим эту обстановку в виде суммы

$$\mathfrak{M} = M + (A + D) + H. \quad (14.6)$$

Здесь  $M$  означает ту часть макрообстановки, которую мы называли *приготавливающей* и которая диктует исходное состояние ансамбля микрочастиц  $\Psi_M$ , сумма  $(A + D)$  есть та часть макрообстановки, в которой микрочастица вызывает *макроявление* и тем самым свидетельствует о своем состоянии. Эту часть мы несколько условно разложили на две:  $A$  — *анализатор*, которыми обуславливает то, что частица в разных состояниях будет вызывать разные макроявления, и  $D$  — *детектор* — ту часть макрообстановки, которая сама изменяет свое состояние под действием микрочастицы. Наконец, мы еще включили в макрообстановку  $H$  — *наблюдателя* — на тот случай, если он и в самом деле вздумает вмешиваться в поведение квантового ансамбля (заметим, что экспериментатор обычно ставит одним из первых условий эксперимента минимум своего влияния на изучаемое явление). Очевидно, что мы могли бы вообще убрать из суммы последний член  $H$  — уважаемого наблюдателя.

Вся сущность «стягивания» волновой функции выражается в том, что *микрочастица производит макроявление, и это событие имеет совершенно объективное значение*, вовсе не связанное с той или иной степенью информации наблюдателя о совершившемся событии.

В определенных условиях экспериментатор может использовать или специально организовать часть макрообстановки  $(A + D)$  так, чтобы она служила *измерительным прибором*, и это — дело его воли и его желания. Более того, он имеет право по своему усмотрению устраивать часть  $(A + D)$ , т. е. производить желаемые измерения, с тем, однако, ограничением, что он обязан избегать какого бы то ни было влияния на часть макрообстановки  $M$  — в противном случае он может изменить сам исходный ансамбль. Поскольку разделение на слагаемые в сумме  $\mathfrak{M}$  приближенно, то и перемена прибора  $(A + D)$  должна производиться с некоторой осторожностью.

Учитывая интерес наблюдателя к различным измерениям, мы можем записать совокупность возможных измерений в виде такой символической записи макрообстановок:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} &= M + (A + D) + H, \\ \mathfrak{M}' &= M + (A + D)' + H, \\ \mathfrak{M}'' &= M + (A + D)'' + H, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}\tag{14.7}$$

где штрихи у скобок  $(A + D)$ ,  $(A + D)'$ ,  $(A + D)''$ , ... означают, что поставлены различные измерительные приборы, а часть макрообстановки  $M$ , определяющая исходный ансамбль, оставлена по возможности неизменной.

Этим простым примером мы хотели еще раз подчеркнуть отличие концепции *квантовых ансамблей* от других подходов к пониманию квантовой механики: одному и тому же квантовому ансамблю, определяемому *макрообстановкой*  $M$  (математически этот ансамбль может быть задан волновой функцией  $\Psi_M$  или матрицей плотности  $\rho_M$ ), принадлежит большое число статистических коллективов *результатов измерений*, относящихся к различным измерительным приборам  $(A + D)$ ,  $(A + D)'$ ,  $(A + D)''$ , ..., среди которых могут быть и приборы, измеряющие дополнительные динамические переменные — такие, которые в принципе вообще не могут быть измерены одним

и тем же прибором, т. е. измерения пространственно-временные и измерения импульсно-энергетические.

Если считать, что наблюдатель вправе по своему усмотрению менять часть макрообстановки ( $A + D$ ) — измерительный прибор, то ясно, что *объективно* (в смысле «*независимо от наблюдателя*») квантовый, статистический коллектив макросистем задается тем, что остается неизменным при замене одного прибора на другой, т. е. *волновой функцией*  $\Psi_M$  или *матрицей плотности*  $\rho_M$ .



## § 15. Является ли квантовая механика полной теорией?

Такой вопрос поставил однажды Эйнштейн, и не только поставил, но и привел пример, из которого, как ему казалось, следовал отрицательный ответ на вопрос о полноте квантовой механики. Этот пример, известный под названием «парадокса» Эйнштейна, Подольского и Розена [1], в свое время привлек внимание всех физиков, интересовавшихся принципиальными вопросами квантовой теории. Сейчас, когда пишутся эти строки, кажется более трудным сформулировать сам «парадокс», чем дать его объяснение. Попробуем все же обратиться к парадоксу трех авторов.

Пусть волновая функция системы двух частиц 1 и 2 имеет вид

$$\psi(x_1 - x_2) = \int e^{ip(x_1 - x_2 + a)} dp, \quad (15.1)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — координаты рассматриваемых частиц,  $p$  — их импульсы:  $p_1 = p_2$  и  $p_2 = -p$ . Та же функция в  $x$ -представлении может быть написана в форме

$$\psi(x_1 - x_2) = \int \delta(x_1 - x'_1) \delta(x'_1 - x_2 + a) dx'_1. \quad (15.2)$$

Предположим, что мы измеряем импульс первой частицы, и оказывается, что  $p_1 = p'$ . Тогда из (15.1) следует, что импульс второй частицы  $p_2$  равен  $-p'$ . Таким образом, хотя никакого воздействия на вторую частицу не было оказано, все же произошло стягивание пакета (15.1) к функции  $e^{ip'(x_1 - x_2 + a)}$  и координата  $x_2$  частицы 2 стала совершенно неопределенной.

Подобное же происходит при измерении координаты  $x_1$ . Пусть установлено, что  $x_1 = x'_1$ . Тогда из (15.2) следует, что  $x_2 = a + x'_1$ , т. е. произошло стягивание пакета (15.2) к функции  $\delta(x'_1 - x_2 + a)$ . Опять мы встречаемся с ситуацией, когда измерение, произведенное на первой частице, привело к изменению состояния второй частицы, хотя, измеряя координату  $x'_1$ , мы, по крайней мере, в принципе, можем избежать воздействия прибора на вторую частицу.

Таким образом, измерения, производимые на одной из частиц, меняют состояние другой частицы и притом таким способом, что первоначальная функция  $\psi(x_1 - x_2)$  переходит одним из способов:

$$\psi(x_1 - x_2) \begin{cases} e^{ip'(x_1 - x_2 + a)}, \\ \delta(x'_1 - x_2 + a). \end{cases} \quad (15.3)$$

Итак, устанавливается, что

а) состояние частицы 2 меняется без того, чтобы измерительный прибор оказывал какое-либо влияние на эту частицу, и

б) новые состояния частицы 2 взаимно исключают друг друга; это либо состояния с определенным импульсом  $p_2 = -p'$ , либо состояния с определенной координатой  $x_2 = a + x'_1$ .

Эйнштейн, Подольский и Розен исходили из распространенного в то время мнения, что частица может иметь координату и импульс одновременно, но вмешательство измерительного прибора, притом, по терминологии Бора, *неконтролируемое вмешательство*, не позволяет установить одновременные значения  $x$  и  $p$ . Поэтому считалось, что понятие одновременного существования импульса  $p$  и координаты частицы  $x$  должны быть исключены из теории как не соответствующие *возможностям наблюдателя*.

Пример, приведенный Эйнштейном, Подольским и Розеном, показывал, что, несмотря на отсутствие вмешательства прибора, пара канонически сопряженных переменных  $x$  и  $p$  все же не может быть измерена; эта невозможность обуславливается изменением состояния частицы 2, происходящим без воздействия прибора. Поскольку прибор на вторую частицу не действует, нет оснований для того, чтобы нельзя было измерить одновременно  $x$  и  $p$ , а стало быть, эта пара  $(x, p)$  является физической реальностью, которую, однако, квантовая механика не в состоянии описать на своем языке. Иными словами, квантовая механика неполна — таково было заключение авторов парадокса.

Парадокс Эйнштейна, Подольского и Розена был разъяснен Бором [2] и Мандельштамом [3] на основе различной, но не противоречащей друг другу аргументации. Бор исходил в своем ответе Эйнштейну и его коллегам из *принципа дополненности*. Он подчеркнул значение этого принципа как нового физического принципа, исключающего возможность состояний частицы с одновременно определенными канонически сопряженными переменными — такими, как например,  $x$  и  $p$ .

С этой точки зрения как бы ни был хитроумен прием измерения прямого или косвенного (в примере Эйнштейна переменные, принадлежащие второй частице,  $x$  и  $p$ , измеряются косвенно, по измерению, произведенному на первой частице), не может быть такого измерения, которое привело бы к состоянию с одновременно определенными значениями  $x$  и  $p$ , *независимо* от того, есть ли *вмешательство прибора* или его нет. Такое измерение противоречило бы *принципу дополненности*.

В этом объяснении Бора нет никакой неправды, но толкование, данное рассматриваемому парадоксу Мандельштамом, более полно вскрывает суть

дела. Согласно этому толкованию изменение состояния второй частицы «без вмешательства прибора» на самом деле обусловлено корреляцией состояний частиц 1 и 2 в исходном ансамбле, и то, что из установленного факта  $p_1 = p'$  следует  $p_2 = -p'$ , есть прямое следствие такой корреляции. Таким образом, Мандельштам привлекает для объяснения статистическую интерпретацию квантовой механики.

Поясним подробнее смысл этой корреляции на более общем примере двух частиц. Пусть состояние двух частиц 1 и 2 характеризуется принадлежностью к квантовому ансамблю, описываемому в начальный момент времени  $t = 0$  волновой функцией

$$\psi(x_1, x_2, 0) = \psi_a(x_1)\psi_b(x_2), \quad (15.4)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — координаты частиц,  $a$  и  $b$  значения некоторых других динамических переменных, задание которых определяет начальный ансамбль.

В результате взаимодействия частиц при  $t > 0$  возникает новое состояние, которое будет описываться волновой функцией  $\psi(x_1, x_2, t)$ . Разложим эту функцию в спектр по собственным функциям операторов  $A$  и  $B$ , изображающих динамические переменные  $a$  и  $b$ :

$$\psi(x_1, x_2, t) = \int C(a', b') \psi_{a'}(x_1) \psi_{b'}(x_2) da' db'. \quad (15.5)$$

Из (15.5) видно, что если измерено  $a = a'$ , то из этого результата еще ничего нельзя сказать о значении переменной  $b$ , а следовательно, и о «состоянии» частицы 2 после измерения, произведенного на частице 1 с результатом  $a = a'$ . Ситуация меняется, если в системе частиц 1 + 2 действуют некоторые специальные закономерности: например, динамические переменные  $a$  и  $b$  могут подчиняться закону сохранения, так что

$$\frac{d}{dt}(A + B) = [H, (A + B)] = 0, \quad (15.6)$$

где  $H$  — гамильтониан системы 1 + 2. В этом случае коэффициенты  $C(a', b', t)$  в спектральном разложении (15.5) будут иметь вид

$$C(a', b', t) = d(a', b', t) \delta(a' + b' - a - b), \quad (15.7)$$

указывающий на то, что сумма  $a' + b'$  должна сохраняться, и вместо (15.5) в этом случае будем иметь

$$\psi(x_1, x_2, t) = \int d(a', a + b - a', t) \psi_a(x_1) \psi_{a+b-a'}(x_2) da', \quad (15.8)$$

так что измерение, дающее результат  $a = a'$ , автоматически ведет к  $b' = a + b - a'$ .

Корреляция состояний частиц 1 и 2 в приведенном примере есть следствие законов взаимодействия частиц — закона сохранения величины, описываемой оператором  $(A + B)$ . Поэтому любое измерительное устройство, которое разлагает исходное состояние в спектр по состояниям  $\psi_{a'}(x_1)\psi_{b'}(x_2)$ , автомати-

чески даст разложение по состояниям  $\psi_{a'}(x_1)\psi_{a+b-a'}(x_2)$ , так как в исходном ансамбле нет состояний с  $b' \neq a + b - a'$ .

Сама динамика взаимодействия дает жесткую связь между значениями  $A$  и  $B$ ! В примере Эйнштейна  $a = p_1$ , и  $b = p_2$ , причем при  $t = 0$   $p_1 + p_2 = 0$ . Вид функции  $\psi(x_1, x_2)$ , приведенной в примере Эйнштейна (см. выражение (15.1)), указывает, что при взаимодействии частиц 1 и 2 имеет место закон сохранения импульса, который и обеспечивает корреляцию состояний частиц 1 и 2.

Таким образом, парадокс Эйнштейна, Подольского и Розена возникает в силу того, что опускается статистический характер квантовой механики и факт обусловленности статистической корреляции состояний частиц 1 и 2 самой динамикой их взаимодействия остается в тени.

Представим себе общество, в котором, в силу особых законов наследственности, рождаются только блондины и блондинки с голубыми глазами и брюнеты и брюнетки только с черными глазами (светлых людей с темными глазами и темноволосых людей со светлыми глазами в рассматриваемой популяции не встречается). Поэтому тот факт, что, наблюдая на выбор индивидуума с голубыми глазами, мы автоматически убеждаемся в наличии у изучаемого лица светлых волос, не следует рассматривать как стремление субъекта подкраситься под вкус наблюдателя — обнаруживаемая корреляция цвета волос и глаз есть результат динамики наследственности в изучаемом обществе.

Возвращаясь к примеру Эйнштейна, Подольского и Розена, мы видим, что нет никакой мистики в кажущемся влиянии прибора на состояние той частицы, на которую он фактически не влиял: это «влияние» подготовлено внутри самой системы ее внутренними законами и не является следствием «вмешательства» прибора.

Кстати, напомним то, что мы уже неоднократно подчеркивали: микро-частица всегда вмешивается в состояние прибора, прибор же иногда вмешивается в состояние микрочастицы, а иногда и не вмешивается. Поэтому идея о том, что квантовая механика есть прямое следствие возможностей, заложенных в макроприборах, должна быть признана неудовлетворительной.

Квантовая механика отражает объективные закономерности, господствующие в микромире, и рассказывает о них на языке макромира. В частности, невозможность измерять одновременно  $x$  и  $p$  у микрочастицы есть следствие основных принципов самой квантовой механики и любой прибор обязан с ними считаться: согласно этим принципам пара  $x$  и  $p$  не относится к «физической реальности» и поэтому не может быть наблюдаема ни при каких условиях.

В силу этих соображений предположение Эйнштейна, Подольского и Розена о том, что пара  $x$  и  $p$  реально существует и только неполнота квантовой механики не позволяет «добиться» до этой пары, должно быть отвергнуто.



развитие идеи квантовых ансамблей в нашей стране, фон Нейман стремился доказать несовместимость скрытых параметров с основными положениями квантовой механики. Тем не менее, кажется, что полной ясности в этой проблеме не достигнуто и она нуждается в дополнительном анализе.

Весьма трудно обсуждать эту проблему в очень общем виде. В одной из своих работ я заметил, что было бы необоснованно думать, что термодинамика может содержать внутри самой себя предпосылки для сомнений в абсолютной значимости второго начала термодинамики. Ведь второе начало термодинамики лежит в самых основах этой теории. Однако развитие кинетической теории показало, что без противоречия с термодинамикой можно все же встретиться со случаями, когда второе начало явно нарушается, как это имеет место, например, в броуновском движении. Противоречие в этом случае было устранено более широкой точкой зрения на второе начало термодинамики, допускаемой кинетической теорией материи. Я имею в виду понимание энтропии  $S$  как величины, определяемой вероятностью состояния  $W$ :  $S = k \ln W$  (где  $k$  — постоянная Больцмана).

Возможно ли введение в квантовую механику каких-либо «скрытых параметров», которые могли бы сделать осмысленной пропорцию вида

$$\frac{x}{\text{квантовая механика}} = \frac{\text{кинетическая теория материи}}{\text{термодинамика}}, \quad (16.1)$$

где  $x$  — неизвестная, более полная теория?

Строго говоря, в столь общей, чисто методологической постановке вопроса нельзя отвергнуть возможность разрешимости символической пропорции (16.1) или какой-либо другой, ей подобной.

В дальнейшем мы попытаемся избрать более узкие, но и более определенные пути обсуждения проблемы «скрытых параметров».

Разделим, прежде всего, эти параметры на два возможных класса:

1) класс А, когда параметры  $\lambda$  являются *в принципе наблюдаемыми* переменными, но не входят в число динамических переменных, рассматриваемых квантовой механикой;

2) класс Б, когда параметры  $\lambda$  являются *в принципе ненаблюдаемыми*.

Обсуждение этих двух классов должно происходить совершенно раздельно. Обратимся сначала к классу А.

## Наблюдаемые скрытые параметры (класс А)

Допустим, что наряду с переменными, которые характеризуют макроскопическую обстановку  $M$ , и динамическими переменными микрочастицы  $L$ ,  $P$ ,  $Q$  и т.п. существуют еще некоторые дополнительные переменные  $\lambda$  — скрытые параметры, которые позволяют доопределить состояние квантовой системы, так что уменьшится статистический разброс, свойственный этим обычным динамическим и другим переменным квантового ансамбля ( $M + \mu$ ).

Фон Нейман различает два типа статистических ансамблей: *неоднородные* и *однородные* ансамбли. В первом типе ансамблей среднее значение

$\bar{A}$  положительной случайной величины  $A$  может быть представлено в виде разложения

$$\bar{A} = \alpha_1 \bar{A}_1 + \alpha_2 \bar{A}_2, \quad (16.2)$$

где  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ;  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  и  $\bar{A}_1$  и  $\bar{A}_2$  суть средние, взятые по подансамблям путем некоторого специального отбора систем, входящих в ансамбль, а именно путем отбора по признакам, определяющим вероятности  $\alpha_{1,2}$ .

Для однородного ансамбля при любом отборе систем имеем

$$\bar{A} = \bar{A}_1 = \bar{A}_2 = \dots \quad (16.3)$$

Очевидно, что смешанный квантовый ансамбль является неоднородным. Простейшим случаем такого смешанного ансамбля может быть ансамбль, образованный частицами, происходящими от двух некогерентных источников (например,  $\alpha$ -частицы от двух радиоактивных препаратов). Любое среднее, относящееся к этим частицам, представится в виде (16.2), причем  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  имеют смысл вероятности того, что частица излучена первым или, соответственно, вторым источником.

Если же ансамбль описывается одной волновой функцией  $\Psi_M$  и, следовательно, является чистым ансамблем, то такое разложение невозможно по самому определению чистого ансамбля. Действительно, по определению чистого ансамбля он образован бесконечной последовательностью тождественных макроскопических обстановок  $M$ , которые создают условия для существования микрочастицы  $\mu$ .

Представим себе, что совокупность таких обстановок  $M$  в количестве  $N \rightarrow \infty$  разбита на две подсовокупности:  $N_1 + N_2 = N$ ,  $N_1/N_2 = \alpha_1/\alpha_2$ , причем в каждой такой подсовокупности  $N_1$  и  $N_2$  обстановка  $M$  и микрочастица  $\mu$  тождественны. При этом под словом «тождественны» мы понимаем, что макроскопические параметры, определяющие  $M$ , совпадают, и микрочастицы  $\mu$ , определенные их макроскопически измеряемыми параметрами (массой  $m$ , зарядом  $e$ , спином  $\sigma$  и т. д.), также совпадают. Тогда волновая функция  $\Psi_M$ , определяющая квантовый ансамбль для обеих подсовокупностей  $N_1$  и  $N_2$ , при любом выборе этих подсовокупностей — одна и та же по определению волновой функции, и поэтому для любой величины  $A$  выполняется условие  $\bar{A}_1 = \bar{A}_2$ , так что разложение (16.2) оказывается невозможным.

Этот вывод противоречит возможности введения скрытых параметров  $\lambda$ , так как по смыслу этих параметров измерение их должно «уточнить» значение квантовых переменных, например, изменить статистический разброс какой-либо динамической переменной  $L$ . Пусть, например, в области скрытых параметров  $\mathfrak{G}_1(\lambda)$  среднее значение величины  $\bar{L}$  есть  $L_1$ , а среднеквадратичное отклонение —  $\overline{\Delta L_1^2}$ ; в области параметров  $\mathfrak{G}_2(\lambda)$  те же величины имеют значения  $L_2$  и  $\overline{\Delta L_2^2}$ . Тогда средние  $\bar{L}$  и  $\overline{\Delta L^2}$  во всем ансамбле будут

$$\bar{L} = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2, \quad (16.4)$$

$$\overline{\Delta L^2} = \alpha_1 \overline{\Delta L_1^2} \alpha_2 \Delta L_2^2 + \alpha_1 (L_1 - \bar{L})^2 + \alpha_2 (L_2 - \bar{L})^2, \quad (16.4^*)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — относительные веса областей  $\mathfrak{G}_1(\lambda)$  и  $\mathfrak{G}_2(\lambda)$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ .

Иными словами, чистый ансамбль оказывается *неоднородным* (по параметрам  $\lambda$ ), что противоречит его определению.

Если мы будем уточнять определенность параметров  $\lambda$ , разбивая всю область возможных значений параметров  $\lambda$  на все более малые области  $\mathfrak{G}_1(\lambda)$ ,  $\mathfrak{G}_2(\lambda), \dots, \mathfrak{G}_s(\lambda), \dots, \mathfrak{G}_N(\lambda)$  со статистическими весами  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \dots, \alpha_N$   $\left( \sum_1^N \alpha_s = 1 \right)$ , то в пределе бесконечно малых областей  $\mathfrak{G}_s(\lambda)$  получим вместо (16.4\*)

$$\overline{\Delta L^2} = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} (L_{\lambda} - \bar{L})^2, \quad (16.5)$$

где  $\alpha_{\lambda} = \mathfrak{G}_s(\lambda) / \sum_{s=1}^N \mathfrak{G}_s(\lambda)$  и  $L_{\lambda}$  есть среднее значение величины  $L$  в  $\mathfrak{G}_s(\lambda)$ .

При  $N \rightarrow \infty$  значение  $L_{\lambda}$  равно «точному» значению величины  $L$  в области  $\mathfrak{G}_s(\lambda)$ .

Формула (16.5) показывает, что весь статистический разброс величины  $L$  идет теперь за счет неопределенности в скрытых параметрах  $\lambda$ . Если эти параметры определены точно (узкая область  $\mathfrak{G}(\lambda)!$ ), то и квантовые динамические переменные должны принять вполне определенные значения.

Это ведет к дальнейшим противоречиям; действительно, не существует микросистем, которые могли бы быть описаны в терминах только пространственно-временных переменных (обозначим их через  $Q$ ) или в терминах только импульсно-энергетических переменных (обозначим их через  $P$ ).

Согласно принципу дополненности операторы  $\mathcal{Q}$ , и  $\mathcal{P}$ , изображающие эти величины, некоммутативны:

$$\mathcal{P}\mathcal{Q} - \mathcal{Q}\mathcal{P} = -i\hbar, \quad (16.6)$$

так что если в квантовом ансамбле, определенном макрообстановкой  $M$ ,  $\overline{\Delta Q^2} = 0$ , то  $\overline{\Delta P^2} \neq 0$ ; если же  $\overline{\Delta P^2} = 0$ , то  $\overline{\Delta Q^2} \neq 0$ . Поэтому, если в квантовом ансамбле какая-то динамическая переменная  $L$  определена точно, так что  $\overline{\Delta L^2} = 0$ , то либо  $\overline{\Delta P^2} > 0$ , либо  $\overline{\Delta Q^2} > 0$ , либо  $\overline{\Delta P^2} > 0$  и  $\overline{\Delta Q^2} > 0$  одновременно. Следовательно, если найдется область скрытых параметров  $\mathfrak{G}(\lambda)$ , которая выделяет подансамбль с  $\overline{\Delta Q^2} = 0$  и  $\overline{\Delta P^2} = 0$ , то мы очевидным образом приходим к противоречию с принципом дополненности.

Приведем еще одно рассуждение, которое подчеркивает трудности введения скрытых параметров  $\lambda$  [2].

Пусть изучаемой динамической переменной будет спин электрона  $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ . Как известно,

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z. \quad (16.7)$$

Переменные  $S_x, S_y, S_z$  принимают только два возможных значения:  $\pm \hbar/2$ .

Допустим, удалось установить, что проекция спина на ось  $oz$  равна  $S_z = \hbar/2$ . Пусть это значение квантовой переменной есть следствие того, что скрытые параметры  $\lambda$  лежат в области  $\mathfrak{G}_z^+(\lambda)$ .

Заменим теперь в суммарной обстановке  $\mathfrak{M} = M + (A + D)_z$  группу  $(A + D)_z$ , на группу  $(A + D)_x$  и будем сортировать частицы  $\mu$  по значениям переменной  $S_x$ . При этом мы будем получать значения  $S_x$ , равные как  $\hbar/2$ , так и  $-\hbar/2$ .

Пусть область параметров  $\lambda$ , приводящих к значению  $S_x = \hbar/2$ , будет  $\mathfrak{G}_x^+(\lambda)$ . Тогда область  $\mathfrak{G}_z^+(\lambda)$  распадается на сумму

$$\mathfrak{G}_z^+(\lambda) = \mathfrak{G}_x^+(\lambda) + \mathfrak{G}_x^-(\lambda). \quad (16.8)$$

Допустим, что получено  $S_x = \hbar/2$ . Это означает, что параметры  $\lambda$  лежат в области  $\mathfrak{G}_x^+(\lambda)$ .

Измерим теперь вновь проекцию спина  $\mathbf{S}$  на ось  $Oz$ ; для этого вновь заменим группу  $(A + D)_x$  на исходную  $(A + D)_z$ . Тогда мы будем получать для  $S_z$  как  $\hbar/2$ , так и  $-\hbar/2$ . Поэтому

$$\mathfrak{G}_x^+(\lambda) = \mathfrak{G}_z^+(\lambda) + \mathfrak{G}_z^-(\lambda). \quad (16.9)$$

Сопоставляя (16.9) и (16.8), мы приходим к противоречию:

$$\mathfrak{G}_x^+(\lambda) + \mathfrak{G}_z^-(\lambda) = 0. \quad (16.10)$$

Мы можем формально выйти из этого противоречия, если будем считать, что параметры  $\lambda$  относятся не к  $(M + \mu)$ , а к измерительному прибору  $(A + D)$ , так что при замене измерительного прибора (группа  $(A + D)$ ) с  $(A + D)_x$  на  $(A + D)_z$  и обратно скрытые параметры  $\lambda$  меняют свой физический смысл: скрытые параметры при измерении величины  $S_z$  не те, что при измерении величины  $S_x$ , так что в равенстве (16.8) параметры  $\lambda$  справа и слева физически различны.

Иными словами, параметры  $\lambda$  различны для различных измерительных устройств  $(A + D)$  (в нашем примере  $(A + D)_z$  и  $(A + D)_x$ ). Априори нельзя отвергнуть такую возможность. Однако при таком понимании параметров  $\lambda$  они не относятся к классу величин, дополняющих динамические переменные квантовой механики; напротив, они очевидным образом входят в круг величин, рассматриваемых квантовой механикой: это могут быть, например, переменные, характеризующие само измерительное устройство.

По самой сути измерительного устройства существует однозначное соответствие между областью  $\mathfrak{G}(\lambda)$  динамических переменных  $\lambda$ , характеризующих это устройство с любой степенью деятельности, и значением измеряемой величины  $L$ , именно, если  $\lambda \in \mathfrak{G}_{L'}(\lambda)$ , то динамическая переменная  $L$  равна  $L'$ .

Итак, мы видим, что невозможно ввести в принципе наблюдаемые скрытые параметры  $\lambda$  в часть  $\mathfrak{M}$ , равную  $M + \mu$ , без противоречия с принципом дополненности.

## Ненаблюдаемые скрытые параметры (класс Б)

Допустим теперь, что скрытые параметры  $\lambda$  принципиально ненаблюдаемы. Слово «принципиально» напоминает злополучное «начало принципиальной ненаблюдаемости», которое некоторые исследователи рассматривали как философскую основу квантовой механики (см. об этом в [2]). Поэтому следует подчеркнуть, что когда мы употребляем слово «принципиально», то имеем в виду определенную теорию и ее принципы, которые что-то допускают и что-то запрещают.

В обсуждении «принципиально ненаблюдаемых скрытых параметров» мы также обязаны иметь в виду принципы определенной теории, а не море возможностей, ограниченных только фантазией. В качестве такой теоретической основы для обсуждения мы возьмем квантовую механику и будем считать, что термин «принципиально ненаблюдаемая величина» определяет величину, наблюдаемость которой запрещена принципами квантовой механики. Нетрудно видеть, что в таком понимании скрытые параметры не противоречат принципам квантовой механики.

Обратимся теперь к обсуждению скрытых параметров для чистого квантового ансамбля.

Если параметры  $\lambda$  ненаблюдаемы, то нельзя указать способ, пользуясь которым мы могли бы выделить из чистого квантового ансамбля какой бы то ни было подансамбль со средними значениями  $\bar{L}$ ,  $\overline{\Delta L^2}$ , отличными от значений, характерных для всего ансамбля в целом, т.е. разложение вида (16.4) и (16.4\*) неосуществимо. Следовательно, никакого противоречия ни с определением чистого ансамбля, ни с соотношениями неопределенностей вида  $\overline{\Delta P^2} \overline{\Delta Q^2} \gg \hbar^2$  при рассматриваемых предположениях о скрытых параметрах  $\lambda$  не возникает.

Более того, мы покажем, что такие «ненаблюдаемые скрытые параметры»  $\lambda$  существуют в современной квантовой механике. В дальнейшем мы будем следовать идеям Фейнмана [3], который показал, что волновая функция, описывающая чистый ансамбль, может быть представлена в виде функционального интеграла по «идеальным» (ненаблюдаемым) траекториям частиц:

$$x = x(t), \quad \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t),$$

где  $x(t)$  — координаты частицы в момент времени  $t$ , а  $\dot{x}(t)$  — ее скорость.

Для того чтобы изложить идею Фейнмана, напомним, что движение квантового ансамбля может быть представлено как последовательность унитарных преобразований. Пусть состояние микрочастицы характеризуется динамической переменной  $a$  (которая имеет непрерывный спектр). Пусть, далее, волновая функция, описывающая состояние ансамбля в момент времени  $t = t_0$  есть  $\psi(a_0, t_0)$ , где  $a_0$  — переменная  $a$  при  $t = t_0$  (по самому смыслу волновой функции). Тогда волновая функция  $\psi(a, t)$  в момент  $t > 0$ , как известно, может быть представлена в виде

$$\psi(a, t) = \int U(a, t; a_0, t_0) \psi(a_0, t_0) da_0, \quad (16.11)$$

где  $U(a, t; a_0, t_0)$  есть унитарная матрица канонического преобразования от переменных  $a_0$  к переменным  $a$ . Она удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} = HU, \quad (16.12)$$

где  $H$  — гамильтониан системы. Если для  $U$  выбрать начальные условия так, что

$$U = \delta(a - a_0) \quad \text{при} \quad t = t_0, \quad (16.13)$$

$$U = 0 \quad \text{при} \quad t < t_0, \quad (16.13^*)$$

то  $U$  совпадает с рассмотренной ранее функцией Грина  $\mathcal{G}$  для уравнения Шрёдингера (16.12).

Возьмем в (16.11) вместо момента  $t$  (который произволен) какой-нибудь момент времени  $t_1$  ( $t_0 < t_1 < t$ ). Тогда (6.11) будет преобразовывать функцию  $\psi(a_1, t_1)$  в функцию  $\psi(a, t)$ . Мы можем теперь взять  $\psi(a_1, t_1)$  за начальную функцию и с помощью  $U(a, t; a_1, t_1)$  получить вновь функцию  $\psi(a, t)$  для  $t > t_1$ ; очевидно, что при этом мы будем иметь

$$\psi(a, t) = \int da_1 \int da_0 U(a, t; a_1, t_1) U(a_1, t_1; a_0, t_0) \psi_0(a_0, t_0). \quad (16.14)$$

Повторяя эту процедуру введения промежуточных моментов времени  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = t$  и соответствующих этим моментам значений динамической переменной  $a_1, a_2, \dots, a_N = a_t = a$ , мы можем представить матрицу преобразования  $U(a, t; a_0, t_0)$  в виде

$$U(a, t; a_0, t_0) = \int \dots \int da_1 da_2 \dots da_{N-1} U(a, t; a_{N-1}, t_{N-1}) \times \\ \times U(a_{N-1}, t_{N-1}; a_{N-2}, t_{N-2}) \dots U(a_2, t_2; a_1, t_1) U(a_1, t_1; a_0, t_0), \quad (16.15)$$

т.е. как последовательность «переходов»  $\alpha_0 \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_{N-1} \rightarrow \alpha_N$  при возможных значениях промежуточных переменных  $a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$ . Эта формула аналогична классической формуле для цепи Маркова [4].

$$\mathcal{P}(a, t/a_0, t_0) = \int \dots \int da_1 da_2 \dots da_{N-1} \mathcal{P}(a, t; a_{N-1}, t_{N-1}) \times \\ \times \mathcal{P}(a_{N-1}, t_{N-1}; a_{N-2}, t_{N-2}) \dots \mathcal{P}(a_2, t_2; a_1, t_1) \mathcal{P}(a_1, t_1; a_0, t_0), \quad (16.16)$$

где  $\mathcal{P}(a_k, t_k; a_{k-1}, t_{k-1})$  есть *вероятность* перехода за время  $t_k - t_{k-1}$  из состояния  $a_{k-1}$  в состояние  $a_k$ .

Формула (16.16) представляет вероятность перехода из состояния  $a_0$  в момент  $t_0$  в состояние  $a$  в момент  $t$  ( $t > t_0$ ) как результат всевозможных переходов по промежуточным значениям переменной  $a$ .

В квантовую формулу (16.15) вместо вероятности  $\mathcal{P}$  входят амплитуды вероятностей  $U$ , которые связаны с вероятностью  $\mathcal{P}$  соотношением

$$\mathcal{P}(a_k, t_k; a_{k-1}, t_{k-1}) = |U(a_k, t_k; a_{k-1}, t_{k-1})|^2. \quad (16.17)$$

Благодаря этому различию внешне схожие формулы (16.15) и (16.16) принципиально отличаются друг от друга.

Вернемся теперь к формулам (16.14) и (16.15) и будем считать, что переменная  $a$  есть декартова координата микрочастицы  $x$ . Обозначим далее  $t_{k+1} - t_k = \Delta t$  и положим, что для малых  $\Delta t$  функцию преобразования  $U$  можно представить в виде

$$U(x_{k+1}, t_{k+1}; x_k, t_k) = \frac{1}{A} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S(x_{k+1}, x_k, \Delta t) \right], \quad (16.18)$$

где  $A$  — нормирующий множитель (не зависящий от  $x_k, t_k$ ), а  $S(x_{k+1}, x_k, \Delta t)$  — фаза  $U$ .

Для свободного движения фаза  $U$  в точности совпадает с *классической функцией действия*, поэтому можно допустить, что это окажется верным и для случая наличия внешнего поля, описываемого потенциалом  $V(x)$ .

Предположим, что это верно. Тогда

$$S(x_{k+1}, x_k, \Delta t) = \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} \right)^2 - V(x_{k+1}) \right] \Delta t, \quad (16.19)$$

где  $m$  — масса микрочастицы. В пределе бесконечно мелкого дробления интервала  $(t_0, t)$  получим

$$S(\dot{x}, x, dt) = \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right] dt \quad (16.20)$$

— элемент классического действия за время  $dt$ ;  $\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} ((x_{k+1} - x_k)/\Delta t)$  — скорость частицы в момент времени  $t$ ;  $L(\dot{x}, x) = (1/2)m\dot{x}^2 - V(x)$  — классическая функция Лагранжа.

Покажем, что волновая функция  $\psi(x, t)$ , полученная с помощью преобразования (16.11), при предположениях (16.18) и (16.19) удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x, t). \quad (16.21)$$

Для доказательства<sup>1</sup> рассмотрим преобразование от  $\psi(x, t)$  к  $\psi(x, t + \Delta t)$ :

$$\begin{aligned} \psi(x, t + \Delta t) = \frac{1}{A} \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{x_{N+1} - x_N}{\Delta t} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - V(x_{N+1}) \right] \Delta t \right\} \psi(x_N, t) dx_N. \end{aligned} \quad (16.22)$$

<sup>1</sup> Это доказательство принадлежит Фейнману [3]. Впервые на связь фазы  $S$  с классическим действием  $L$ , видимо, указал Дирак [5].

Положим  $x_{N+1} - x_N = \xi$ ,  $x_{N+1} = x$ . Тогда вместо (16.12) получим

$$\psi(x, t + \Delta t) = \frac{1}{A} \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m}{2} \frac{\xi^2}{\Delta t^2} - V(x_N) \right] \Delta t \right\} \psi(x - \xi, t) d\xi. \quad (16.22^*)$$

Разлагая функцию

$$\psi(x - \xi, t) = \psi(x, t) - \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \xi^2 + \dots$$

и выполняя простое интегрирование по  $\xi$ , получим

$$\begin{aligned} \psi(x, t) + \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \Delta t + \dots = \exp \left( -\frac{i}{\hbar} V(x) \Delta t \right) \left( \frac{2\pi i \hbar}{m} \Delta t \right)^{1/2} \frac{1}{A} \left[ \psi(x, t) + \right. \\ \left. + \frac{i \hbar}{m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \Delta t + O(\Delta t^2) \right]. \quad (16.22^{**}) \end{aligned}$$

Выбирая нормировочный множитель  $a$  равным  $\left( \frac{2\pi i \hbar \Delta t}{m} \right)^{1/2}$  и разлагая еще в ряд  $\exp \left( -\frac{i}{\hbar} V(x) \Delta t \right) = 1 - \frac{i}{\hbar} V(x) \Delta t + \dots$ , убедимся, что при  $\Delta t \rightarrow 0$   $\psi(x, t)$  действительно удовлетворяет уравнению Шрёдингера (16.21). Это позволяет написать (16.15) в виде

$$\begin{aligned} U(x, t; x_0, t_0) = \underbrace{\int \dots \int}_N \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^N S(x_k, x_{k-1}, \Delta t) \right] \times \\ \times \frac{dx_N}{A} \frac{dx_{N-1}}{A} \dots \frac{dx_k}{A} \dots \frac{dx_1}{A}, \quad (16.23) \end{aligned}$$

где  $S(x_k, x_{k-1}, \Delta t)$  — классическое действие за время  $\Delta t$ , определяемое (16.19).

Если заменить  $1/\hbar$  на  $(1 + i\delta)/\hbar$ ,  $\delta > 0$ , то интеграл (16.23) будет иметь смысл и при  $N \rightarrow \infty$ ,  $\Delta t = (t - t_0)/N \rightarrow 0$ , как функциональный интеграл по мере Винера. Интеграл (16.23) при  $N \rightarrow \infty$  есть предел этого функционального интеграла при  $\delta \rightarrow 0$  (см. [6]).

При  $\Delta t \rightarrow 0$  сумма  $\sum_{k=1}^N S(x_k, x_{k-1}, \Delta t)$  переходит, согласно (16.20), в интеграл классического действия за время от  $t_0$  до  $t$ :

$$\int_{t_0}^t L[\dot{x}(\tau), x(\tau)] d\tau = S(x, t, x_0, t_0).$$



Объем  $\frac{dx_N}{A} \frac{dx_{N-1}}{A} \dots \frac{dx_1}{A}$  при  $N \rightarrow \infty$  запишем символически как  $dW\{x(\tau)\}$ . Тогда вместо (16.23) получим

$$U(x, t; x_0, t_0) = \int dW\{x(\tau)\} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t L(\dot{x}(\tau), x(\tau)) d\tau \right]. \quad (16.24)$$

Иными словами, функция Грина  $U(x, t; x_0, t_0)$ , преобразующая «амплитуды вероятности», может быть представлена как функциональный интеграл по всем траекториям, ведущим из точки  $(x_0, t_0)$  в точку  $(x, t)$ . Каждая траектория  $x(\tau)$ ,  $\dot{x}(\tau)$  ( $t_0 \leq \tau \leq t$ ) дает вклад в амплитуду  $U(x, t; x_0, t_0)$ , равный

$$dU = dW\{x(\tau)\} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t L(\dot{x}, x) d\tau \right]. \quad (16.25)$$

В силу постоянства множителей  $A$  амплитуда вклада каждой траектории  $dW\{x(\tau)\}$  одинакова, а фазы  $\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t L(\dot{x}, x) d\tau$  для разных траекторий различны.

Ясно, что ввиду осциллирующего характера множителей  $\exp \left[ \frac{i}{\hbar} S(x, t, t_0) \right]$ ,

$S(x, t, t_0) = \int_{t_0}^t L(\dot{x}, x) d\tau$  наибольший вклад в (16.24) будет получаться от слагаемых вида (16.25), для которых  $S(x, t, t_0)$  минимально, т. е. для тех траекторий, для которых

$$\delta \int_{t_0}^t L(\dot{x}, x) d\tau = 0, \quad (16.26)$$

где  $\delta$  означает вариацию траектории  $x(\tau)$ . Но условие (16.26) есть как раз то условие, которое определяет классическую траекторию частицы. Таким образом, мы можем следующим образом интерпретировать замечательный результат Фейнмана, выраженный формулами (16.24)–(16.26): микрочастица предпочитает двигаться по классической траектории  $x(\tau)$ , удовлетворяющей принципу наименьшего действия. (16.26); она не избегает и других возможных траекторий, ведущих из  $x_0, t_0$  в  $x, t$  (рис. 11).

Согласно (16.24) все эти возможности дают определенный вклад в движение квантового ансамбля. Однако «идеальные» траектории  $x(t)$  и скорости  $\dot{x}(t) = p(t)/m$  ( $p$  — импульс частицы), фигурирующие в (16.24), являются ненаблюдаемыми, так как согласно основным принципам квантовой механики не существует такой квантовой ансамбля, в котором были бы одновременно определены переменная  $x$  и переменная  $\dot{x} = p/m$ .

Таким образом, переменные  $x(t)$  и  $\dot{x}(t)$  в (16.24) являются примером «скрытых параметров», и притом ненаблюдаемых. Однако, как мы ви-

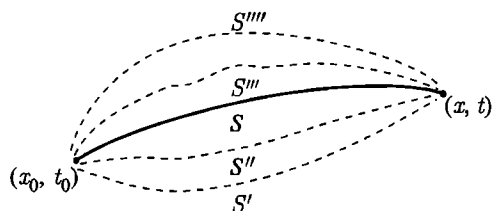


Рис. 11. Классическая траектория частицы  $S$ , соответствующая минимуму функции действия. Траектории  $S'$ ,  $S''$ ,  $S'''$ , ... — «идеальные» квантовые траектории, которые также фигурируют в движении микрочастицы

дели, нет никакого противоречия между принципами квантовой механики и существованием этих скрытых параметров  $\lambda = x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$ , определяющих «идеальную» траекторию микрочастицы.

коммутирующими между собой операторами:

$$[Q_s, Q_r] = 0, \quad s, r = 1, 2, \dots, f, \quad (17.1)$$

или, для импульсного набора

$$[P_s, P_r] = 0, \quad s, r = 1, 2, \dots, f, \quad (17.1^*)$$

они также должны быть независимы друг от друга, и число их должно равняться числу степеней свободы нашей микросистемы  $f$ . Таким образом, состояние частицы задается полным набором динамических переменных  $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_f)$  или  $P = (P_1, P_2, \dots, P_f)$ .

Предсказание истории частицы означало бы предсказание последовательности  $Q(t)$  или  $P(t)$  для моментов времени  $t: t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots < t_N$ .

Прежде чем перейти к анализу возникающих здесь проблем, приведем интересную теорему, принадлежащую Мандельштаму [1].

Положим в общем соотношении неопределенностей (11.3)  $\mathcal{M} = \mathcal{H}$ , где  $\mathcal{H}$  — оператор энергии  $E$ , тогда получим

$$\overline{\Delta L^2} \overline{\Delta E^2} \geq \frac{\hbar^2}{4} |\overline{[\mathcal{H}, \mathcal{L}]}|^2 \quad (17.2)$$

где  $\overline{\Delta L^2}$  и  $\overline{\Delta E^2}$  — как обычно, среднеквадратичные отклонения величин  $L$  и  $E$ ;

$$[\mathcal{H}, \mathcal{L}] = \frac{1}{i\hbar} (\mathcal{H}\mathcal{L} - \mathcal{L}\mathcal{H}).$$

С другой стороны,

$$|\overline{[\mathcal{H}, \mathcal{L}]}| = \overline{\frac{dL}{dt}}. \quad (17.3)$$

Поэтому

$$\overline{\Delta L^2} \overline{\Delta E^2} \geq \frac{\hbar^2}{4} \left| \overline{\frac{dL}{dt}} \right|^2. \quad (17.4)$$

Из (17.4) следует, что если за время  $\Delta t$  среднее значение  $\overline{L}$  величины  $L$  изменяется на  $\overline{\Delta L}$  такое, что  $\overline{\Delta L} \approx \sqrt{\overline{\Delta L^2}}$ , то имеет место «соотношение неопределенностей» вида

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2, \quad (17.5)$$

где

$$\Delta E = \sqrt{\overline{\Delta E^2}}.$$

Обратимся теперь к описанию истории частицы импульсно-энергетическими переменными  $P$ . Пусть одна из переменных, скажем,  $P_f$  равна  $\mathcal{H}$ , так что  $\Delta E = 0$ , и согласно (17.5) время  $\Delta t$ , в течение которого заметно изменяются средние значения любой из динамических переменных, равно бесконечности  $\left( \Delta t \geq \frac{\hbar}{2\Delta E} \right)$ .

Таким образом, при описании *импульсно-энергетическими переменными* микрочастица вообще не имеет никакой истории. Этот вывод, конечно, не является неожиданным, так как описание состояния частицы импульсно-энергетическими переменными в классической механике соответствовало бы описанию движения частицы с помощью *интегралов* движения, которые по самой своей сути не зависят от времени.

Совершенно иная ситуация возникает в случае описания истории частицы посредством полного набора пространственных переменных  $Q$ . Эти переменные в силу принципа дополнительности не коммутируют с гамильтонианом  $\mathcal{H}$ , поэтому средние значения  $dQ/dt$ , вообще говоря, отличны от нуля. Тогда из (17.4) следует, что  $\overline{\Delta E^2} > 0$ :

$$\overline{\Delta E^2} \geq \frac{\hbar^2}{4} \overline{\left| \frac{dQ}{dt} \right|^2} \frac{1}{\overline{\Delta Q^2}}, \quad (17.6)$$

так что состояния ансамбля в случае, если пространственные динамические переменные  $Q$  заданы с конечной точностью (т.е.  $\Delta Q^2 \neq 0$ ), будут нестационарными: все вероятности, средние значения, среднеквадратичные отложения и т.п. для всех величин будут меняться с течением времени: возникает история ансамбля, а следовательно, и история отдельной микрочастицы.

Предсказание этой истории микрочастицы будет состоять в предсказании вероятности некоторой *определенной* траектории микрочастицы:

$$(Q_0, t_0), (Q_1, t_1), \dots, (Q_k, t_k), \dots, (Q_N, t). \quad (17.7)$$

Согласно (16.16) вероятность такой траектории равна [2]:

$$\begin{aligned} dW(Q_0, t_0; Q_1, t_1, \dots, Q_k, t_k, \dots, Q_N, t) = \\ = P(Q_N, t; Q_{N-1}, t_{N-1}) P(Q_{N-1}, t_{N-1}; Q_{N-2}, t_{N-2}), \dots \\ \dots, P(Q_k, t_k; Q_{k-1}, t_{k-1}), \dots, P(Q_1, t_1; Q_0, t_0) \times \\ \times dQ_1 dQ_2 \dots dQ_{N-1}, \end{aligned} \quad (17.8)$$

где отдельные множители определяются формулой (16.17).

В простейшем случае свободного движения, согласно (16.19), имеем

$$P(Q_k, t_k; Q_{k-1}, t_{k-1}) dQ_k = \frac{dQ_k}{A} \left| \exp \left[ \frac{im}{2\hbar} \frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t} \right] \right|^2, \quad (17.9)$$

где  $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ .

Произведение (17.8) имеет смысл вероятности того, что при последовательных измерениях координаты микрочастицы  $Q$  в моменты времени  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots < t_N$  получаются значения координаты  $Q_0 \pm \frac{1}{2}dQ_0, Q_1 \pm \frac{1}{2}dQ_1, \dots, Q_k \pm \frac{1}{2}dQ_k, \dots, Q_N \pm \frac{1}{2}dQ_N$  соответственно. Каждое такое измерение есть макроскопическое событие. Поэтому вероятность (17.8) есть

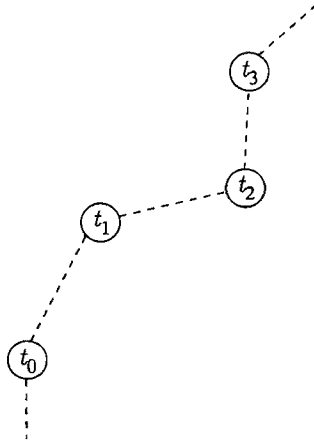


Рис. 12. Траектория микрочастицы как последовательность макроскопических событий: каждый кружок означает макроскопические явления, вызванные микрочастицей. Например, кружок может означать пузырек пара в пузырьковой камере

вероятность определенной последовательности макроскопических событий, с помощью которых и описывается история индивидуальной части (рис. 12).

Эта цепочка событий могла бы быть весьма привлекательной, если бы каждое измерение координаты  $Q$  не приводило к состояниям с бесконечно большой энергией  $E$ . Действительно, в этом случае оператор энергии микро- частицы  $\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$ , а волновая функция равна

$$\psi(x, t) = \frac{1}{A} \exp \left[ \frac{im}{2\hbar} \frac{(x - x_0)^2}{\Delta t} \right], \quad (17.10)$$

где  $x_0$  — координата, полученная из предыдущего измерения. Среднее значение энергии микрочастицы  $\overline{E}$  в состоянии (17.10) согласно обычным формулам квантовой механики получим из формулы

$$\overline{E} = \frac{\int \psi^* \mathcal{H} \psi dx}{\int \psi^* \psi dx}. \quad (17.11)$$

Эти интегралы легко вычисляются, если заменить в (17.10)  $m$  на  $m + i\delta$  ( $\delta > 0$ ) и потом перейти к пределу  $\delta \rightarrow 0$ . Тогда получим

$$\overline{E} = \frac{\hbar^2}{8m} \frac{m^2}{\delta} \frac{1}{\hbar \Delta t}, \quad \delta \rightarrow 0, \quad (17.12)$$

так что  $\overline{E} \rightarrow \infty$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Поэтому для осуществления траектории, описываемой формулой (17.8), необходимо откуда-то черпать бесконечную энергию: или из измерительного прибора ( $A + D$ ), или из энергии самой микро- частицы  $\mu$ .

В связи с этим обстоятельством мы рассмотрим более реалистичную схему описания траектории индивидуальной микрочастицы, в которой не предполагается бесконечно точного измерения координаты  $Q$ .

Допустим, что микрочастица взаимодействует с бесконечно тяжелыми атомами, расположение которых в пространстве известно, и возбуждает их, переводя из нормального состояния  $\psi_0(x)$  в возбужденное  $\psi_n(x)$ ; здесь  $x$  — координата электрона в атоме, а  $\psi(x)$  — его волновая функция. Энергию взаимодействия  $W(x - Q)$  нашей микрочастицы с электроном атома мы будем считать  $\delta$ -образной:

$$W(x - Q) = g\delta(x - Q), \quad (17.13)$$

где  $Q$  — координата микрочастицы,  $g$  — константа взаимодействия. Энергия возбуждения атома пусть будет  $\varepsilon = E_n - E_0$ , энергия микрочастицы  $E = 1/2M$ ,  $M$  — масса частицы,  $P$  — ее импульс до столкновения с атомом, а импульс после столкновения с атомом будет  $P'$ . Будем считать, что  $E \gg \varepsilon$ ; таким образом, источником большей энергии, необходимой для локализации микрочастицы, будет служить энергия самой микрочастицы.

Предположим, что матричный элемент плотности электрона в атоме

$$\rho_n(x) = \psi_n^*(x)\psi_0(x) \quad (17.14)$$

исчезает для  $|x| \gg a$ , так что  $a$  играет роль размера атома. Его фурье-образ

$$\tilde{\rho}_n(q) = \int \rho_n(x) e^{iqx} d^3x \quad (17.15)$$

будет исчезать в области  $|q| \gg 1/a$ .

Для простоты расчета предположим далее, что существует лишь один матричный элемент,  $\rho_n(x)$ , остальными пренебрежем, считая их малыми.

Возбуждение  $E_0 \rightarrow E_n$  локализованного в пространстве атома играет роль анализатора  $A$ , сортирующего микрочастицы по их координатам  $Q$  с точностью до размеров атома  $a$ . В дальнейшем возбужденный атом может инициировать скрытое изображение в зерне фотоэмульсии, или локальное вскипание пара в пузырьковой камере, или конденсацию пара в камере Вильсона, или другие подобные макроскопические явления.

Все эти процессы играют роль макроскопического детектора  $D$ , разрушающего интерференцию различных состояний микрочастиц. Мы не будем входить в расчет работы этих детекторов и ограничимся расчетом первой функции измерительного устройства — анализом частиц по координатам  $A$ . Макроскопичность анализатора  $A$ , которым в нашем примере является тяжелый атом, способный к возбуждению, выражается в нашем расчете в том, что масса атома предполагается бесконечной, так что положение его центра тяжести в пространстве вполне определено.

Волновая функция рассматриваемой системы  $\mu + A$  в начальный момент времени  $t = 0$  будет равна

$$\varphi_0(x, Q) = \psi_0(x) e^{iPQ/\hbar}. \quad (17.16)$$

В момент  $t > 0$  волновую функцию этой же системы представим в виде

$$\varphi(x, Q, t) = \varphi_0(x, Q) e^{i\omega_0 t} + \varphi(x, Q, t), \quad (17.17)$$

где  $\omega_0 = (E + E_0)/\hbar$ . Функцию  $\varphi(x, Q, t)$  будем считать малой и вычислим ее по теории возмущения. Следуя расчету, приведенному в § 11 (см. (11.14)), получим

$$\begin{aligned} \varphi(x, Q, t) = \frac{ge^{i\omega_0 t}}{i\hbar} \int \rho_n(x') e^{(i/\hbar)(P-P', Q)} \delta(x' - Q') \times \\ \times \frac{1 - e^{-i\Omega t}}{\Omega} d^3 P' dx' dQ' \psi_n(x) e^{(i/\hbar)Q P'}, \end{aligned} \quad (17.18)$$

$$\Omega = \frac{z}{t} = \frac{1}{\hbar} (E_P + E_0 - E_{P'} - E_n = E_P - E_{P'} - \mathcal{E}). \quad (17.19)$$

Мы считаем, что  $E_P \gg \mathcal{E}$ , поэтому приближенно

$$\Omega \approx \frac{1}{\hbar} (E_P - E_{P'}) = \Omega_{PP'}.$$

Рассмотрим теперь функцию  $\varphi(x, Q, t)$  при  $0 < t \ll 1/\Omega_{PP'}$ , т. е. вскоре после возможного столкновения микрочастицы и атома. Из (17.18) находим

$$\varphi(x, Q, t) \approx t \frac{ge^{i\omega_0 t}}{\hbar} \psi_n(x) \int \tilde{\rho}_n(q') \exp \left( \frac{iQ P}{\hbar} + \frac{iQ q}{\hbar} \right) d^3 q, \quad (17.20)$$

где  $\mathbf{q} = \mathbf{P}' - \mathbf{P}$ , или

$$\varphi(x, Q, t) = t \frac{ge^{i\omega_0 t}}{\hbar} \psi_n(x) \rho_n(Q) e^{\frac{iQ P}{\hbar}} \approx t \psi_n(x) \varphi_n(Q). \quad (17.20^*)$$

Иными словами, при малых  $t$  состояние микрочастицы, возбуждившей переход в атоме  $E_0 \rightarrow E_n$ , изображается волновой функцией

$$\varphi_n(Q) = \rho_n(Q) e^{(i/\hbar)Q P}. \quad (17.21)$$

Эта функция есть волновой пакет с распределением вероятности координаты микрочастицы

$$W_n(Q) = |\rho_n(Q)|^2 \quad (17.22)$$

и с начальным средним импульсом

$$\mathbf{P} \approx -i\hbar \int \varphi_n^*(Q) \nabla_Q \varphi_n(Q) dQ. \quad (17.23)$$

(Здесь знак  $\approx$  означает равенство с точностью до импульса электрона в атоме, равного по порядку величины  $p = \hbar/a \ll P$ .)

## Список литературы

### § 2

1. Уиттекер Э. Т. Аналитическая динамика. М.: ОНТИ, 1937.
2. Зоммерфельд А. Строение атома и спектры. М.: Гостехиздат, 1956.
3. Борн М. // УФН. 1959. Т. 69. С. 173.
4. Маделунг Э. Математический аппарат физики. М.: Физматгиз, 1961.

### § 3

1. Гиббс Дж. Основные принципы статистической механики. М.: Гостехиздат, 1964.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Статистическая физика, гл. I. М.: Гостехиздат, 1951.

### § 4

1. James R. W., Brindley G. W., Wood R. J. // Proc. Roy. Soc. A. 1929. V. 125. P. 401.
2. Фон Нейман И. Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.
3. Никольский К. В. Квантовые процессы. М.: Гостехиздат, 1940.
4. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. М.: Высшая школа, 1963.
5. Бор Н. // УФН. 1958. Т. 66. С. 571.
6. Фок В. А. // УФН. 1957. Т. 62. С. 461.
7. Блохинцев Д. И. // УФН. 1956. Т. 45. С. 195.

### § 5

1. Дирак П. Принципы квантовой механики. § 33. М.: Физматгиз, 1960.
2. Blokhintsev D. // J. of Phys. USSR. 1940. V. 2. P. 71.
3. Blokhintsev D., Nemirovsky P. // J. of Phys. USSR. 1940. V. 3. P. 191; ЖЭТФ. 1940. Т. 10. С. 1263.

### § 6

1. Блохинцев Д., Брискина Ч. // Вестн. Моск. ун-та. 1942. № 10. С. 115.

### § 7

1. Причинность в квантовой механике: Сб. М.: ИЛ, 1955.

### § 8

1. Мотт Н., Месси Г. Теория атомных столкновений. М.: ИЛ, 1951.
2. Ахиезер А., Померанчук И. Я. Некоторые вопросы теории ядра. М.: Гостехиздат, 1948.
3. Мандельштам Л. И. Лекции по основам квантовой механики: Собр. соч., т. V. М.: Изд-во АН СССР, 1950.

### § 9

1. Мотт Н., Месси Г. Теория атомных столкновений. М.: ИЛ, 1951.
2. Блохинцев Д. // ЖЭТФ. 1947. Т. 17. С. 814.

### § 10

1. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1951. Т. 15. С. 309.
2. Мельников В. К. // УМН. 1959. Т. 14, вып. 4(88). С. 121.
3. Крейн М. Г. // Докл. АН СССР. 1955. Т. 105. § 3.
4. Jost R., Kohn W. // Phys. Rev. 1952. V. 87, № 6. P. 977.



## § 11

1. *Никольский К. В.* Квантовые процессы, гл. II. М.: Гостехиздат, 1940.
2. *Гейзенберг В.* Физические принципы квантовой теории (см. дополнения). М.: ГТТИ, 1932.
3. *Блохинцев Д. И.* Основы квантовой механики, § 17. М.: Высшая школа, 1963.
4. *Вавилов С. И.* Микроструктура света. М.: Изд-во АН СССР, 1950.

## § 12

1. *Дирак П.* Принципы квантовой механики, § 2. М.: Физматгиз, 1960.
2. *Блохинцев Д. И.* Основы квантовой механики. М.: Высшая школа, 1963.
3. *Паули В.* Общие принципы волновой механики. М.: Гостехиздат, 1947.
4. *Мандельштам Л. И.* Собр. соч., т. V. М.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 347.

## § 13

1. *Блохинцев Д.* Вопросы философии. 1963. № 9. С. 108.
2. *Green H. S.* // *Nuovo Cim.* 1958. V. 9. P. 880.

## § 14

1. *Shrödinger E.* Rep. of Solvay Congress. 1928.
2. *Бор Н.* // УФН. 1958. Т. 66. С. 571.

## § 15

1. *Эйнштейн А., Подольский Б., Розен Н.* // УФН. 1936. Т. 16. С. 436.
2. *Бор Н.* Ответ А. Эйнштейну // УФН. 1936. Т. 16. С. 446.
3. *Мандельштам Л. И.* Лекции по квантовой механике. Собр. соч., т. V. М.: Изд-во АН СССР, 1950.

## § 16

1. *Фон Нейман И.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.
2. *Блохинцев Д.* // УФН. 1951. Т. 45. С. 195.
3. *Фейнман Р.* Вопросы причинности в квантовой механике. М.: ИЛ, 1955; *Rev. Mod. Phys.* 1948. V. 20, № 2. P. 367.
4. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963.
5. *Дирак П.* Принципы квантовой механики, § 32. М.: Физматгиз, 1960.
6. *Гельфанд И. М., Яглом А. М.* // УФН. 1956. Т. 11. С. 76.

## § 17

1. *Мандельштам Л. И.* Лекции по основам квантовой механики. Собр. соч., т. V. М.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 347.
2. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963.

## О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МИКРОСИСТЕМЫ С ИЗМЕРИТЕЛЬНЫМ ПРИБОРОМ\*

### § 1. Введение

Физическое содержание квантовой механики не может быть понято без глубокого анализа проблемы измерения. Это важное обстоятельство стало ясным уже в самую раннюю пору развития квантовой механики. Классические работы Н. Бора [1], В. Гейзенберга [2] и Дж. фон Неймана [3] создали основу для понимания взаимодействия прибора и измеряемого объекта.

Однако эти работы далеко не исчерпывали всей проблемы. В дальнейшем возникли и иные точки зрения, а сама проблема стала предметом разносторонних, подчас довольно страстных обсуждений. Достаточно напомнить знаменитую дискуссию, вызванную появлением известной статьи А. Эйнштейна, Б. Подольского и Н. Розена [4], или более поздние споры, вызванные работой Д. Боба [5]. Юбилейный характер этого номера «Успехов физических наук» делает уместным напоминание о том, что этот журнал широко и обстоятельно освещал на своих страницах проблемы квантовой механики, предоставлял возможность высказаться представителям различных точек зрения.

«Различных»... Часто мы предпочитали говорить «противоположных», «исключающих» и т. п. Однако теперь, когда уже немало продумано и немало написано, многие из этих «альтернативных» точек зрения более разумно рассматривать лишь как различные аспекты одной и той же научной проблемы.

Рассказывают историю об одном раввине, который слыл очень мудрым. Как-то к нему обратились два еврея, державшиеся, по их мнению, противоположных взглядов, с тем, чтобы раби решил, кто же из них прав.

Выслушав их, раввин отметил: «Ты, Исаак, прав. И ты, Авраам, тоже прав». Тогда неудовлетворенные евреи пожаловались жене раввина с тем, чтобы она повлияла на него и заставила признать правоту одного из них. «Я не понимаю, раби, как ты, будучи столь мудрым, мог признать правоту обоих, в то время как они утверждают противоположное?» — обратилась она к мужу. Подумав, раби ответил: «И ты права». Итак, дело, видимо, не столько в противопоставлении различных точек зрения, сколько в последовательном развитии и углубленном понимании проблемы.

В этом очерке я не намерен описывать историю развития квантовой механики.

Я хотел бы показать, что в последние годы произошел существенный прогресс в понимании проблемы измерения в квантовой механике, и цель этой статьи — популяризировать этот прогресс.

## § 2. Влияние микросистемы на измерительный прибор

Сама идея, лежащая в основе этого прогресса, не нова. Еще много, много лет назад автор этих строк обсуждал с проф. А. А. Власовым целесообразность и возможность включить в квантовомеханические рассмотрения не только измеряемый объект, но и измеряющий прибор с тем, чтобы весь процесс измерения мог быть описан методами математической физики как объективный физический процесс.

Однако в то время не был найден пример такого описания настолько ясный, чтобы послужить отправным для новой точки зрения. К тому же в то время представление о том, что прибор не должен включаться в систему, описываемую квантово-механическими способами, было очень влиятельным.

Предполагалось, что в этом случае потребовался бы новый макроскопический прибор, описываемый опять-таки классически и необходимый для изучения ситуации в сложной системе «микросистема + прибор». Таким образом, проблема взаимодействия микросистемы и прибора была бы лишь перенесена в другое место. Ниже мы увидим, в чем заключается ошибочность этого распространенного представления о взаимоотношении: прибора и микросистемы. Вторая сторона дела заключается в том, что имела естественная тенденция подчеркивать тот факт, что измерение влияет на состояние измеряемого микрообъекта, и было оставлено в тени то тривиальное, но наиважнейшее обстоятельство, что микрообъект обязан влиять на состояние измерительного прибора. В противном случае прибор, очевидным образом, не выполняет своего назначения. Это влияние микрообъекта на измерительный прибор можно изучить только в том случае, если мы объединим микрообъект и измерительный аппарат в одну систему и решимся рассматривать ее методами квантовой механики. Прежде чем переходить к изложению способов такого объединения, напомним обычное описание процесса измерения в квантовой механике.

С чисто формальной точки зрения процесс измерения в квантовой механике описывается как процесс «редукции» волновой функции. Именно, если до измерения состояние микросистемы описывалось волновой функцией  $\Psi$ , которая в общем случае является суперпозицией состояний  $\Phi_L$ , состояний с определенным значением динамических переменных:

$$\Psi = \sum_L C_L \Phi_L \quad (1)$$

(здесь  $C_L$  — амплитуды частных состояний), то после измерения динамических переменных  $L$  волновая функция  $\Psi$  «стягивается» к одному из членов суперпозиции (1), например к  $\Phi_L$ :

$$\Psi \rightarrow \Phi_L. \quad (2)$$

Этот процесс не описывается каким-либо уравнением, а попросту отображает результат измерения: из состояния  $\Psi$  с неопределенным (в общем случае) значением динамической переменной  $L$  (так что среднее квадратичное значение в этом состоянии  $\overline{\Delta L^2} \neq 0$ ) после измерения возникает состояние  $\Phi_L$  с определенным значением этой переменной (в этом состоянии  $\overline{\Delta L^2} = 0$ ). На ранних стадиях развития квантовой механики «редукция волнового пакета» рассматривалась как естественное следствие вмешательства измерительного прибора в состояние объекта.

Однако в упомянутой дискуссии А. Эйнштейна и др., с одной стороны, и Н. Бора с другой, выяснилось, что состояние микрообъекта может меняться и в том случае, когда явно нет никакого вмешательства прибора в его состояние. Разъяснение возникшего парадокса было дано с различных точек зрения Н. Бором [1] и Л. И. Мандельштамом [6] (см. также [7]).

Для нас важно то, что эта дискуссия дала основания для толкования волновой функции как «записной книжки» наблюдателя — математического символа, содержащего полную информацию о возможных результатах того или иного опыта и об относительной вероятности этих результатов.

С этой точки зрения редукция волнового пакета есть попросту математическая запись изменения информации наблюдателя.

В этой концепции квантово-механических измерений парадокс А. Эйнштейна само собою отпадает.

Однако возникает другая проблема, давно отмеченная Э. Шрёдингером, и притом в форме, способной подействовать на нервы многим из читателей. Именно Э. Шрёдингер приводит пример атомной системы, имеющей два квантовых состояния:  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . В общем случае ее состояние описывается волновым пакетом

$$\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2. \quad (3)$$

Первое из этих состояний заставляет срабатывать счетчик Гейгера; второе оставляет его в покое. Срабатывание счетчика Гейгера посредством усилия разбивает ампулу с синильной кислотой в камере, где находится... кошка [8].

Итак, дело начинается с того, что наблюдатель, заглядывая в свою «записную книжку» с целью предсказать результат будущего измерения, среди возможных результатов наблюдения находит «факт» возможной интерференции состояний живой и мертвой кошки! В самом деле, из (3) следует

$$|\psi_M|^2 = |c_1 \psi_1|^2 + |c_2 \psi_2|^2 + 2\text{Re } c_1^* c_2 \psi_1 \psi_2; \quad (4)$$

последний член указывает на такую странную возможность.

После наблюдения фактического события ( $\psi_1$  или  $\psi_2$ ) судебная медицина свидетельствует о смерти несчастной кошки или о ее здоровье, а волновая функция «стягивается» в судебном протоколе к  $\psi_1$  или к  $\psi_2$ !

Нетрудно видеть, что этот страшный пример можно сделать еще более волнующим, если на место кошки поставить самого наблюдателя вместе с медицинскими чиновниками. Тогда в случае  $\psi_1$  уже некому будет «стягивать» волновую функцию.

Обратимся, однако, к более реалистическим примерам. Представим себе, что речь идет о распаде радиоактивного атома. Пусть состояние  $\psi_1$  есть

состояние нераспавшегося атома, а состояние  $\psi_2$  — распавшегося. Теория показывает, что  $c_1 \simeq e^{-\lambda t}$ , где  $t$  — время, а  $T = 1/\lambda$  — период полураспада;  $|c_2|^2 = 1 - |c_1|^2$ , так что коэффициент  $c_2$  возрастает со временем, а коэффициент  $c_1$  уменьшается. Вообразим себе, что речь идет о далеком прошлом, когда ни один наблюдатель не мог бы передать нам информацию о фактической судьбе радиоактивного атома. Пусть это происходит во времена ихтиозавров! Если период  $t$ , отделяющий нас от этого времени, значительно превосходит период распада атома  $T$ , то мы можем с большой степенью вероятности утверждать, что атом распался. Однако для окружения атома совсем не безразлично, когда именно он распался на самом деле.

Уместно вспомнить рассказ писателя-фантаста Р. Брэдли, который описывает, как путешественники в доисторическое прошлое по неосторожности раздавили бабочку, и это малое событие повлияло на исход президентских выборов в США в 2000 году!

Распад атома мог вызвать ту или иную цепочку событий, содержание которой могло существенно зависеть от того момента времени, когда произошел этот распад. Между тем современный нам наблюдатель все еще не имел случая «стянуть» волновую функцию в функцию  $\psi$ , содержащую суперпозицию двух возможностей: атом распался —  $\psi_2$ , или другая возможность  $\psi_1$  — он еще находится в исходном состоянии.

Если же современный наблюдатель все же даст себе труд измерить состояние атома, то скорее всего он найдет, что атом распался и находится в состоянии  $\psi_2$ . Однако наш современник, если  $t \gg T$ , серьезно опаздывает со своим заключением, так как какой-либо другой наблюдатель пришел бы к такому же выводу, но раньше нашего современника. Таким образом, хотелось бы выразить на языке квантовой механики утверждение «*атом распался*» независимо от наблюдателя. Действительно, это событие ведет к различным следствиям в зависимости от момента распада атома и поэтому не может быть связано с изменениями информации наблюдателя.

Наблюдатель не участвует в событиях, о которых идет речь, поэтому должен быть исключен из игры.

Если вообразить себе последовательность наблюдателей, из которых один наш современник, а другие предшествуют ему один ранее другого, то в этой последовательности наблюдателей один будет выделен тем, что он первым отметит факт распада атома. Этот момент должен иметь объективное значение и находить свое отражение в аппарате квантовой механики без привлечения наблюдателя. Описанные сейчас парадоксы, свойственные пониманию волновой функции как сборника информации, как «записной книжки» наблюдателя, разъясняются, если подвергнуть анализу не только действие измерительного прибора на микросистему, но и действие микросистемы на прибор.

Идея о важности этой стороны дела легла в основу монографии автора и независимо от автора, в несколько иной форме, была развита в работах итальянских физиков А. Данери, А. Лоинджера и Г. Проспери [10]<sup>1</sup>.

### § 3

Мы начнем с простого примера, который иллюстрирует возможность математического описания эволюции совместной системы, состоящей из макросистемы (М) и измерительного прибора (П).

Заметим два важных обстоятельства:

а) Каждый измерительный прибор состоит из двух функционально различных частей: *анализатора* (А) и *детектора* (Д):  $P = A + D$ . Первая часть прибора обеспечивает разделение парциальных состояний  $\Phi_L$ , входящих в суперпозицию (1), на отдельные каналы ( $L$ ); иными словами, она практически осуществляет спектральное разложение сложного исходного состояния микросистемы  $\Psi$  на парциальные состояния  $\Phi_L$ .

Вторая часть, детектор, дает макроскопический сигнал, указывающий, в каком канале фактически оказалась микрочастица. Первая функция измерительного прибора как анализатора квантового ансамбля достаточно подробно освещена в литературе (см., например, [7]).

Вторая функция, детектирование Д, напротив, либо оставалась в тени, либо рассматривалась весьма поверхностно. Между тем именно исследование работы детектора снимает парадоксы, свойственные информационной точке зрения на процесс измерения.

б) Детектор должен быть *макроскопически неустойчивой системой*. Действительно, в противоположном случае микросистема не найдет в себе достаточно импульсно-энергетических ресурсов, чтобы вызвать макроскопическое явление — срабатывание детектора.

Это очевидное для физиков-экспериментаторов обстоятельство не подвергалось достаточному теоретическому анализу при обсуждении проблемы измерения.

Обратимся теперь к простейшим примерам.

**А. Определение импульса микрочастицы по ее взаимодействию с макроскопическим телом.** Рассмотрим теперь простой, но несколько формальный пример определения импульса  $k$  микрочастицы  $\mu$  по ее взаимодействию с макроскопическим телом  $M^1$ .

С самого начала очевидно, что это тело должно находиться в неустойчивом (или в почти неустойчивом) равновесии, иначе микрочастица не сможет «сдвинуть» его с места.

В качестве такого тела мы предложим шарик с массой  $M$ ; координата его центра тяжести пусть будет  $Q$ , а потенциальная энергия  $U(Q)$  вида, изображенного на рисунке. Мы, следовательно, предполагаем, что шарик находится в максимуме потенциальной энергии  $U$ . Его относительная устойчивость обусловлена небольшим относительным минимумом энергии  $U(Q)$ . Достаточно сообщить ему незначительную энергию  $\Delta E > U_0 - E_0$ , и шарик покатится под «откос». Таким образом, потенциальная энергия  $U(Q)$  имеет вид высокого вулкана с неглубоким кратером (ср. рисунок). Этот шарик и будет являться

где  $W(Q, \xi)$  — энергия взаимодействия шарика и микрочастицы. Микрочастицу  $\mu$  мы считаем свободной, а шарик  $M$  имеет потенциальную энергию  $U(Q)$ . Для простоты предположим, что  $W(Q, \xi)$  имеет вид

$$W(Q, \xi) = g\delta(Q - \xi) \quad (9)$$

и волновая функция  $\Phi(Q, \xi, t)$  для любого момента времени  $t$  подчиняется уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mathcal{H}(Q, \xi) \Phi. \quad (10)$$

Мы будем искать эту функцию в виде

$$\Phi(Q, \xi, t) = \Phi_0(Q, \xi) + \Phi^+(Q, \xi, t) + \Phi^-(Q, \xi, t). \quad (11)$$

Считая, что константа связи  $g$  мала, мы найдем функции  $\Phi^+$  и  $\Phi^-$  в первом приближении теории возмущений. В этом приближении

$$\begin{aligned} \Phi^+(Q, \xi, t) &= \int U_{p'k'}^+(t) \Psi_{p'}(Q) e^{ik'\xi} e^{i(\omega_{p'} + \omega_{k'})t} dp' dk' = \\ &= e^{i(\omega_0 + \omega_k)t} \int U_{p'k'}^+(t) \Psi_{p'}(Q) e^{ik'\xi} e^{-i\Omega t} dp' dk', \end{aligned} \quad (12)$$

$$\Omega = \omega_0 + \omega_k - \omega_{p'} - \omega_{k'} = \frac{z}{t}; \quad (13)$$

здесь  $\omega_0 = E_0/\hbar$  — энергия шарика в начальном состоянии,  $\omega'_p = E_{p'}/\hbar$ ,  $E'_p$  — его энергия в конечном состоянии,  $p'$  — импульс шарика после перехода в возбужденное состояние,  $\hbar\omega_k = \varepsilon_k$  и  $\hbar\omega'_k = \varepsilon'_k$  — энергии частицы до взаимодействия и после взаимодействия с шариком. Функция  $\Phi^-(Q, \xi, t)$  имеет аналогичный вид.

Далее, интегрирование уравнения (10) после подстановки в него функции (11) с учетом (12) дает

$$U_{p'k'}^+(t) = \frac{1}{\hbar} \frac{e^{i\Omega t} - 1}{\Omega} U_{p'k'0k}^+, \quad (14)$$

где матричный элемент  $U_{p'k'0k}^+$  равен

$$U_{p'k'0k}^+ = gA^+ \int \Psi_{p'}^*(Q) e^{-ik'\xi} \delta(Q - \xi) \Psi_0(Q) e^{ik\xi} dQ d\xi. \quad (15)$$

Функция шарика в возбужденном состоянии  $\Psi_{p'}(Q)$  может быть записана в квазиклассическом приближении в виде

$$\Psi_{p'}(Q) \sim N_{p'} \exp\left(\frac{1}{\hbar} S_{p'}(Q)\right), \quad (16)$$

где  $N_{p'}$  — нормирующий множитель, а  $S_{p'}(Q)$  — функция действия, приближенно равная  $S_{p'}(Q) \simeq p'Q$ . По этой причине интеграл в (15) равен фурье-образу  $\tilde{\Psi}_0(\alpha)$  от  $\Psi_0(Q)$  при  $\alpha = p' + k' - k$ . Поэтому

$$\Phi^+(Q, \xi, t) = e^{i(\omega_0 + \omega_k)t} \frac{gA^+}{\hbar} \int N_{p'}^* \tilde{\Psi}_0(p' + k' - k) \frac{1 - e^{-i\Omega t}}{\Omega} \Psi_{p'}(Q) e^{ik'\xi} dp' dk'. \quad (17)$$

Пусть теперь  $\mathcal{P}$  — то значение импульса шарика, которое отвечает сохранению энергии при взаимодействии. Из (15) следует, что это будет при  $z/t = 0$  и

$$\omega_p = \frac{E_p}{\hbar} = \omega_0 + \omega_k - \omega_{k'}, \quad E_p = \frac{\mathcal{P}^2}{2M} + \text{const};$$

поэтому

$$\frac{\mathcal{P}'^2}{2M} - \frac{\mathcal{P}^2}{2M} = \frac{z}{t}. \quad (18)$$

Отсюда находим, что  $\mathcal{P}' - \mathcal{P} = -\frac{z}{vt}$ ,  $d\mathcal{P}' = -\frac{dz}{vt}$ , где  $v = \frac{\mathcal{P}}{M}$  — скорость шарика. Далее, при  $z \simeq 0$

$$\frac{k'^2}{2\mu} - \frac{k^2}{2\mu} = \omega_0 - \frac{\mathcal{P}'^2}{2M}, \quad (19)$$

или

$$(k' - k)(k' + k) = 2\mu\omega_0 - \frac{\mu}{M} \mathcal{P}'^2. \quad (20)$$

Если функция  $\Psi_0(Q)$  не слишком острая (амплитуда не очень мала, что будет при не очень глубоком кратере!), то ее образ Фурье  $\tilde{\Psi}_0(p' + k' - k)$  будет заметно отличен от нуля только при

$$p' + k' - k \simeq 0. \quad (21)$$

Из (20) и (21) при  $M \rightarrow \infty$  следует, что

$$k' = -k, \quad (22)$$

$$\mathcal{P} = 2k, \quad (23)$$

что и следовало ожидать при столкновении легкой частицы с тяжелым, слабо связанным шариком: произошло упругое отражение легкой микрочастицы с малой (при  $M \rightarrow \infty$  исчезающе малой) передачей энергии.

Обозначим теперь  $p' + k' - k = \mathcal{P} + k' - k - \frac{z}{vt} = q$ , так что  $dk' = dq$ ,  $k' = q - \mathcal{P} + k + \frac{z}{vt}$ . Вводя в интеграл (17) новые переменные интегрирования  $q$  и  $z$ , получим из (17)

$$\Phi^+(Q, \xi, t) = \frac{gA^+}{\hbar} e^{i(\omega_0 + \omega_k)t} \frac{|N_p|^2}{v} \psi_0(\xi) e^{i\mathcal{P}Q} e^{i(k - \mathcal{P})\xi} I + \left( \frac{Q - \xi}{vt} \right), \quad (24)$$



где

$$I^+\left(\frac{Q-\xi}{vt}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-iz}}{z} \exp\left[\frac{iz}{vt}(Q-\xi)\right] dz. \quad (25)$$

Если обозначить известный разрывный интеграл

$$J(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iaz}}{z} dz = \begin{cases} \pi i, & a > 0, \\ -\pi i, & a < 0, \end{cases} \quad (26)$$

то

$$I^+\left(\frac{Q-\xi}{vt}\right) = J\left(\frac{\xi-Q}{vt}\right) - J\left(\frac{vt+\xi-Q}{vt}\right).$$

Заметим, что для  $I^+$  очевидно  $vt > 0$ , так как в этом случае  $\mathcal{P} = 2k > 0$ . Поэтому из (27) следует, что  $I^+ = -2\pi i$  для  $vt > Q - \xi$  и  $Q - \xi > 0$ ; иначе:  $I^+ = 0$ . Напомним, что ввиду наличия в  $\Phi^+$  множителя  $\Psi_0(\xi)$  важны только малые значения  $|\xi| \lesssim a$ . Поэтому полученный результат означает, что  $\Phi^+(Q, \xi, t)$  отлично от нуля при  $t \rightarrow \infty$  только в области  $0 < Q < +\infty$ , т. е. справа от вершины кратера, что соответствует полученному от микрочастицы положительному импульсу  $\mathcal{P} = 2k$ .

Совершенно подобным же образом проводится вычисление и функции  $\Psi^-(Q, \xi, t)$ . В этом случае  $\mathcal{P} < 0$ ,  $v < 0$  и вместо множителя  $I^+$  получим множитель

$$I^-\left(\frac{Q-\xi}{vt}\right) = J\left(\frac{Q-\xi}{vt}\right) - J\left(\frac{vt-Q+\xi}{vt}\right), \quad (27)$$

отличный от нуля для  $vt < Q - \xi < 0$ . В этом случае шарик вывалится из кратера налево.

Построим теперь матрицу плотности для нашего случая:

$$\begin{aligned} \rho(Q, \xi, Q', \xi', t) = & \Psi^*(Q, \xi, t) \Psi(Q', \xi', t) = \Phi_0^*(Q, \xi, t) \Phi_0(Q', \xi', t) + \\ & + \Phi_0^*(Q, \xi, t) \Phi^+(Q', \xi', t) + \Phi_0^*(Q, \xi, t) \Phi^-(Q', \xi', t) + \\ & + \Phi^{+*}(Q, \xi, t) \Phi_0(Q', \xi', t) + \Phi^{-*}(Q, \xi, t) \Phi_0(Q', \xi', t) + \\ & + \Phi^{+*}(Q, \xi, t) \Phi^+(Q', \xi', t) + \Phi^{+*}(Q, \xi, t) \Phi^-(Q', \xi', t) + \\ & + \Phi^{-*}(Q, \xi, t) \Phi^+(Q', \xi', t) + \Phi^{-*}(Q, \xi, t) \Phi^-(Q', \xi', t) + \\ & + \Phi^{-*}(Q, \xi, t) \Phi^-(Q', \xi', t). \end{aligned} \quad (28)$$

При  $t \rightarrow \infty$ ,  $|Q|, |Q'| > a$  все члены этой матрицы исчезают, кроме двух последних. Именно, члены, содержащие  $\Phi_0$ , исчезают при  $Q, Q' \rightarrow \pm\infty$  как  $\exp(-Q^2/a^2)$  или  $\exp(-Q'^2/a^2)$ , а интерференционные члены, содержащие произведения типа  $\Phi^{+*}\Phi^-$ , исчезают при  $t \rightarrow \infty$  из-за свойств функций  $I^\pm(Q - \xi/vt)$ . Поэтому при  $t \rightarrow \infty$  и для  $|Q|, |Q'| \gg a$  получаем

$$\begin{aligned} \rho(Q, \xi; Q', \xi', t) = & \Phi^{+*}(Q, \xi, t) \Phi^+(Q', \xi', t) + \\ & + \Phi^{-*}(Q, \xi, t) \Phi^-(Q', \xi', t), \quad t \rightarrow \infty, \quad |Q|, |Q'| \gg a. \end{aligned} \quad (29)$$

Мы видим, что макроскопический прибор разрушает интерференцию состояний микрочастицы  $A^+ e^{ik\xi}$  и  $A^- e^{-ik\xi}$ ; далее, при  $Q$  и  $Q' \rightarrow +\infty$

$$\rho(Q, \xi; Q', \xi', t) \rightarrow \Phi^{+*}(Q, \xi, t) \Phi^+(Q', \xi', t) \quad (30)$$

и при  $Q, Q' \rightarrow -\infty$

$$\rho(Q, \xi; Q', \xi', t) \rightarrow \Phi^{-*}(Q, \xi, t) \Phi^-(Q', \xi', t). \quad (30')$$

Эти два случая отвечают наблюдению шарика либо справа от кратера (30), либо слева от него (30').

При  $Q \rightarrow +\infty$  и  $Q' \rightarrow -\infty$  или  $Q \rightarrow -\infty$  и  $Q' \rightarrow +\infty$  (это случай интерференции результатов наблюдений справа и слева)  $\rho(Q, \xi; Q', \xi', t) \rightarrow 0$ . Этого и следовало ожидать от «хорошего» прибора: его «стрелка» должна занимать одно из возможных определенных положений. В нашем примере «стрелкой» служит тяжелый макроскопический шарик. На этом примере ясно видно, как *квантовое явление* — рассеяние кванта на шарике  $M$  — *само собой* перерастает благодаря слабой устойчивости шарика, расположенного на вершине потенциальной горы, в *макроскопическое, классическое* явление — движение тяжелого шарика вправо или влево от кратера. При этом макроскопичность явления обеспечивается достаточной высотой потенциальной горы, на вершине которой первоначально покоился шарик.

**Б. Термодинамически неустойчивый детектор.** Рассмотрим схематический пример термодинамически неустойчивого детектора микрочастицы [9]. В качестве микрочастицы будем иметь в виду атом, имеющий один валентный электрон, так что весь атом имеет магнитный момент, равный магнитному моменту этого электрона:  $M_B \sigma$ , где  $M_B$  — магнетон Бора, а  $\sigma(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  — спиновая матрица Паули. Волновая функция атома  $\Psi$  может быть записана в виде

$$\Psi(Q, x) = \Psi_1(Q) \psi_1(x) + \Psi_2(Q) \psi_2(x), \quad (31)$$

где  $\Psi_1(Q)$  и  $\Psi_2(Q)$  — функции, описывающие движение атома в целом;  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$  — функции, описывающие внутреннее состояние атома и соответствующие двум возможным ориентациям магнитного момента атомного электрона.

Для определенности мы будем считать, что магнитное поле направлено по оси  $Oz$ , так что функция  $\psi_1$  отвечает ориентации момента по оси  $Oz$ , а функция  $\psi_2$  — ориентации против направления этой оси. Мы предположим, что под действием внешнего магнитного поля  $H$ , которое мы считаем неоднородным, пучки атомов, имеющих различную ориентацию магнитных моментов, уже разделены пространственно, так что

$$\Psi_1(Q) \Psi_2(Q) = 0. \quad (32)$$

Таким образом, мы будем считать, что первая функция измерительного прибора — разрушение интерференции состояний  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$ , соответствующих различным ориентациям спина валентного электрона, уже выполнена. Иными словами, после прохождения неоднородного магнитного поля нам остается

только «подставить» под каждый из пучков свой детектор, который бы зарегистрировал факт попадания частицы, принадлежащей соответствующему пучку, т. е. фактически зарегистрировал бы то или иное состояние частицы («состояние» в смысле ориентации ее спина).

В качестве такого детектора мы рассмотрим систему из большого числа осцилляторов  $s = 1, 2, \dots, N$ ,  $N \rightarrow \infty$ , которые, чтобы не загромождать расчет дополнительными обозначениями, будем считать двумерными, совершающими колебания в плоскости  $x, y$ . Далее, мы предположим, что колебания типа  $x$  и колебания типа  $y$  практически не взаимодействуют друг с другом.

Это позволит нам приписать различную температуру  $\theta$   $x$ -колебаниям и  $y$ -колебаниям. Именно, мы будем считать, что в исходном состоянии детектора (в «исходном» в смысле взаимодействия с микрочастицей  $\mu$ )  $x$ -колебания связаны с термостатом Гиббса, имеющим температуру  $\theta$ ; поэтому и сами  $x$ -колебания имеют также при  $t = 0$  такую же температуру; что же касается  $y$ -колебаний, то мы предположим, что при  $t = 0$  они находятся при температуре абсолютного нуля. Таким образом, детектор находится в термодинамически неустойчивом состоянии: всякое, даже небольшое, воздействующее  $x$ - и  $y$ -колебания, немедленно приведет к интенсивной передаче энергии от  $x$ -колебаний к  $y$ -колебаниям.

Факт «нагрева»  $y$ -колебаний и есть то макроскопическое явление, которое *удостоверяет* состояние данной индивидуальной микрочастицы, в нашем примере атома.

Рассмотрим теперь математически работу такого детектора. Гамильтониан невозмущенной системы наших осцилляторов напомним в виде

$$H_0 = \sum_{s=1}^N H_0(x_s y_s) - E_0, \quad (33)$$

$$H_0(x_s y_s) = -\frac{\hbar^2}{2M} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_s^2} \right) + \frac{M\omega_0^2}{2} (x_s^2 + y_s^2); \quad (34)$$

здесь  $E_0$  — нулевая энергия,  $E_0 = N\hbar\omega_0/2$ ,  $M$  — масса осциллятора,  $\omega_0$  — частота их собственных колебаний.

Энергию взаимодействия  $W$  этих осцилляторов с микрочастицей из пучка, падающего на детектор, примем в виде<sup>1</sup>

$$W = \omega \sum_{s=1}^N M_{sz} \sigma_{sz} = -i\hbar\omega \sum_{s=1}^N \sigma_z \frac{\partial}{\partial y_s}, \quad (35)$$

где  $M_s$  — механический момент отдельного осциллятора, а  $\sigma_z$  — спиновая матрица оптического электрона атома. Так как мы предположили, что атомы в пучке ориентированы по оси  $z$ , вместо  $M\sigma$  мы написали  $M_z\sigma_z$ , где

$$M_z = -i\hbar \left( x_s \frac{\partial}{\partial y_s} - y_s \frac{\partial}{\partial x_s} \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi_s},$$

<sup>1</sup> Вывод энергии взаимодействия  $W$  и явная формула для параметра  $\omega$  даны в работе № 70. Лекция 13. — *Прим. ред.*

и вместо  $\sigma$  — просто  $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ; очевидно, для одного детектора нужно вместо  $\sigma_z$  взять  $+1$ , а для другого  $-1$ . Заметим, что

$$x_s = r_s \cos \varphi_s, \quad y_s = r_s \sin \varphi_s, \quad (36)$$

$$r_s = +\sqrt{x_s^2 + y_s^2}. \quad (36')$$

Детектор Д мы будем описывать матрицей плотности  $\rho$ , которую возьмем в  $x, y$ -представлении.

Подразумевая под  $x$  всю совокупность  $x$ -координат осцилляторов  $(x_1, x_2, \dots, x_s, \dots, x_N)$ , а под  $y$  — таким же образом все координаты  $(y_1, y_2, \dots, y_s, \dots, y_N)$ , мы можем записать матрицу  $\rho$  в виде  $\rho = \rho(x, y; x', y', t)$ .

Матрица  $\rho$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + [H_0 + W, \rho] = 0. \quad (37)$$

Нам удобнее будет вместо матрицы  $\rho$  работать с матрицей

$$\tilde{\rho} = \exp\left(\frac{iH_0 t}{\hbar}\right) \rho \exp\left(-\frac{iH_0 t}{\hbar}\right). \quad (38)$$

Заметим, что  $[W, H_0] = 0$ , поэтому  $\widetilde{W} = W$ , и, подставляя вместо  $\rho$  ее выражение через  $\tilde{\rho}$ , мы получим для  $\tilde{\rho}$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + [W, \tilde{\rho}] = 0. \quad (39)$$

При подстановках оператора  $W$  из (35) следует придерживаться правил умножения матриц с непрерывными строками и колонками. Для применения этого правила  $W$  нужно записать в матричной форме. Например, вместо оператора  $-i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$  следует писать

$$\mathcal{P}_{q'q''} \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial q'} \delta(q' - q''). \quad (40)$$

Умножение  $\mathcal{P}\rho$  означает

$$(\mathcal{P}\rho)_{q'q'''} = \int \mathcal{P}_{q'q''} \rho(q''', q'') dq''' = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q'} \rho(q', q'') \quad (40')$$

и т.п. Если воспользоваться этими простыми правилами, то подстановка  $W$  в (39) приведет, в раскрытом виде, к простому уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \omega \sum_{s=1}^N \left( \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \varphi_s} + \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \varphi'_s} \right) = 0. \quad (41)$$

Это уравнение решается элементарно. Его общий интеграл есть

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\omega t + \varphi_1, \omega t + \varphi_2, \dots, \omega t + \varphi_s, \dots, \omega t + \varphi_N, r_1, r_2, \dots, r_s, \dots, r_N; \\ \omega t + \varphi'_1, \omega t + \varphi'_2, \dots, \omega t + \varphi'_s, \dots, \omega t + \varphi'_N, r'_1, r'_2, \dots, r'_s, \dots, r'_N), \quad (42)$$

куда  $r_1, r_2, \dots, r_N$  и  $r'_1, r'_2, \dots, r'_N$  входят как параметры.

Обратимся теперь к начальным данным для этой матрицы. Чтобы избежать загромождающих формулы множителей, введем в качестве единицы длины величину  $l = \sqrt{\hbar/2M\omega_0}$  и вместо температуры  $\theta$  обратную ей величину  $\beta = \hbar\omega_0/\theta$ . В этих единицах все наши величины станут безразмерными. При  $t = 0$  матрица  $\tilde{\rho}(x, y; x', y', 0) = \rho_\theta(x, x') \rho_0(y, y')$ . Соответственно сделанным предположениям об абсолютном нуле температуры  $y$ -колебаний имеем

$$\rho_0(y, y') = C_0 \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{s=1}^N (y_s^2 + y_s'^2) \right], \quad (43)$$

где  $C_0$  — некоторый постоянный нормировочный множитель, а  $\exp(-y_s^2/2)$  — волновая функция, описывающая нулевое колебание  $s$ -го осциллятора по оси  $Oy$ .

Значительно сложнее обстоит дело с вычислением матрицы  $\rho_\theta(x, x')$ , так как  $x$ -колебания находятся при температуре  $\theta$ . В этом случае состояние является смешанным и веса отдельных состояний  $\psi_n(x)$ , имеющих энергию  $E_n$ , будут  $\exp(-E_n/\theta) = \exp(-\beta E_n)$ ; поэтому матрица  $\rho_0(x, x')$ , описывающая ансамбль, находящийся в равновесии с термостатом Гиббса при температуре  $\theta$ , запишется в виде

$$\rho_\theta(x, x') e^{\beta F(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \psi_n^*(x) \psi_n(x') = e^{\beta F(\beta)} Z_0(x, x'), \quad (44)$$

где

$$Z_0(x, x') = \sum_n e^{-\beta E_n} \psi_n^*(x) \psi_n(x'). \quad (45)$$

Здесь сумма распространена сперва по всем состояниям  $n$ , имеющим энергию  $E_n$ , а затем по всем состояниям с различной энергией  $E_n$ . Даже в случае осцилляторов прямое вычисление такой суммы весьма затруднительно. Поэтому мы применим обходной маневр, основанный на том факте, что если  $H(x)$  — оператор Гамильтона рассматриваемой системы, а  $\psi_n^*(x)$  — его собственная функция, то

$$H(x) \psi_n^*(x) = E_n \psi_n^*(x) \quad (46)$$

и, стало быть,

$$f(H) \psi_n^*(x) = f(E_n) \psi_n^*(x).$$

Поэтому (45) мы можем записать в виде

$$Z_\theta(x, x') = \sum_n e^{-\beta H(x)} \psi_n^*(x) \psi_n(x') \quad (45')$$

и, дифференцируя по  $\beta$ , найдем, что сумма  $Z_\theta(x, x')$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial Z_\theta}{\partial \beta} + H Z_\theta = 0. \quad (47)$$

Вместо  $H(x)$  мы должны подставить сюда невозмущенный оператор Гамильтона для колебаний, т. е.

$$H_0(x) = \sum_{s=1}^N \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} + \frac{1}{2} x_s^2 \right) - \frac{1}{2} N, \quad (48)$$

который мы заимствуем из (33) и (34), учитывая новые единицы измерения длины  $x$ .

Переменные в уравнении (47) в силу аддитивности гамильтониана (48) разделяются, и мы можем решать (48) в явном виде для одной переменной  $x$ ; в этом случае имеем

$$\frac{\partial Z_\theta(x, x')}{\partial \beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z_\theta(x, x')}{\partial x^2} + \left( \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right) Z(x, x') = 0. \quad (49)$$

Будем искать решение этого уравнения в форме

$$Z_\theta(x, x') = \exp(a + bx^2 + cx x' + bx'^2) \quad (50)$$

и с граничным условием

$$Z_\theta(x, x') \sim \frac{1}{\sqrt{\beta}} \exp \left[ -\frac{1}{2\beta} (x - x')^2 \right], \quad \theta \rightarrow \infty, \quad \beta \rightarrow 0, \quad (51)$$

что соответствует «испарению» осцилляторов при  $\theta \rightarrow \infty$ , так как (51) имеет вид статсуммы для частиц идеального газа.

Подстановка (40') в (49) приводит к уравнениям

$$\frac{\partial a}{\partial \beta} = b - \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial b}{\partial \beta} = 2b^2 - \frac{1}{2}, \quad (52)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \beta} = 2bc, \quad \frac{\partial b}{\partial \beta} = \frac{1}{2} c^2. \quad (52')$$

Эта система совместна и имеет решение

$$b = -\frac{1}{2} \frac{e^{2\beta+1}}{e^{2\beta}-1} \rightarrow -\frac{1}{2\beta}, \quad (53)$$

$$a = \int \left( b - \frac{1}{2} \right) d\beta = -\frac{\beta}{2} + \int b d\beta \rightarrow -\frac{1}{2} \ln \beta, \quad (53')$$

$$c^2 = 4b^2 - 1, \quad c = -\sqrt{4b^2 - 1}; \quad (53'')$$

введем еще параметр  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{c}{2b} = -\sqrt{1 - \frac{1}{4b^2}} \rightarrow -1. \quad (53''')$$

Легко убедиться в том, что начальное условие (51) в этом случае удовлетворено.

На основании (50), (53) и (53'), (53''), (53''') мы можем теперь записать матрицу  $\rho_\theta(x, x')$  в явном виде:

$$\rho_\theta(x, x') = C_\theta \exp \left[ b \sum_{s=1}^N (x_s^2 - 2\gamma x_s x'_s + x'^2_s) \right]; \quad (54)$$

здесь  $C_\theta$  — некоторый нормирующий множитель, а именно  $C_\theta = e^{\beta F(\beta)}$ , где  $F(\beta)$  — свободная энергия осциллятора. Учитывая теперь еще (43), получим полную матрицу плотности  $\tilde{\rho}$ , описывающую состояние детектора при  $t = 0$ :

$$\tilde{\rho}(x, y; x', y', \theta) = C_0 C_\theta \exp \left[ b \sum_{s=1}^N (x_s^2 - 2\gamma x_s x'_s + x'^2_s) - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N (y_s^2 + y'^2_s) \right]. \quad (55)$$

Чтобы найти теперь матрицу  $\tilde{\rho}$  в момент времени  $t$ , нужно учесть (36) и (36') и заменить всюду в (55), согласно (42), углы  $\varphi_s$  на  $\varphi_s + \omega t$  и углы  $\varphi'_s$  на  $\varphi'_s + \omega t$ . В результате получим

$$\tilde{\rho}(x, y; x', y', t) = C_0 C_\theta \exp [\Delta + A \cos 2\omega t + B \sin 2\omega t], \quad (56)$$

где

$$\Delta = \frac{b}{2} \sum_{s=1}^N [r_s^2 + r'^2_s - 2\gamma r_s r'_s \cos(\varphi_s - \varphi'_s)] - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N (r_s^2 + r'^2_s), \quad (57)$$

$$A = \frac{b}{2} \sum_{s=1}^N [r_s^2 \cos 2\varphi_s + r'^2_s \cos^2 \varphi'_s - 2\gamma r_s r'_s \cos(\varphi_s + \varphi'_s)] - \\ - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N (r_s^2 \cos 2\varphi_s + r'^2_s \cos 2\varphi'_s), \quad (58)$$

$$B = -\frac{b}{2} \sum_{s=1}^N [r_s^2 \sin 2\varphi_s + r'^2_s \sin 2\varphi'_s - 2\gamma r_s r'_s \sin(\varphi_s + \varphi'_s)] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N (r_s^2 \sin 2\varphi_s + r'^2_s \sin 2\varphi'_s). \quad (59)$$

Этот несколько громоздкий результат следует усреднить за период  $\pi/\omega$ , если мы считаем, что частота, характеризующая связь атома с детектором, достаточно велика.

Поэтому наблюдаемый результат будет определяться матрицей

$$\tilde{\rho}(x, y; x', y', t) = C_0 C_\theta e^{\Delta \frac{\pi}{\omega}} \int_0^{\pi/\omega} \exp(A \cos 2\omega t + B \sin 2\omega t) dt. \quad (60)$$

Последний интеграл приводится к функции Бесселя мнимого аргумента:

$$\frac{\pi}{\omega} \int_0^{\pi/\omega} \exp(A \cos 2\omega t + B \sin 2\omega t) dt = I_0(R) + \dots, \quad (61)$$

где  $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ , а многоточие означает члены, экспоненциально убывающие при  $R \rightarrow \infty$ . Поэтому усредненная по времени матрица  $\rho(x, y; x', y', t)$  равна

$$\tilde{\rho}(x, y; x', y', t) = C_0 C_\theta e^A I_0(R); \quad (62)$$

$$I_0(R) = 1 - \frac{1}{4} R^2 + \dots, \quad |R| \ll 1, \quad (63)$$

$$I_0(R) \simeq \frac{e^R}{\sqrt{2\pi R}} + \dots, \quad |R| \gg 1, \quad (63')$$

так что при малых  $R$  имеем

$$\overline{\tilde{\rho}(x, y; x', y', t)} = \frac{1}{2} C_0 C_\theta e^{\Delta} \quad (64)$$

и при больших  $R$

$$\overline{\tilde{\rho}(x, y; x', y', t)} = C_0 C_\theta \frac{e^{\Delta - R}}{\sqrt{8\pi R}}. \quad (64')$$

Если вспомнить, что

$$b = -\frac{1}{2\beta} = -\frac{\theta}{2},$$

то появление множителя  $e^{\Delta}$  с  $\Delta$  из (58) указывает на то, что энергия распределась между  $x$ -колебаниями и  $y$ -колебаниями, а температура понизилась от  $\theta$  на  $\theta/2$ .

При больших значениях  $R$  результат также свидетельствует о перераспределении энергии между  $y$ - и  $x$ -колебаниями, но не является столь наглядным, как при малых  $R$ .

Итак, мы видим, что микрочастица, вторгшись в термодинамически неустойчивый детектор, произвела там полное перераспределение энергии, т.е. *макроскопическое явление*. Из приведенных примеров видно, что макроскопический измерительный прибор должен быть *неустойчивой системой* (точнее, *почти неустойчивой*).



В силу этой неустойчивости исходное квантовое явление само собой перерастает в явление макроскопическое, посредством которого микросистемы и заявляют о своем появлении в том или ином канале.

Имея в виду грандиозный масштаб такого макроскопического явления сравнительно с иницилирующим его исходным микроявлением, мы можем рассматривать его как *взрыв*.

Таким образом, микрочастица заявляет о своем состоянии *взрывом в микромире*.

## Заключение

С изложенной точки зрения редукция волнового пакета (2) отражает объективный процесс, заключающийся в том, что микроявление порождает макроявление.

Это превращение квантового явления в макроскопическое может быть прослежено математически.

При этом взгляде на измерение сами собой отпадают парадоксы, связанные с кажущимся прямым влиянием изменения информации наблюдателя на течение реальных событий, и вся физическая картина явлений, изучаемых квантовой механикой, может быть теперь резюмирована следующим образом.

Квантовая механика изучает микросистемы  $\mu$  в определенной макроскопической обстановке  $\mathcal{M}$ , символически — она изучает сумму  $\mu + \mathcal{M}$ . Макроскопическая обстановка может быть разложена на две части:

$$\mathcal{M} = M + \Pi.$$

Первая часть диктует микросистеме  $\mu$  условия ее движения, иными словами, определяет ее состояние. Вторая часть  $\Pi$  макрообстановки является макроскопически неустойчивой, и микрочастица способна вызвать в ней макроскопическое явление<sup>1</sup>. Эта часть может быть использована наблюдателем в качестве измерительного прибора, если наличие  $\Pi$ , по возможности, не влияет на часть макрообстановки  $M$ , организующей исходное состояние микрочастицы. Повторение (или, иначе, воспроизводство) тождественных совокупностей  $\mathcal{M} + \mu$  образует *квантовый ансамбль*. Этот ансамбль может быть охарактеризован волновой функцией  $\Psi_\mu$  (или, в общем случае, матрицей плотности  $\rho_M$ ).

Повторение совокупностей  $\mathcal{M}$  (или, иначе, их воспроизводство) также образует квантовый ансамбль, который может быть описан матрицей плотности  $\rho_{\mathcal{M}}$ . Эта матрица плотности в начальный момент времени может быть записана в виде произведения двух матриц плотности:

$$\rho_{\mathcal{M}}^0 = \rho_M^0 \rho_\Pi.$$

где  $\rho_\Pi$  — матрица плотности, описывающая макроскопически неустойчивую часть макрообстановки  $\Pi$  в начальный момент времени.

---

<sup>1</sup> Ясно, что  $\mathcal{M}$  не всегда содержит  $\Pi$ .

Ансамбль, описываемый матрицей плотности  $\rho_{\text{м}}$ , обладает той существенной особенностью, что с течением времени в нем развивается макроскопическое явление, инициированное микросистемой.

Развитие этого явления и есть физический механизм, обуславливающий редукцию волновой функции (2).

Ясно, что различная организация макроскопически неустойчивой части макростановки П будет приводить к различным типам редукции и соответствовать в обычном понимании различным измерительным аппаратам.

## Список литературы

1. Бор Н. // УФН. 1936. Т. 16(4). С. 446; 1958. Т. 66(3). С. 571.
2. Гейзенберг В. Физические принципы квантовой механики. М.: ГТТИ, 1932.
3. фон Нейман Дж. Математические основания квантовой механики. М.: Наука, 1964.
4. Эйнштейн А., Подольский Б., Розен Н. // УФН. 1936. Т. 16(4). С. 440.
5. Бом Д. О возможности интерпретации квантовой теории на основе представления о «скрытых» параметрах // Вопросы причинности в квантовой теории: Сб. переводов / Под ред. Я.П.Терлецкого и А.А.Гусева. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. С. 34–64;  
Bohm D. // Phys. Rev. 1952. V. 85. P. 180.
6. Мандельштам Л.И. Лекции по квантовой механике. Собр. соч. Т. 5. М.: Изд-во АН СССР, 1950.
7. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. 4-е изд. М.: Высшая школа, 1963.
8. Schrödinger E. Reports of Solvay Congress. 1928.
9. Блохинцев Д.И. Принципиальные вопросы квантовой механики. М.: Наука, 1966. — Работа № 67 в наст. изд. — *Прим. ред.*
10. Daneri A., Loinger A., Prosperi G. // Nucl. Phys. 1962. V. 33. P. 297.
11. Green H. S. // Nuovo Cimento. 1958. V. 9. P. 88.
12. Блохинцев Д.И. // Вопросы философии. 1963. № 9. С. 108.

Объединенный институт ядерных исследований,  
Дубна Московской обл.

Комментарий. За прошедшие 40 лет со времени публикации этой работы Блохинцева как квантовая физика в целом [1–8], так и квантовая теория измерений [9–32] претерпела весьма значительные изменения. Появилось большое разнообразие подходов и моделей [9–31], произошла существенная математизация [32] этого направления исследований. И тем не менее работа Блохинцева сохраняет интерес своей ясной постановкой проблемы и замечательным по глубине обсуждением возможных путей ее решения. В самом деле, несмотря на значительный прогресс в понимании проблемы измерения, не существует общепринятой точки зрения по этому

вопросу [9–31]. Известно, что Белл [10] предлагал даже отказаться от самого термина «измерение» в серьезных дискуссиях о квантовой механике. Со времени Н. Бора [9] центральной темой проблемы квантовых измерений была и остается задача описания прибора на языке классических понятий [33]. Разные подходы по-разному трактуют процесс измерения, давая противоречивые результаты [9–30]. По мнению Блохинцева, высказанному еще в одной из ранних работ, «приборы, как в классической физике, так и в современной атомной физике являются макроскопическими устройствами. Поэтому ясно, что суть различия классических и квантовых явлений коренится не в приборах как таковых, а в новой природе квантовых объектов». В то же время Блохинцев тщательно анализирует «возможность включить в квантово-механические рассмотрения не только измеряемый объект, но и измеряющий прибор». Блохинцев подчеркивает, что «измерение состоит в том, что "микроявление порождает макроявление". Это превращение квантового явления в макроскопическое может быть прослежено математически». Интересно заметить, что в работе [32], где была построена математическая теория процесса измерения в квантовой механике, было введено математическое понятие «инструмента» в структуру математической схемы. Следует подчеркнуть, что, независимо от Блохинцева, ряд авторов (см., например, [23, 26, 30]) приходят к сходным с его идеями взглядам на процесс измерения. Так, в работе [23], вероятность результатов измерения определялась исходя из уравнения Шредингера на основе понимания макроскопической величины как результата своеобразного предельного термодинамического перехода. Таким образом, интуитивным идеям Бора об описании прибора на языке классических понятий, дается формализация в терминах классической статистической механики (см. также [30, 33]). Подробнее эти вопросы рассматриваются в следующей работе Д. И. Блохинцева № 69.

1. *Zeilinger A.* Experiment and the Foundations of Quantum Physics // *Rev. Mod. Phys.* 1999. V.71. P. S288.
2. *Kleppner D., Jackiw R.* One Hundred Years of Quantum Physics // *Science*. 2000. V. 289. P. 893.
3. *Aczel A. D.* Entanglement: The Greatest Mystery in Physics. New York: Basic Books, 2002.
4. *Greenstein G., Zajonc A. G.* The Quantum Challenge. New York: Jones and Bartlett Publishers, 2006.
5. *Nikolic H.* Quantum Mechanics: Myths and Facts // *Found. Phys.* 2007. V.37. P. 1563.
6. *Leggett A. J.* Realism and the Physical World // *Rep. Prog. Phys.* 2008. V.71. P. 022001.
7. *Roos C.* Quantum mechanics: Dynamics of Entanglement // *Nature Physics*. 2008. V. 4. P. 97.
8. *Zwolak M., Quan H. T., Zurek W. H.* Quantum Darwinism in a Hazy Environment. 2009. arXiv: 0904.0418.
9. *Quantum Theory and Measurement / Eds. J. A. Wheeler, W. H. Zurek.* Princeton: Princeton UP, 1983.

10. *Bell J. S.* Against «Measurement» // *Physics World*. 1990. V. 3, № 8. P. 33.
11. *Peierls R.* In Defence of «Measurement» // *Physics World*. 1991. V. 4, № 1. P. 19.
12. *Leggett A. J.* Reflections on the Quantum Measurement Paradox // *Quantum Implications* / Eds. B. J. Hiley, F. D. Peat. London: Routledge, 1994. P. 85.
13. *Unruh W. G.* Varieties of Quantum Measurement. 1994. arXiv: hep-th/9410168v1.
14. *Unruh W. G.* The Reality and Measurement of the Wavefunction // *Phys. Rev. A*. 1994. V. 50. P. 882.
15. *Busch P., Lahti P. J., Mittelstaedt* Quantum Theory of Measurement. 2nd ed. Berlin: Springer, 1996.
16. *Quantum Measurement* / Eds. R. Healey, G. Hellman. Minneapolis, MN: University of Minnesota Press, 1998.
17. *Danos M., Tien D Kieu.* Measurement in Quantum Physics // *Intern. J. Mod. Phys. E*. 1999. V. 8. P. 257.
18. *d'Espagnat B.* A note on measurement. 2001. arXiv: quant-ph/0101141v1.
19. *Менский М. Б.* Квантовые измерения и декогеренция. М.: Физматлит, 2001.
20. *Ting Yu, Percival I. C.* Generalized quantum measurement // *Phys. Lett. A*. 2002. V. 294. P. 59.
21. *Grübl G.* The Quantum Measurement Problem Enhanced. 2002. arXiv: quant-ph/0202101.
22. *Zurek W. H.* Decoherence, Einselection, and the Quantum Origins of the Classical // *Rev. Mod. Phys.* 2003. V. 75. P. 715.
23. *Adler S. L.* Why Decoherence has not Solved the Measurement Problem: A Response to P. W. Anderson // *Stud. Hist. Philos. Mod. Phys.* 2003. V. 34. P. 135.
24. *Schlosshauer M.* Decoherence, the Measurement Problem, and the Interpretation of Quantum Mechanics // *Rev. Mod. Phys.* 2004. V. 76. P. 1267.
25. *Zurek W. H.* Probabilities from Entanglement, Born's rule  $p_k = |\psi_k|^2$  from Envariance // *Phys. Rev. A*. 2005. V. 71. P. 052105.
26. *Johnson J. F.* Problems of Quantum Measurement. 2005. arXiv: quant-ph/0502124v4.
27. *Leggett A. J.* The Quantum Measurement Problem // *Science*. 2005. V. 307. P. 871.
28. *Mermin N. D.* In Praise of Measurement // *Quantum Information Processing*. 2006. V. 5. P. 239.
29. *Bassi A., Salvetti D. G. M.* The Quantum Theory of Measurement Within Dynamical Reduction Models // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2007. V. 49. P. 9859.
30. *Perinotti P., D'Ariano G. M.* Optimal Estimation of Ensemble Averages from a Quantum Measurement. 2007. arXiv: quant-ph/0701231v1.
31. *Aspelmeyer M.* Measured Measurement // *Nature Physics*. 2009. V. 5. P. 11.
32. *Podsedkowska H.* Correlations in a General Theory of Quantum Measurement // *Open Syst. and Information Dyn.* 2007. V. 14. P. 445.
33. *Lamb W. E.* Classical Measurements on a Quantum Mechanical System // *Nucl. Phys. B*. 1089. V. 6. P. 197.

*А. Л. Куземский*

# КЛАССИЧЕСКАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА\*

## 1. Введение

Квантовую механику обычно рассматривают как обобщение классической механики. Физическое содержание этого обобщения в основном выражается в принципе дополнительности Н. Бора.

Как будет объяснено в дальнейшем, возможен, и в некоторых отношениях кажется необходимым, другой подход к основам квантовой механики. В этом другом подходе квантовая механика рассматривается как обобщение классической статистической механики. При таком понимании квантовой механики основным понятием является не волновая функция  $\psi$ , а *статистический оператор*, введенный еще в 1932 г. фон Нейманом [1]. Теперь его обычно называют оператором плотности  $\hat{\rho}$ . Известно, что этот оператор является аналогом плотности  $\rho(q, p)$  в фазовом пространстве  $\mathcal{R}(q, p)$ , которое используется в классической статистической механике для описания движения систем. Здесь  $q$  — координаты изучаемой системы,  $p$  — канонически сопряженные им импульсы<sup>1</sup>.

Соотношение между классической механикой и классической статистической механикой принципиально отличается от соотношения между квантовой механикой, оперирующей с волновой функцией  $\psi$ , и квантовой механикой, опирающейся на понятие статистического оператора  $\hat{\rho}$ .

Суть дела заключается в том, что классическая механика является наукой, совершенно не нуждающуюся в статистической механике. В границах своей применимости она дает максимально полную информацию о движении механической системы и не оперирует ни с понятием вероятности, ни с понятием о каком-либо статистическом коллективе. В области квантовых явлений аналогом классической механики является квантовая механика, оперирующая с волновой функцией  $\psi$ , которая также дает максимально полную информацию о движении квантовых систем, совместимую с основой этой теории — с принципом дополнительности Н. Бора. Однако давно было установлено, что в теории квантовых измерений нельзя обойтись понятием волновой функ-

<sup>1</sup> Под  $q$  следует понимать координаты  $q_1, q_2, \dots, q_f$  рассматриваемой системы под  $p = p_1, p_2, \dots, p_f$  — сопряженные им импульсы,  $f$  есть число степеней свободы. В дальнейшем, во избежание громоздкости, все формулы выписываются явно так, как если бы  $f = 1$ . Например,  $dq dp = dq_1 \dots dq_f dp_1 \dots dp_f$ .

ции — необходимо прибегать к понятию оператора плотности  $\hat{\rho}$ , который имеет своего аналога в механике статистической. Таким образом, в отличие от классической механики, квантовая механика нуждается в квантовой статистической механике. Точнее говоря, она ею и является.

После этих замечаний обратимся к классической статистической механике. В классической статистической механике информация выражается на языке вероятностей.

Вероятность есть числовая мера потенциальной возможности того или иного розыгрыша событий.

Розыгрыш происходит в некотором статистическом ансамбле событий, который должен быть определен ясно сформулированными материальными условиями. Так, в термодинамической статистике ансамбль Гиббса определен температурой большого термостата, с которым слабо взаимодействует изучаемая молекулярная система<sup>1</sup>.

Знание вероятности того или иного события позволяет предсказать математическое ожидание того или иного исхода розыгрыша, среднее значение наблюдаемых величин, флуктуацию этих величин и т. п.

Вероятность не есть характеристика индивидуальной механической системы самой по себе. Она постольку принадлежит такой системе, поскольку эта система является членом определенного статистического ансамбля. В классической статистической механике ансамбль определяется вероятностью нахождения механической системы  $dW(q, p, t)$  в окрестности точки  $(q, p)$  фазового пространства  $\mathcal{R}(q, p)$  в момент времени  $t$ <sup>2</sup>.

Вместо вероятности  $dW$  обычно рассматривают плотность вероятности в фазовом пространстве  $\rho(q, p, t)$ :

$$\rho(q, p, t) = \frac{dW(q, p, t)}{dq dp}. \quad (1)$$

Поскольку речь идет о микроскопических атомных системах, то для определенности такого ансамбля должны быть заданы внешние макроскопические условия, в которых реализуется жизнь изучаемого ансамбля, например: размер сосуда, температура стенок, внешние поля и т. п.

Плотность вероятности  $\rho(q, p)$  подчиняется уравнению движения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + [\mathcal{H}, \rho]_{q,p} = 0, \quad (2)$$

где  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p)$  есть функция Гамильтона, а  $[\mathcal{H}, \rho]_{q,p}$  — классическая скобка Пуассона, которая для любых динамических величин  $A$  и  $B$  определяется формулой

$$[A, B]_{q,p} = \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q} - \frac{\partial B}{\partial p} \frac{\partial A}{\partial q}. \quad (3)$$

<sup>1</sup> Мы пользуемся термином «ансамбль», происходящим от основоположника термодинамической статистики Гиббса [2]. Другие названия ансамбля: статистический коллектив (Мизес) [3], статистическая совокупность (фон Нейман) [1].

<sup>2</sup> В дальнейшем мы не будем явно выписывать аргумент  $t$ .

В частности, для пары канонически сопряженных переменных имеем

$$[p, q]_{q,p} = 1. \quad (4)$$

В явном виде, для одной степени свободы функция Гамильтона равна

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q); \quad (5)$$

здесь  $m$  — масса частицы,  $V(q)$  — ее потенциальная энергия. Из (2) и (3) получим уравнение движения для плотности вероятности в раскрытом виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial \rho}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial q} \frac{\partial \rho}{\partial p} = 0. \quad (6)$$

Это уравнение выражает закон сохранения числа частиц в каждом элементе фазового пространства.

Вероятность найти систему в окрестности точки  $q$  в конфигурационном пространстве  $\mathcal{R}(q)$  будет равна

$$\rho(q) dq = dq \int \rho(q, p) dp, \quad (7)$$

а вероятность системе иметь импульс в окрестности точки  $p$  будет выражаться формулой

$$\rho(p) dp = dp \int \rho(q, p) dq. \quad (8)$$

Наконец, среднее значение  $\bar{L}$  любой динамической переменной  $L(q, p)$  определяется формулой

$$\bar{L} = \int \rho(q, p) L(q, p) dq dp \quad (9)$$

при условии нормировки

$$\int \rho(q, p) dq dp = 1. \quad (10)$$

Это условие в силу уравнения движения (6) выполняется для любого момента времени  $t$ .

## 2. Классическая статистическая механика в конфигурационном пространстве

Классическая статистическая механика может быть сформулирована не только в пространстве фаз  $\mathcal{R}(q, p)$ , как это обычно принято делать, но и в пространстве конфигураций  $\mathcal{R}(q)$ <sup>1</sup>. Для того чтобы перейти к такому представлению статистической механики, мы будем вместо импульса  $p$  брать вторую, любую точку  $q'$  в пространстве конфигураций  $\mathcal{R}(q)$ . Иными словами,

<sup>1</sup> Этот раздел основывается на работе [4]; см. также [5].

вместо пространства фаз  $\mathcal{R}(q, p)$  мы обращаемся к удвоенному конфигурационному пространству

$$\mathcal{R}(q, q') \equiv \mathcal{R}(q) \times \mathcal{R}(q'). \quad (11)$$

Переход от описания в пространстве  $\mathcal{R}(q, p)$  к описанию в пространстве  $\mathcal{R}(q, q')$  определим с помощью преобразования Фурье, пригодного для любой динамической переменной  $L(q, p)$ , определенной в пространстве  $\mathcal{R}(q, p)$ . Это преобразование гласит:

$$L(q, q') \equiv L(q, \zeta) = \int L(q, p) \frac{e^{ip\zeta/\hbar^*}}{2\pi\hbar^*} dp, \quad (12)$$

$$L(q, p) = \int L(q, \zeta) e^{-ip\zeta/\hbar^*} d\zeta, \quad (12')$$

где  $\zeta = q' - q$ , а  $\hbar^*$  есть некоторая постоянная размерности действия. Эта величина в рамках классической механики произвольна. Выбирая некоторый характерный масштаб координаты  $a$  и масштаб импульса  $b$ , естественно положить  $\hbar^* = ab$ . Ввиду того, что для фурье-преобразований не столь важны абсолютные значения  $q$  и  $p$ , сколько область их изменения, целесообразно положить

$$\hbar^* = \sqrt{\overline{\Delta p^2} \overline{\Delta q^2}}, \quad (13)$$

где  $\overline{\Delta p^2}$  и  $\overline{\Delta q^2}$  — средние квадратичные отклонения  $p$  и  $q$ , скажем, при  $t = 0$ .

Преобразование для плотности  $\rho(q, p)$  удобнее определить так:

$$\rho(q, q') \equiv \rho(q, \zeta) = \int \rho(q, p) e^{ip\zeta/\hbar^*} dp, \quad (14)$$

$$\rho(q, p) = \int \rho(q, \zeta) \frac{e^{-ip\zeta/\hbar^*}}{2\pi\hbar^*} d\zeta; \quad (14')$$

здесь  $L(q, q')$  и  $L(q, \zeta)$ , как видно из формул, означают одни и те же величины. Эти величины, вообще говоря, оказываются обобщенными функциями. Правила обращения с ними теперь хорошо известны. Уравнение движения (2) для плотности вероятности может быть также переписано в пространстве  $\mathcal{R}(q, q')$ . С помощью формулы (12) найдем изображение гамильтониана  $\mathcal{H}(q, p)$  (5) в пространстве  $\mathcal{R}(q, q')$ . Оно гласит:

$$\mathcal{H}(q, q') \equiv \mathcal{H}(q, \zeta) = -\frac{\hbar^{*2}}{2m} \frac{d^2\delta(\zeta)}{d\zeta^2} + V(q) \delta(\zeta), \quad (15)$$

где  $\delta(\zeta)$  есть обычная дельта-функция. Далее, имеем следующие выражения для компонент Фурье от производных функции Гамильтона  $\mathcal{H}$  и плотности  $\rho$ :

$$\left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \right)_{q, q'} \equiv \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \right)_{q, \zeta} = \frac{\partial V}{\partial q} \delta(\zeta), \quad (16)$$

$$\left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \right)_{q, q'} \equiv \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \right)_{q, \zeta} = -\frac{i\hbar^*}{m} \frac{d\delta(\zeta)}{d\zeta}, \quad (17)$$



$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial q}\right)_{q,q'} \equiv \left(\frac{\partial \rho}{\partial q}\right)_{q,\zeta} = \frac{\partial \rho(q, \zeta)}{\partial q}, \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{q,q'} \equiv \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{q,\zeta} = -\frac{i}{\hbar^*} \zeta \rho(q, \zeta). \quad (19)$$

Подстановка этих компонент Фурье в (2) с помощью (12') приводит к уравнению для плотности  $\rho(q, \zeta)$  в пространстве  $\mathcal{R}(q, q')$ :

$$\frac{\partial \rho(q, \zeta)}{\partial t} - \frac{i\hbar^*}{m} \frac{\partial^2 \rho(q, \zeta)}{\partial q \partial \zeta} - \frac{1}{i\hbar^*} \frac{\partial V}{\partial q} \zeta \cdot \rho(q, \zeta) = 0. \quad (20)$$

Это уравнение заменяет в пространстве  $\mathcal{R}(q, q')$  уравнение (6) в пространстве  $\mathcal{R}(q, p)$ . Это уравнение лаконично может быть записано в форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + [\mathcal{H}, \rho]_{q,\zeta} = 0, \quad (21)$$

где под  $[AB]_{q,\zeta}$  понимается скобка Пуассона в пространстве  $\mathcal{R}(q, q')$ . Разумеется, плотность  $\rho$  в (21) берется в этом же пространстве.

Уравнения (7) и (8) принимают вид

$$\rho(q) dq = \rho(q, q) dq, \quad (7')$$

$$\rho(q) dq = dp \int \rho(q, \zeta) \frac{e^{-iq\zeta/\hbar^*}}{2\pi\hbar^*} dq d\zeta. \quad (8')$$

Условие нормировки (10) гласит:

$$\int \rho(q, q) dq = 1. \quad (10')$$

Уравнение (9) для определения среднего значения динамической величины  $L(q, p)$  такими же путями приводится к виду

$$\overline{L} = \int \rho(q, \zeta) L^*(q, \zeta) dq d\zeta$$

или, что то же, к виду

$$\overline{L} = \int \rho(q, q') L^*(q, q') dq dq'. \quad (9')$$

В добавление к этим формулам выпишем формулы для компонент Фурье координаты  $q$  и импульса  $p$ :

$$q_{qq'} = q\delta(\zeta), \quad (16')$$

$$p_{qq'} = -i\hbar^* \frac{d\delta(\zeta)}{d\zeta}. \quad (17')$$

Эти выражения полностью совпадают с известными квантово-механическими выражениями для операторов  $\hat{q}$  и  $\hat{p}$  в координатном представлении.

Однако следует помнить, что величины (16') и (17') перемножаются как компоненты Фурье (а не как матрицы).

В заключение этого раздела привожу два простых примера решения уравнения (20).

**а) Свободное движение.** В этом случае  $V(q) = 0$ . Представим  $\rho(q, \zeta, t)$  в форме интеграла Фурье:

$$\rho(q, \zeta, t) = \int \tilde{\rho}(\alpha, \beta) e^{i\omega(\alpha, \beta)t - i(\alpha q + \beta \zeta)} d\alpha d\beta. \quad (22)$$

Подстановка  $\rho(q, \zeta, t)$  в таком виде в (20) приводит к соотношению

$$\left[ \omega(\alpha, \beta) + \frac{\hbar^*}{m} \alpha \beta \right] \tilde{\rho}(\alpha, \beta) = 0, \quad (23)$$

откуда

$$\omega(\alpha, \beta) = -\frac{\hbar^*}{m} \alpha \beta. \quad (24)$$

Полагая в (23) правую часть равной единице, найдем фурье-образ функции Грина

$$G(\alpha, \beta) = \frac{1}{\omega(\alpha, \beta) + (\hbar^*/m) \alpha \beta \pm i\epsilon} \quad (25)$$

уравнения (17) для свободного движения частиц.

**б) Гармонический осциллятор.** В этом случае  $V(q) = (m\omega_0^2/2) q^2$ , где  $\omega_0$  — частота осциллятора, а  $m$  — его масса. Функцию  $\rho(q, \zeta, t)$  в данной задаче можно искать в виде  $\rho(q, \zeta, t) = e^{i\omega t} \rho(z)$ , где  $z = q\zeta/\Lambda^2$ , а  $\Lambda^2 = \hbar^*/m\omega_0$ . В терминах этой переменной уравнение для  $\rho(q, \zeta, t)$  легко приводится к виду

$$\frac{d^2 \rho}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\rho}{dz} - \left( 1 + \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{z} \right) \rho = 0. \quad (26)$$

Общее решение этого уравнения выражается через гипергеометрический ряд  ${}_1F_1^1$ :

$$\rho(z) = e^{\pm z} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} \mp \frac{\omega}{2\omega_0}, 1, \mp 2z\right). \quad (27)$$

<sup>1</sup> См., например: *Ватсон Дж.* Теория бесселевых функций. М., 1949. С. 118.

### 3. Квантовый ансамбль

Еще в 1932 г. фон Нейман ввел важное различие чистых квантовых ансамблей (по Нейману «*einheitliche Gesamtheiten*») и смешанных ансамблей («*gemischte Gesamtheiten*») [1]. Первые ансамбли — ансамбли, описываемые волновой функцией  $\psi$ , отвечают случаю максимальной информации, допустимой законами квантовой механики. Второй тип ансамблей содержит состояния с различными волновыми функциями  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_s, \dots$ , относительно которых известны лишь вероятности этих состояний  $W_1, W_2, \dots, W_s, \dots$ . Такой ансамбль аналогичен ансамблям классической статистической механике, но не самой классической механике, в которой такому ансамблю нет места. Смешанный ансамбль описывается оператором плотности  $\rho$ .

Отмеченная в разделе 1 необходимость введения в квантовую механику оператора плотности, как понятия более общего, нежели волновая функция, основывается на том, что в квантовой области измерения, производимые над системами, описываемыми волновой функцией  $\psi$  («чистый» ансамбль), переводят эти системы в состояния, описываемые набором волновых функций, т.е. в «смешанный» ансамбль.

Поэтому, если мы хотим рассматривать теорию квантовых измерений как главу квантовой механики, то нельзя исключить из рассмотрения смешанные ансамбли, которые не имеют аналогов в классической механике. Они являются аналогами механики статистической. В этом пункте лежит вся суть отличия моей концепции квантовой механики от концепции копенгагенской школы.

Н. Бор явно предпочитал рассматривать ситуацию, когда атомная система описывается волновой функцией (т.е. чистый ансамбль).

При таком подходе сам процесс измерения полностью исключается из квантово-механического рассмотрения и тем более не может быть предметом теоретического расчета. Интерпретация измерения при таком подходе ограничивается пониманием измерения как явления изменения информации. Следует подчеркнуть, что в рамках анализа, сосредоточенного на чистом ансамбле, такое толкование измерения логически последовательно и единственно возможно. Но оно исключает на самом деле существующую возможность, на основе той же квантовой механики, исследовать и рассчитать явления измерения. В этой связи концепция фон Неймана, основанная на понятии статистических совокупностей, представляется более широкой основой для понимания квантовой механики, нежели концепция, основанная на более ограниченном понятии волновой функции. Идеи фон Неймана, изложенные им в блестящей, но трудноодолеваемой книге: «Математические основы квантовой механики» (1932 г. [1]), оказали в свое время большое влияние на Л. И. Мандельштама [6], особенно на К. В. Никольского (см. его монографию [7]) и меня. В отличие от нас, эти идеи, видимо, не очень заинтересовали в свое время Н. Бора.

На основании сказанного естественно рассматривать квантовую механику как *обобщение классической статистической механики*. Представление классической статистической механики в пространстве  $\mathcal{R}(q, q')$  оказывается удобным исходным пунктом. Это представление, как было показано в раз-

деле 2, оперирует с компонентами Фурье динамических переменных  $L(q, q')$  и плотности  $\rho(q, q')$ .

Последуем теперь рецепту перехода от классической механики к квантовой, принадлежащему В. Гейзенбергу. Суть его предписания сводится к двум пунктам: а) замены компонент Фурье динамических переменных на элементы эрмитовых матриц и б) замена классической скобки Пуассона на квантовую скобку Пуассона.

Обращаясь к классической статистической механике, представленной в пространстве  $\mathcal{H}(q, q')$ , мы реализуем эту программу с помощью следующих формул, выражающих соответствие классических и квантовых величин по Гейзенбергу<sup>1</sup>:

$$L(q, \zeta) \equiv L(q, q') \rightarrow L(q, q') = L^+(q, q'), \quad (28)$$

$$\rho(q, \zeta) \equiv \rho(q, q') \rightarrow \rho(q, q') = \rho^+(q, q'). \quad (29)$$

Эта замена означает, что динамические переменные и их функции становятся *эрмитовыми операторами*, которые мы будем означать через  $\hat{L}$ ,  $\hat{\rho}$  и т. п.  $\hat{L}^+$ ,  $\hat{\rho}^+$  означают эрмитово-сопряженные операторы. Далее, согласно пункту б),

$$[A, B]_{\text{класс}} \rightarrow [\hat{A}, \hat{B}]_{\text{кв}} = -\frac{1}{i\hbar}(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}). \quad (30)$$

В частности,

$$[\hat{p}, \hat{q}] = 1. \quad (31)$$

Следуя (28), (29) и (30), заменим в (9')  $\rho(q, q')$  и  $L(q, q')$  на соответствующие элементы эрмитовых матриц  $\hat{\rho}$  и  $\hat{L}$ . Тогда получим

$$\bar{L} \doteq \text{Sp}(\hat{\rho}\hat{L}), \quad (32)$$

где  $\text{Sp}$  означает след матрицы. Формулы (7'), (8') и (10') принимают вид

$$\rho(q) dq = \rho(q, q) dq, \quad (33)$$

$$\rho(p) dp = \rho(p, p) dp \quad (34)$$

и

$$\text{Sp} \hat{\rho} = 1. \quad (35)$$

Причем во всех формулах постоянная  $\hbar^*$  теперь фиксирована и равна постоянной Планка  $\hbar$ . Тем самым устраняется масштабный произвол в выборе постоянной  $\hbar^*$ , характерный для классической статистической механики.

Уравнение (20) для плотности  $\rho(q, q')$ , согласно (30), заменяется на операторное уравнение с квантовыми скобками Пуассона:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + [\hat{\mathcal{H}}, \hat{\rho}]_{\text{кв}} = 0. \quad (36)$$

<sup>1</sup> В. Гейзенберг имел в виду компоненты Фурье, отображающие зависимость динамических переменных от времени. У меня этот принцип соответствия расширен и на координатные зависимости динамических переменных.

Оператор функции Гамильтона  $\widehat{\mathcal{H}}$  имеет вид (в простейшем случае)

$$\widehat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m} \widehat{p}^2 + V(\widehat{q}). \quad (37)$$

Выпишем теперь уравнение (36) в пространстве  $\mathcal{R}(q, q')$ . В этом пространстве матрицы операторов  $\widehat{p}$  и  $\widehat{q}$ , удовлетворяющие условию (31), имеют вид

$$p(q, q') = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \delta(q - q'), \quad (38)$$

$$q(q, q') = q \delta(q - q'). \quad (39)$$

Эти выражения тождественны с выражениями для компонент Фурье величин  $p$  и  $q$  в классической статистической механике, представленной в пространстве  $\mathcal{R}(q, q')$ . Чтобы убедиться в этом, следует вспомнить, что в формулах (16') и (17') величина  $\zeta = q' - q$ .

Воспользовавшись правилами умножения матриц, получим из (36), (37), (38) и (39) уравнение (36) в пространстве  $\mathcal{R}(q, q')$ :

$$\frac{\partial \rho(Q, \zeta)}{\partial t} - \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial^2 \rho(Q, \zeta)}{\partial Q \partial \zeta} - \frac{1}{i\hbar} \left[ V\left(Q + \frac{\zeta}{2}\right) - V\left(Q - \frac{\zeta}{2}\right) \right] \rho(Q, \zeta) = 0, \quad (40)$$

где  $Q = \frac{1}{2}(q + q')$ ,  $\zeta = q' - q$ . Сравнение с (20) показывает, что уравнение классической статистической механики при  $\hbar^* = \hbar$  можно рассматривать как приближение к точному квантовому уравнению (36) при условии достаточно гладких потенциалов  $V(q)$  и гладких распределений  $\rho(q, \zeta)$ . В этом случае в (36) можно положить  $V(Q + \zeta/2) - V(Q - \zeta/2) \approx \frac{\partial V}{\partial q} \zeta + \dots$ . Тогда уравнение (40) совпадает с (20).

#### 4. Собственные векторы

Обратимся сперва к специальному случаю, когда оператор плотности  $\widehat{\rho}$  подчиняется специальному условию

$$\widehat{\rho}^2 = \widehat{\rho}. \quad (41)$$

Рассмотрим, каким еще условиям должен удовлетворять этот оператор, чтобы описываемый им статистический ансамбль обладал той особенностью, что в нем некоторая избранная динамическая переменная  $L$  имела бы *одно* и только одно определенное значение.

Пусть среднее значение этой величины есть  $\bar{L}$ , тогда среднее квадратичное отклонение равно

$$\overline{\Delta L^2} = \overline{(L - \bar{L})^2}. \quad (42)$$

Пусть  $\mathcal{L}$  есть эрмитов оператор, изображающий величину  $L$ . Тогда, согласно основной формуле (32),  $\overline{\Delta L^2}$  определяется формулой

$$\overline{\Delta L^2} = \text{Sp} \{ \widehat{\rho} (\mathcal{L} - \bar{L})^2 \} \quad (43)$$

и требование того, чтобы величина  $L$  имела лишь одно значение  $L = \lambda$ , сводится к условию

$$\text{Sp} \{ \widehat{\rho} (\widehat{\mathcal{L}} - \lambda)^2 \} = 0. \quad (44)$$

Обозначим  $\widehat{\rho} (\widehat{\mathcal{L}} - \lambda) = \widehat{C}$ , тогда  $(\widehat{\mathcal{L}} - \lambda) \widehat{\rho} = \widehat{C}^+$ . Пользуясь (43) и возможностью перестановки операторов под знаком  $\text{Sp}$ , получим из (44)

$$\text{Sp} \{ \widehat{C} \widehat{C}^+ \} = 0. \quad (45)$$

Это условие может быть выполнено лишь в том случае, если оператор  $\widehat{C} = 0$ , а следовательно, и  $\widehat{C}^+ = 0$ . Таким образом, мы приходим к уравнениям для оператора  $\widehat{\rho}$ :

$$(\widehat{\mathcal{L}} - \lambda) \widehat{\rho} = 0, \quad \widehat{\rho} (\widehat{\mathcal{L}} - \lambda) = 0. \quad (46)$$

Рассмотрим эти уравнения в координатном представлении, т. е. для матричных элементов  $\rho(q, q')$  оператора  $\widehat{\rho}$ . В первом из этих уравнений оператор  $\widehat{\mathcal{L}}$  действует на аргумент  $q$  элемента  $\rho(q, q')$ , а во втором оператор  $\widehat{\mathcal{L}}^*$  действует на аргумент  $q'$  того же матричного элемента. Поэтому из первого уравнения (46) следует, что элемент  $\rho(q, q')$  пропорционален собственной функции  $\psi_\lambda(q)$  оператора  $\widehat{\mathcal{L}}$ , принадлежащей собственному значению  $\lambda$ ; эта функция подчиняется уравнению

$$\mathcal{L} \widehat{\psi}_\lambda(q) = \lambda \psi_\lambda(q). \quad (47)$$

Подобным же образом из второго уравнения вытекает, что  $\rho(q, q')$  пропорционален  $\psi_\lambda^*(q')$ :

$$\widehat{\mathcal{L}}^* \psi_\lambda^*(q') = \lambda \psi_\lambda^*(q'). \quad (47')$$

Как известно, функции  $\psi_\lambda(q)$  образуют ортогональную систему. Мы можем считать ее ортонормированной. Тогда

$$\rho(q, q') = \psi_\lambda(q) \psi_\lambda^*(q'). \quad (48)$$

Нетрудно проверить, что условие (47) выполнено, а уравнения (46) удовлетворены.

Собственные функции эрмитовых операторов образуют систему ортов в пространстве Гильберта. Любой другой вектор в этом пространстве  $\varphi(q)$  может быть представлен в виде

$$\varphi(q) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} \psi_{\lambda}(q), \quad (49)$$

где  $c_{\lambda}$  — его компоненты.

Применяя оператор  $\widehat{\rho}_{\lambda}$  к  $\varphi$ , получим из (48) и (49)

$$\widehat{\rho}_{\lambda} \varphi = c_{\lambda} \psi_{\lambda}(q). \quad (50)$$

Отсюда следует, что оператор  $\widehat{\rho}_{\lambda}$  есть оператор проектирования на ось  $\lambda$ :  $\widehat{\rho}_{\lambda} \equiv \widehat{P}_{\lambda}$ . В более общем случае

$$\rho(q, q') = \varphi(q) \varphi^*(q'). \quad (48')$$

есть оператор проектирования на вектор  $\varphi$  (считая его норму равной 1).

Нетрудно показать, что векторы  $\varphi(q)$  пространства Гильберта подчиняются уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \widehat{\mathcal{H}} \varphi. \quad (51)$$

Для доказательства достаточно подставить  $\rho(q, q')$  в виде (48') в уравнение (36) и разделить результат на  $\varphi(q) \varphi^*(q')$ . Эта подстановка приводит к соотношению

$$\left[ \frac{\partial \varphi(q)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} \widehat{\mathcal{H}} \varphi(q) \right] \varphi^{-1}(q) + \left[ \frac{\partial \varphi^*(q')}{\partial t} - \frac{1}{i\hbar} \widehat{\mathcal{H}} \varphi^*(q') \right] [\varphi^*(q')]^{-1} = 0.$$

Отсюда следует, что  $\left[ \frac{\partial \varphi(q)}{\partial t} + \dots \right] = i c \varphi(q)$ , где  $c$  — действительная константа, которая может быть включена в  $\widehat{\mathcal{H}}$  за счет сдвига отсчета энергии.

Таким образом, исходя из (28) и (36), мы получаем все уравнения линейной волновой механики.

Статистический ансамбль, описываемый матрицей плотности, являющейся оператором проекции, называют *чистым*. Чистый ансамбль соответствует описанию квантовых явлений с помощью одной волновой функции.

Исходные уравнения (32) и (36) позволяют рассмотреть ансамбль с матрицей плотности  $\hat{\rho}$  более общего вида, именно

$$\hat{\rho} = \sum_{\lambda} W_{\lambda} \hat{\rho}_{\lambda}, \quad (52)$$

где

$$W_{\lambda} \geq 0 \quad \text{и} \quad \sum_{\lambda} W_{\lambda} = 1. \quad (53)$$

Такой ансамбль, по терминологии фон Неймана, называют *смешанным*. Величины  $W_{\lambda}$  указывают вероятность найти изучаемую систему в состоянии  $\lambda$ , принадлежащем чистому ансамблю, описываемому оператором плотности  $\hat{\rho}_{\lambda}$ . Из (52) и (53) получается

$$\hat{\rho}^2 = \sum_{\lambda} W_{\lambda}^2 \hat{\rho}_{\lambda} \leq \hat{\rho}. \quad (54)$$

В заключение этого раздела укажем формулу матричных элементов для  $\hat{\rho}_{\lambda}$  в собственном  $\lambda$ -представлении:

$$\rho_{\lambda\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (55)$$

В этом же представлении для смешанного ансамбля

$$\rho_{\lambda\lambda'} = W_{\lambda} \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (56)$$

## 5. Измерения и необратимость

Обсуждению измерений предпослшем несколько замечаний, относящихся к связи оператора плотности  $\hat{\rho}$  с термодинамической статистикой. Эта связь была указана в той же монографии фон Неймана [1]. И. фон Нейман предложил формулу для энтропии  $S$  системы, обобщающую известную формулу Л. Больцмана, именно

$$S = -k \operatorname{Sp} \{ \hat{\rho} \ln \hat{\rho} \}; \quad (57)$$

здесь  $k$  — постоянная Больцмана. Из этой формулы сразу следует, что для чистого ансамбля  $S = 0$ . Чтобы убедиться в этом, достаточно привести оператор  $\hat{\rho}$  к диагональному виду. Согласно (55), собственное значение такого оператора равно 1, а  $\ln 1 = 0$ .

Эта особенность чистого ансамбля есть выражение того обстоятельства, что чистый ансамбль является статистической совокупностью систем, которые *все находятся в одном и том же состоянии*.

Для смешанного ансамбля в том же представлении, на основании (56), получим

$$S = -k \sum_{\lambda} W_{\lambda} \ln W_{\lambda} > 0. \quad (58)$$

Поэтому энтропия смешанного ансамбля всегда больше энтропии чистого ансамбля. Этот результат также был доказан фон Нейманом [1].

Если изучаемая система находится в тепловом равновесии с большим термостатом температуры  $\Theta$ , то, согласно теории термодинамического ансамбля Гиббса,

$$W_{\lambda}(\Theta) = e^{(F - E_{\lambda})/\Theta}, \quad (59)$$

где  $\Theta = kT$ ,  $k$  — постоянная Больцмана,  $E_{\lambda}$  — собственные значения оператора энергии  $\hat{H}$ ,  $F$  — свободная энергия. Подстановка (59) в (58) приводит к известному из термодинамики соотношению

$$F = E - TS, \quad (60)$$

где  $E$  — среднее значение энергии системы

$$E = \sum_{\lambda} E_{\lambda} W_{\lambda}(\Theta) \quad (61)$$

при обычном условии нормировки:  $\sum_{\lambda} W_{\lambda}(\Theta) = 1$ .

После этих замечаний обратимся к процессу измерения. Процесс измерения основывается на физическом процессе взаимодействия микросистемы с макроскопической системой ИП — измерительным прибором.

Этот прибор должен быть обязательно макроскопически неустойчивой системой. В противном случае микросистема не может привести его в действие. Она не обладает достаточными для этого энергией и импульсом. На это важное и тривиальное для экспериментаторов обстоятельство не обращалось



достаточного внимания со стороны теоретиков. На ранней стадии развития квантовой маханики внимание теоретиков было более сосредоточено на новом обстоятельстве — на влиянии измерения на состояние квантовой системы.

Значение этого обстоятельства для понимания процесса измерения было показано в работах автора этой статьи [8].

В этих работах было показано, что процесс измерения начинается на микроскопическом, квантовомеханическом уровне и в силу макроскопической неустойчивости измерительного прибора (ИП) превращается в макроскопический процесс. Поэтому процесс измерения носит характер взрыва, инициируемого измеряемой микросистемой.

Для математического описания этого процесса использование аппарата оператора плотности  $\hat{\rho}$  является совершенно необходимым. Эта необходимость вытекает из того обстоятельства, что макроскопический прибор, являясь сложной, микроскопически, системой, не может быть описан волновой функцией. Для включения прибора в квантово-механическое описание необходимо прибегать к понятию смешанного ансамбля и, следовательно, к аппарату оператора плотности  $\hat{\rho}$ . Обозначим динамические переменные, описывающие состояние измеряемой системы, буквой  $x$ , а динамические переменные, описывающие макроскопический прибор — буквой  $q$ . Этих переменных может быть очень много. Вообще говоря, прибору должна быть приписана и некоторая температура  $\Theta$ . Оператор плотности  $\hat{\rho}$  объединенной системы будет зависеть от переменных  $x$ ,  $q$ , времени  $t$ , и, может быть, от температуры  $\Theta$  так, что матричный элемент оператора  $\hat{\rho}$  в представлении переменных  $x$  и  $q$  будет  $\rho(x, q; x', q', t)$ . Разложим этот оператор по собственным функциям  $\psi_n(x)$  оператора  $\hat{\mathcal{L}}$ , представляющего измеряемую величину, которую для простоты будем считать дискретной ( $n$  — номер собственного значения  $\lambda = L_n$ ):

$$\rho(x, q; x', q', t) = \sum_{n,m} W_{nm}(q; q', t) \psi_n(x) \psi_m^*(x'). \quad (62)$$

Среди переменных  $q$  лишь немногие будут наблюдаемыми. Для определенности положим, что такая переменная только одна:  $q = Q^1$ .

Беря диагональный элемент по всем  $q$ , кроме  $q = Q$ , интегрируем (62) по этим переменным; в результате получим матрицу относительно наблюдаемых переменных  $Q$ :

$$\rho(x, x', Q; Q', t) = \sum_n W_{nm}(Q, Q', t) \psi_n(x) \psi_m^*(x'). \quad (63)$$

В силу макроскопичности прибора недиагональные элементы по  $Q$  исчезающе малы. Таким образом, в (63)  $Q' = Q$ . Устройство будет измерительным, если при  $t \rightarrow \infty^2$  величины  $W_{nm} = 0$  при  $n \neq m$ , а  $W_{nn}$  отлично от нуля лишь в том случае, если наблюдаемая переменная  $Q$  лежит в области  $Q \in \Omega_n$  ( $\Omega_n$  не

<sup>1</sup>  $Q$  есть положение условной «стрелки» измерительного прибора.

<sup>2</sup> Под  $t \rightarrow \infty$  мы понимаем длительность процесса измерения.

пересекается с  $Q_m$ ,  $n \neq m$ ). Учитывая все возможные результаты измерений:  $Q \in \Omega_1$ ,  $Q \in \Omega_2, \dots, Q \in \Omega_n, \dots$ , интегрируем (63) по всем возможным  $Q$ . Тогда получим

$$\rho(x, x', t) = \sum_n W_{nn}(t) \psi_n(x) \psi_n(x'), \quad (64)$$

где

$$W_{nn}(t) = \int_{\Omega_n} W_{nn}(Q, t) dQ \quad (65)$$

и

$$W_{nm}(t) = 0.$$

Из этих формул видно, что когерентность различных частных состояний микросистемы  $\psi_n(x)$ ,  $\psi_m(x)$ , ... в результате взаимодействия с макроскопическим измерительным прибором разрушена. Это нарушение когерентности обусловлено неопределенностью микроскопических переменных прибора  $q$  и макроскопичностью наблюдаемых переменных  $Q$ .

Рассмотрим теперь характер ансамбля, возникающего после измерений. Допустим, что исходный ансамбль был чистым:

$$\rho(x, x') = \varphi(x) \varphi^*(x') \quad (66)$$

и

$$\varphi(x) = \sum_n c_n \varphi_n(x), \quad (67)$$

где  $\varphi_n(x)$  — собственные функции оператора  $\hat{\mathcal{L}}$ , изображающего динамическую переменную  $L$ . Если эта величина не меняется в процессе измерения (для этого необходимо, чтобы оператор энергии взаимодействия системы с прибором  $\hat{W}$  коммутировал с оператором  $\hat{\mathcal{L}}$ ), то можно показать, что при  $t \rightarrow \infty$  вероятность (65) пропорциональна  $|c_n|^2$ :

$$W_{nn}(t)_{t \rightarrow \infty} \approx |c_n|^2. \quad (68)$$

Поэтому при надлежащей нормировке в  $L$ -представлении элементы матрицы  $\rho(x, x', t)$  равны

$$\rho_{nm} = |c_n|^2 \delta_{nm}. \quad (69)$$

Если после измерений собрать экземпляры системы с  $L = L_n$  в  $n$ -й ящик, а с  $L = L_m$  в  $m$ -й и т.д., то совокупность частиц в каждом ящике представляет собой чистый ансамбль, описываемый матрицей плотности  $\rho(x, x') = \varphi_n(x) \varphi_n^*(x')$ . Мы будем иметь дело с несколькими независимыми чистыми ансамблями. Энтропия каждого из них равна нулю. Из теории информации известно, что ее объем можно измерять энтропией [9, 10]. При описанном способе проведения измерений объем информации не меняется. Информация изменяет лишь свою форму. Она была максимальной в исходном ансамбле и остается такой же в совокупности ансамблей после измерения<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Мы не рассматриваем возможного и обычно имеющего место возрастания энтропии измерительного прибора.

Если же все системы после измерения собрать в одном ящике, то мы получим смешанный ансамбль, описываемый матрицей

$$\rho(x, x') = \sum_n |c_n|^2 \varphi_n(x) \varphi_n^*(x'), \quad (70)$$

$$\sum_n |c_n|^2 = 1, \quad (70')$$

энтропия которого равна

$$S = -k \sum_n |c_n|^2 \ln |c_n|^2. \quad (71)$$

Это возрастание энтропии соответствует потере информации, которая имелаась ранее относительно исходного ансамбля и была максимальной — она равнялась нулю.

Таким образом, вопрос о характере ансамбля, возникающего после измерений, решается по-разному, в зависимости от того, как объединяются системы, подвергнутые измерению. Это может быть ансамбль смешанный, а может быть и чистый, или несколько чистых. Последний случай возникает тогда, когда наблюдатель, изучающий новый ансамбль, имеет информацию о том, в *каком* из «ящиков» находится система с данным значением  $L = L_n$ .

Объединенный институт ядерных исследований,  
Дубна Московской обл.

### Список литературы

1. *Von Neumann J. Mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik.* Berlin: Springer, 1932 (перевод: *Фон Нейман И. Математические основы квантовой механики.* М.: Физматгиз, 1963).
2. *Гиббс Дж. Основные принципы статистической механики.* М.: Гостехиздат, 1946.
3. *Mises R. V. Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit.* Berlin: Springer, 1928. — Имеется перевод: *Мизес Р. Вероятность и статистика.* Изд. 3-е. М.: КомКнига, 2007. — *Прим. ред.*
4. *Блохинцев Д. И., Брискина Ч. М. // Вестн. МГУ. 1948. № 10. С. 115. — Статья 66 в наст. издании. — Прим. ред.*
5. *Блохинцев Д. И. Принципиальные вопросы квантовой механики.* М.: Наука, 1966. — Статья 67 в наст. издании. — *Прим. ред.*
6. *Мандельштам Л. И. // Полн. собр. тр. Т. 5. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1950.*
7. *Никольский К. В. Квантовые процессы.* М.: Гостехиздат, 1940.
8. *Блохинцев Д. И. // УФН. 1968. Т. 95. С. 75; см. также [5] и «Основы квантовой механики». Изд. 5-е. М.: Наука, 1976.*
9. *Поплавский Р. П. // УФН. 1975. Т. 115. С. 465.*
10. *Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация.* М.: Физматгиз, 1960.

Комментарий. Эта работа Блохинцева является итогом его многолетних размышлений по проблеме интерпретации квантовой механики. Точ-

ность и выверенность формулировок достигают здесь классической ясности. Его главный тезис — «...квантовая механика рассматривается как теория квантовых статистических ансамблей, как прямое обобщение классической статистической механики» — изложен здесь предельно ясно и последовательно. Такое понимание квантовой механики пришло к Блохинцеву с начала 40-х годов: «особенность квантовой механики в том и заключается, что она непосредственно на языке статистики выражает закономерности, свойственные объектам иной природы» (см. также работу [1]). Нужно подчеркнуть, что такое понимание квантовой механики носит у Блохинцева не абстрактный, а конкретный и даже практический характер. Это понимание базируется на исследовании проблемы квантовых измерений. По мнению Блохинцева, «в теории квантовых измерений нельзя обойтись понятием волновой функции — необходимо прибегать к понятию оператора плотности  $\hat{\rho}$ , который имеет своего аналога в механике статистической». На то обстоятельство, что интерпретация квантовой механики тесно связана с проблемой измерения, указывали, помимо Блохинцева, многие авторы [1–12]. В то же время, Белл [13] подверг критике аргументы в пользу того, что именно теория квантовых измерений приводит к статистической интерпретации квантовой механики (см. подробный анализ работы Белла в статье [14]). В последнее время, с развитием современных технологий, появилась возможность говорить об измерении единичных событий и объектов [15–18].

Поэтому именно в последние годы интерес к данной проблеме постоянно растет. Появилось достаточно большое число публикаций [19–31], в которых тщательно анализируются основы квантовой теории и сравниваются ее различные интерпретации. При этом в работе [30] было показано, что квантовая механика может быть сформулирована как приближение классической статистической механики. Таким образом, идеи Блохинцева остаются в кругу самых актуальных тем современной квантовой физики, хотя единства мнений по-прежнему нет. Думается, что сам способ размышлений Блохинцева о трудных проблемах квантовой физики будет способствовать лучшему ее пониманию. Несмотря на остающиеся разногласия, состояние проблемы в целом нашло удачное выражение в следующих словах Гелл-Манна: «Квантовая механика — это не только (и не просто) теория; скорее это есть система взглядов и остов, которым должна соответствовать вся современная физика» [30]. Мысли, высказанные Блохинцевым, в точности соответствуют этому пониманию квантовой физики.

1. *Van Vleck J. H.* The Statistical Interpretation of Various Formulations of Quantum Mechanics // J. of the Franklin Institute. 1929. V. 207, Issue 4. P. 475.
2. *Wigner E. P.* Interpretation of Quantum Mechanics // Quantum Theory and Measurement / Eds. J. A. Wheeler, W. H. Zurek. Princeton: Princeton UP, 1983. P. 260.
3. *Wigner E. P.* Review of the Quantum-Mechanical Measurement Problem // Science, Computers, and the Information Onslaught. New York: Academic Press, 1984. P. 63.
4. *Albert D. Z.* Quantum Mechanics and Experience. Cambridge MA: Harvard UP, 1992.

5. *Breuer H.P., Petruccione F.* Quantum Measurement and Transformation from Quantum to Classical Probabilities // *Phys. Rev. A.* 1996. V. 54. P. 1146.
6. *Namiki M., Pascazio S., Nakazato H.* Decoherence and Quantum Measurements. Singapore: World Scientific, 1997.
7. *Mittelstaedt P.* The Interpretation of Quantum Mechanics and the Measurement Process. Cambridge: Cambridge UP, 1999.
8. *Zeilinger A.* Experiment and the Foundations of Quantum Physics // *Rev. Mod. Phys.* 1999. V. 71. P. S288.
9. *Auletta G.* Foundations and Interpretation of Quantum Mechanics. Singapore: World Sci., 2001.
10. *de Muynck W.M.* Foundations of Quantum Mechanics, an Empiricist Approach. New York: Kluwer Acad. Publishers, 2002.
11. *Adler S.L.* Quantum Theory as an Emergent Phenomenon: The Statistical Mechanics of Matrix Models as the Precursor of Quantum Field Theory. Cambridge: Cambridge UP, 2004.
12. *Leggett A.J.* Realism and the Physical World // *Rep. Prog. Phys.* 2008. V. 71. P. 022001.
13. *Bell J.S.* Against «Measurement» // *Phys. World.* 1990. V. 3, № 8. P. 33.
14. *Whitaker M.A.B.* Can the Statistical Interpretation of Quantum Mechanics be Inferred from the Schrodinger Equation? — Bell and Gottfried // *Found. Phys.* 2008. V. 38. P. 436.
15. *Aharonov Y., Vaidmain L.* Measurement of the Schrödinger Wave of a Single Particle // *Phys. Lett. A.* 1993. V. 178. P. 38.
16. *Unruh W.G.* Varieties of Quantum Measurement. 1994. arXiv: hep-th/9410168v1.
17. *Unruh W.G.* The Reality and Measurement of the Wavefunction // *Phys. Rev. A.* 1994. V. 50. P. 882.
18. *Alter O., Yamamoto Y.* Quantum Measurement of a Single System. New York: John Wiley and Sons, 2001.
19. *Leggett A.J.* Some Thought-Experiments Involving Macrosystems as Illustrations of Various Interpretations of Quantum Mechanics // *Found. Phys.* 1999. V. 29. P. 445.
20. *Bassi A.* Dynamical Reduction Models: Present Status and Future Developments // *J. Phys. Conf. Ser.* 2007. V. 67. P. 012013.
21. *Adler S.L.* Probability in Orthodox Quantum Mechanics: Probability as a Postulate Versus Probability as an Emergent Phenomenon. 2000. arXiv: quant-ph/0004077v1.
22. *Kaniadakis G.* Statistical Origin of Quantum Mechanics // *Physica A.* 2002. V. 307. P. 172.
23. *Leggett A.J.* Quantum Mechanics: Foundations // *Encyclopedia of Condensed Matter Physics.* Amsterdam: Elsevier, 2005. P. 51.
24. *Khrennikov A.Y.* Generalizations Quantum Mechanics Induced by Classical Statistical Field Theory // *Found. Phys. Lett.* 2005. V. 18. P. 637.
25. *Adler S.L.* Is Quantum Theory a Form of Statistical Mechanics? // *J. Phys. Conf. Ser.* 2007. V. 67. P. 012014.
26. *t'Hooft G.* A Mathematical Theory for Quantum Mechanics // *J. Phys. Conf. Ser.* 2007. V. 67. P. 012015.

27. *Dreyer O.* Classicality in Quantum Mechanics // J. Phys. Conf. Ser. 2007. V. 67. P. 012051.
28. *Frasca M.* Thermodynamic Limit and Decoherence: Rigorous Results // J. Phys. Conf. Ser. 2007. V. 67. P. 012026.
29. *Montina A.* Statistical Representation of Quantum States // J. Phys. Conf. Ser. 2007. V. 67. P. 012050.
30. *Khrennikov A. Y.* Quantum Mechanics as an Approximation of Statistical Mechanics for Classical Fields // Rep. Math. Phys. 2007. V. 60. P. 453.
31. *Schlosshauer M.* Classicality, the Ensemble Interpretation, and Decoherence: Resolving the Hyperion Dispute // Found. Phys. 2008. V. 38. P. 796.
32. *Gell-Mann M.* The Quark and the Jaguar. New York: W.H. Freeman and Co., 1994.

*А. Л. Куземский*

## **КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА (ЛЕКЦИИ ПО ИЗБРАННЫМ ВОПРОСАМ)\***

### **Предисловие**

Книга Д. И. Блохинцева посвящена обсуждению вопросов статистической интерпретации квантовой механики и теории квантовых измерений. К разработке этих сложных вопросов Д. И. Блохинцев неоднократно возвращался на протяжении последних 40 лет своей жизни. Названия многих лекций неслучайно совпадают с названиями его прежних статей. Эта книга ценна не только тем, что в ней собраны вместе полученные автором результаты в разработке принципиальных вопросов толкования необычных законов атомного мира, но и последними уточнениями позиции автора по основным дискуссионным вопросам интерпретации квантовой теории.

Квантовой механикой было внесено самое глубокое преобразование основных представлений физики. Анализ вновь установленных закономерностей, процесс уяснения их глубокого смысла на многие десятилетия стал предметом самостоятельных исследований и оживленных дискуссий, имеющих важное научное значение. Д. И. Блохинцевым в решении этих проблем было развито свое направление, которое и нашло отражение в данной книге. Его подход к уяснению специфики законов квантовой механики состоит прежде всего в сопоставлении их с законами классической статистической механики, в аппарате формального описания которых автор обнаруживает много общего. Анализ теории измерений применительно к квантовым системам составляет другую важнейшую сторону развитого подхода. На этом пути Д. И. Блохинцеву удалось полно и четко обосновать концепцию квантовых ансамблей, согласно которой квантовая теория как статистическая теория имеет предметом описания особые статистические коллективы, составляемые из независимых тождественно приготовленных микросистем, находящихся в одной и той же макрообстановке. Вскрытие этой особенности квантовых объектов и специфики описания их поведения имеет большое принципиальное значение для правильного понимания постановки проблемы измерений в квантовой микрофизике.

Следует отметить, что сама концепция квантовых ансамблей имеет под собой строгое математическое обоснование, выдвинутое еще в 1934 г. известным немецким математиком фон Нейманом. Встречающиеся же в научной литературе высказывания о принятом в квантовой механике вероятностном описании индивидуальных микросистем будто бы вне статистического кол-

лектива представляют собой лишь крайне неудачные, математически нестрогие попытки выразить необычность используемых в квантовой теории статистических ансамблей, составленных из индивидуальных не взаимодействующих между собой объектов.

Важное значение имеет даваемое Д. И. Блохинцевым объяснение принципиального отличия когерентного статистического ансамбля от некогерентного. Автор подчеркивает, что когерентный ансамбль в квантовой механике выступает как максимально упорядоченный коллектив с нулевым значением энтропии, который поэтому несет максимально возможную информацию. Специфика используемого в квантовой механике прибора вскрывается автором на основе термодинамического подхода к нему как к неустойчивой системе, способной вырабатывать макроскопический сигнал о событиях микромира.

Книга Д. И. Блохинцева «Квантовая механика», безусловно, будет способствовать уяснению многих узловых вопросов понимания квантовой теории и привлечению внимания специалистов к еще не решенным до конца проблемам истолкования квантовой механики.

В основу данной книги положены лекции, прочитанные Д. И. Блохинцевым на физическом факультете МГУ в 1977–1978 гг. и изданные небольшим тиражом в Объединенном институте ядерных исследований (Дубна, 1978 г.). Для данного издания автор планировал расширить текст лекций, включить в них, в частности, главу о «копенгагенской» и «московской» трактовке квантовой механики и написать расширенное заключение. К сожалению, автор не успел осуществить эту работу.

*А. А. Тяпкин*



## Предисловие автора

В этих лекциях квантовая механика рассматривается как теория квантовых статистических ансамблей, как прямое *обобщение* классической статистической механики. Такой подход к основам квантовой механики имеет преимущество перед традиционным ее изложением на основе волновой функции, так как позволяет включить как главу квантовой механики теорию квантовых измерений.

Первостепенную роль в этом подходе приобретает статистический оператор, описывающий состояние микросистемы в квантовом ансамбле общего типа. Волновая функция описывает специальный тип квантового ансамбля — когерентный ансамбль. В таком изложении отпадают парадоксы, связанные со скачкообразным изменением волновой функции в результате измерения («стягивание волнового пакета» и парадоксы об изменении состояния микросистемы без прямого воздействия на нее измерительного аппарата, обсуждавшиеся Эйнштейном, Подольским и Розеном).

Для понимания всей ситуации в квантовой теории измерений решающим оказывается влияние микросистемы на состояние измерительного прибора, который должен быть макроскопически нестабильной системой.

Предпринятое в этих лекциях изложение квантовой механики существенно базируется на идеях фон Неймана, которые в свое время привлекли интерес московской школы теоретиков. Эту школу в 30-х годах возглавлял акад. Л. И. Мандельштам. Существенный вклад в наше понимание квантовой механики был внесен проф. К. В. Никольским.

Я надеюсь, что в этих лекциях мне удалось заполнить все пробелы в этом «московском» понимании квантовой механики, дополнив ее теорией измерений.

## Лекция 1. Введение

В современной науке все более широкое применение находят статистические методы, основанные на понятии вероятности. Особенно основательно возросла роль этих методов после открытия квантовой механики и кибернетики.

Мы будем понимать вероятность как меру потенциальной возможности того или иного события. Эта мера в каждом случае должна быть указана<sup>1</sup>.

В простейших случаях вероятность события  $A$  определяют как отношение числа возможностей  $m$ , благоприятных событию  $A$ , к общему числу возможностей  $n$ :  $P = m/n$ .

Существует строгий, аксиоматический подход к теории вероятностей. Экскурс в эту область отвлек бы нас от основного предмета лекций — статистической интерпретации квантовой механики и теории квантовых измерений.

Несмотря на широкое развитие статистических методов в современной науке, часто сохраняется ностальгия по детерминистическому, строго причинному описанию явлений. При этом обычно упускается из виду очень важная деталь детерминистического описания, которая делает его на самом деле условным.

Суть дела заключается в том, что при детерминистическом описании явлений недостаточно задать значения динамических переменных в начальный момент времени  $t = 0$  в некоторой пространственной области  $AB$  (рис. 1), но необходимо задать еще и граничные условия на границах области  $AA'$ ,  $BB'$  для  $t > 0$ , т. е. для будущего времени. Иными словами, следует высказать гипотезу о будущем на границах области  $AB$ . Такого рода гипотезы уводят от детерминистической механики в область статистики. Например, траекторию космического корабля можно вычислить по его начальным данным, но возможное взаимодействие корабля с метеоритом можно оценить только методами статистики [1]. Распространение классической механики на системы с бесконечно большим числом степеней свободы (молекулы газов, турбулентное движение) ведет нас в область классической статистической механики.

<sup>1</sup> Интересно отметить, что такое определение вероятности полностью совпадает с точкой зрения В. А. Фока по данному вопросу (см. *Фок В. А. Начала квантовой механики*. М.: Наука, 1976. С. 94–95). У Дмитрия Ивановича это определение встречается только один раз. Если строго следовать такому определению вероятности при трактовке физического смысла волновой функции (или вектора состояния в гильбертовом пространстве), то необходимость во введении квантовых ансамблей не возникает. Однако во всех своих работах по принципиальным вопросам квантовой механики (как и в данных лекциях) Д. И. Блохинцев, явно или неявно, следовал подходу Р. Мизеса к определению вероятности (см. примечание редактора в лекции 2). — *Прим. ред.*

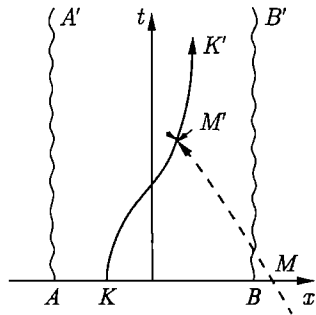


Рис. 1. Здесь  $t$  — время;  $x$  — одномерное пространство;  $AB$  — область, для которой заданы начальные условия. Указаны траектории корабля  $KK'$  и случайного метеорита  $MM'$

В отличие от классической физики в области квантовых явлений статистическое описание оказывается совершенно неизбежным. В этой области работают квантовая механика, оперирующая с волновой функцией  $\psi$ , и квантовая статистическая механика, оперирующая со статистическим оператором  $\hat{\rho}$ , иначе называемым матрицей плотности по аналогии с плотностью вероятности в классической статистической механике. Однако соотношения между механикой и статистической механикой в классической и квантовой областях совершенно различны: классическая механика является основой статистической механики, но связь здесь односторонняя.

Классическая механика не нуждается в статистической механике. Квантовая механика сама по себе является статистической теорией. В квантовой механике важнейшую роль играет теория измерений. Теорию измерений нельзя построить без квантовой статистической механики — связь здесь взаимная. Эти соотношения поясняются следующей схемой:

### *Классическая механика*

Описание траекториями или функцией действия  $S$

#### *Классическая статистическая механика*

Описание плотностью вероятности  $\rho(p, q)$  в  $2f$ -мерном пространстве фаз  $\mathcal{R}(p, q)$

### *Квантовая механика*

Описание волновой функцией  $\psi$

#### *Квантовая статистическая механика*

Описание статистическим оператором  $\hat{\rho}$  в  $f$ -мерном пространстве конфигураций или импульсном пространстве  $\mathcal{R}(p)$  и др.

Здесь  $p, q$  — сокращенные обозначения для импульсов  $p_1, p_2, \dots, p_f$  и сопряженных координат  $q_1, q_2, \dots, q_f$ ;  $f$  — число степеней свободы изучаемой системы.

В дальнейших лекциях изложение квантовой механики будет построено на расширенном понимании квантовой механики, в которое как неотъемлемая глава входит теория квантовых измерений и вместе с тем статистическая квантовая механика.

Такому изложению квантовой механики будет предшествовать небольшой экскурс в классическую механику и классическую статистическую механику, носящий характер напоминания.

## **Лекция 2. Классический ансамбль Гиббса**

Напомним основные положения классической механики системы материальных точек. Движение такой системы можно описать с помощью канонических уравнений Гамильтона, оперирующих с обобщенными координатами  $q \equiv (q_1, q_2, \dots, q_f)$  и сопряженными им импульсами  $p \equiv (p_1, p_2, \dots, p_f)$ . Здесь  $f$  — число степеней свободы рассматриваемой системы.

Условия канонической сопряженности выражаются с помощью скобок Пуассона. Скобки Пуассона для двух динамических величин  $A(q, p)$  и  $B(q, p)$

определяются так:

$$[A, B] = \sum_{s=1}^f \left( \frac{\partial A}{\partial p_s} \frac{\partial B}{\partial q_s} - \frac{\partial A}{\partial q_s} \frac{\partial B}{\partial p_s} \right). \quad (2.1)$$

В терминах этих скобок условие канонической сопряженности  $(q)$  и  $(p)$  задается уравнениями

$$[q_s, q_r] = 0, \quad [p_s, p_r] = 0, \quad [p_s, q_r] = \delta_{sr}. \quad (2.2)$$

Характер рассматриваемой динамической системы определяется функцией Гамильтона  $H(q, p, t)$ . В частном случае независимости от времени  $H(q, p)$  — полная энергия системы  $E$ .

Состояние системы определяется точкой  $(q, p)$  в фазовом  $2f$ -мерном пространстве  $\mathcal{R}(q, p)$ ;  $f$ -мерное пространство  $\mathcal{R}(q)$  называется пространством конфигураций, а  $f$ -мерное пространство  $\mathcal{R}(p)$  — импульсным пространством. Задача механики заключается в нахождении траектории системы  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_f(t)$  в пространстве конфигураций  $\mathcal{R}(p)$  по начальному состоянию системы при  $t = 0$ , заданному точкой в фазовом пространстве:

$$(q^0, p^0) \equiv (q_1^0, q_2^0, \dots, q_f^0; p_1^0, p_2^0, \dots, p_f^0).$$

Ввиду связи, существующей между  $p_s(t)$  и  $q_s(t)$ , вместе с тем определяется траектория и в пространстве фаз  $\mathcal{R}(p, q)$ , и в пространстве импульсов  $\mathcal{R}(p)$ .

Переменные  $q_s(t)$ ,  $p_s(t)$  определяются из системы канонических уравнений Гамильтона:

$$\frac{dq_s}{dt} = [H, q_s], \quad \frac{dp_s}{dt} = [H, p_s]. \quad (2.3)$$

Эти уравнения и скобки (2.2) остаются инвариантными при переходе к новым каноническим переменным  $Q_1, \dots, Q_f; P_1, \dots, P_f$ , если имеет место условие

$$\sum_{s=1}^f (P_s dQ_s - p_s dq_s) = dW, \quad (2.4)$$

где  $dW$  — полный дифференциал. Такое преобразование называется каноническим. Движение, определяемое уравнениями (2.3), может рассматриваться как последовательность бесконечно малых канонических преобразований. Действительно, из них следует, что

$$Q_s = q_s + \frac{\partial H}{\partial p_s} \Delta t, \quad P_s = p_s - \frac{\partial H}{\partial q_s} \Delta t, \quad (2.5)$$

где  $Q_s$  и  $P_s$  — значения переменных  $q_s$  и  $p_s$  в момент  $t + \Delta t$ . Само собой очевидно, что  $Q_s$  и  $P_s$  удовлетворяют уравнениям (2.3); нетрудно проверить, что они удовлетворяют также каноническим соотношениям (2.2) и условию (2.4) [2].

В отличие от описанной выше постановки проблемы, характерной для классической механики, в классической статистической механике состояние системы задается не какой-либо определенной точкой  $(q, p)$  в пространстве фаз  $\mathcal{R}(q, p)$ , а вероятностью  $dW$  или ее плотностью  $\rho$ :

$$dW(q, p, t) = \rho(q, p, t)dqdp, \quad (2.6)$$

указывающей вероятность того, что рассматриваемая система в момент времени  $t$  имеет координаты в интервале

$$q_s, q_s + dq_s, \quad p_s, p_s + dp_s, \quad s = 1, 2, \dots, f. \quad (2.7)$$

По смыслу вероятности функция  $\rho(q, p)$  неотрицательна и нормирована на единицу:

$$\int \rho(q, p, t)dqdp = 1. \quad (2.8)$$

Этот интеграл не должен зависеть от времени, так как вероятность найти рассматриваемую систему где-либо в  $\mathcal{R}(q, p)$  должна быть постоянной. За более детальным изложением этих вопросов следует обратиться к курсам статистической физики (см., например, [3]).

Вероятностное описание предполагает наличие некоторого *статистического коллектива*, или иначе *ансамбля*, который должен быть определен физически, и тем самым должно быть указано, к какому коллективу событий относится теоретическая вероятность<sup>1</sup>.

В рассматриваемой ниже статистической теории таким ансамблем является ансамбль Гиббса [3]<sup>2</sup>. Суть его состоит в следующем: предполагается, что изучаемая механическая система  $\mu$  (это может быть атом, молекула, кристалл, газ и т. п.) находится в определенной макроскопической обстановке  $M$ , которая определяется макроскопическими параметрами (температурой, силой и направлением внешних полей и т. п.). Обратное влияние  $\mu$  на  $M$  считается малым. Напротив, обстановка  $M$  вполне, в статическом смысле, определяет состояние системы  $\mu$ . Предполагается, что данная ситуация повторяется  $N$  раз ( $N \rightarrow \infty$ ). На рис. 2 изображено такое повторение. Измеряются динамические переменные  $(q, p)$  системы  $\mu$ . В первом случае получено  $(q', p')$ , во втором —  $(q'', p'')$ , в  $n$ -м —  $(q^n, p^n)$  и т. д. Предполагается, что в этой серии независимых измерений возникает вполне определенное продиктованное обстановкой  $M$  распределение результатов измерения, которое и предсказывается вероятностью

$$dW_M(q, p, t) = \rho_M(q, p, t)dqdp. \quad (2.9)$$

<sup>1</sup> Здесь автор буквально повторяет слова, которыми Р. Мизес определял область применимости понятия вероятности: «Сперва должен быть налицо коллектив, тогда только можно говорить о вероятностях.» (Мизес Р. Вероятность и статистика. М.: КомКнига, 2007. С. 16.) Мизес считал, что вероятность можно определить только *экспериментально* при последовательном воспроизведении данного случайного события как относительную частоту появления этого события. — *Прим. ред.*

<sup>2</sup> Термины *статистический коллектив*, *статистический ансамбль*, *статистическая совокупность* равнозначны. Мы будем чаще пользоваться термином *статистический ансамбль*, связанным с именем Гиббса [3].

Индекс  $M$  указывает параметры обстановки  $M$ . Простейшим, но и крайне важным случаем обстановки  $M$  является термостат температуры  $T$ , с которым система  $\mu$  обменивается энергией. Гиббс предположил, что в этом случае плотность вероятности является функцией только полной энергии  $E = H(p, q)$  системы  $\mu$ , и исходя из рассмотрения составной системы  $\mu = \mu_a + \mu_b$ , доказал, что плотность  $\rho$  должна иметь вид [2, 4]

$$\rho_T(p, q) = \exp \{ [F - H(p, q)] / kT \}. \quad (2.10)$$

Здесь  $k$  — постоянная Больцмана. Функция  $F$ , зависящая от  $T$ , определяется из условия нормировки (2.8). Как доказывается в статистической термодинамике,  $F$  — свободная энергия системы. Формула (2.10) называется каноническим распределением. Оно описывает ансамбль систем, находящихся в термодинамическом равновесии с термостатом.

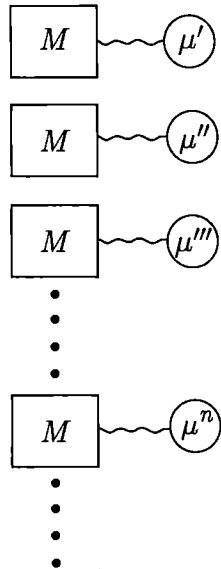


Рис. 2. Ансамбль Гиббса:  $M$  — макроскопическая обстановка;  $\mu$  — система, погруженная в эту обстановку. Указанная ситуация воспроизводится много раз:  $N \rightarrow \infty$

Гиббс был первым ученым, который не стремился «вывести» статистику из детерминированной механики. Он предпочитал изучать следствия из простых статистических предположений. Каноническое распределение лежит в основе термодинамической статистики. Обратимся теперь к описанию движения в этом ансамбле. Удобно представить себе вместо плотности  $\rho(q, p, t)$  множество независимых точек, плотность которых пропорциональна  $\rho(q, p, t)$ . Ясно, что число этих точек должно сохраняться. Поэтому в  $2f$ -мерном пространстве фаз  $\mathcal{R}(q, p)$  плотность  $\rho(q, p, t)$  должна подчиняться обычному, но многомерному уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{s=1}^f \left( \frac{\partial \rho}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \rho}{\partial p_s} \dot{p}_s \right) = 0. \quad (2.11)$$

С другой стороны, это выражение есть не что иное, как полная производная плотности по времени вдоль траектории. Пользуясь уравнениями (2.3), можно написать вместо (2.11)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + [H, \rho] = 0. \quad (2.12)$$

Эта формула выражает основной закон движения плотности  $\rho(q, p, t)$ . Она позволяет определить  $\rho(q, p, t)$  для  $t > 0$ , если плотность  $\rho(q, p, 0)$  дана для  $t = 0$ . Из этого сравнения следует постоянство условия нормировки (2.8). Действительно, скобка  $[H, \rho]$  имеет свойство дивергенции вектора и исчезает при интегрировании по объему в  $\mathcal{R}(q, p)$  по теореме Гаусса. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dp dq = 0. \quad (2.13)$$

Приведем теперь важнейшие формулы для ансамбля Гиббса, фиксированного макроскопической обстановкой  $M$ . Нормировка плотности вероятности  $\rho_M(q, p)$  имеет вид

$$\int \rho_M(q, p) dq dp = 1. \quad (2.14)$$

Среднее значение любой динамической величины  $L(q, p)$  системы  $\mu$  следующее:

$$\bar{L} = \langle L \rangle = \int \rho_M(q, p) L(q, p) dq dp. \quad (2.15)$$

Среднее квадратичное отклонение переменной  $L(q, p)$ :

$$\overline{\Delta L^2} = \int \rho_M(q, p) [L(q, p) - \bar{L}]^2 dq dp. \quad (2.16)$$

Вероятность данного значения  $L$  величины<sup>1</sup>  $L(q, p)$ :

$$dW(L) = \int \rho_M(q, p) \delta(L(q, p) - L) dq dp. \quad (2.17)$$

Вероятность той или иной конфигурации системы  $\mu$  в пространстве  $\mathcal{R}(q)$  равна

$$dW(q) = \int \rho_M(q, p) dp. \quad (2.18)$$

Вероятность данного импульса

$$dW(p) = \int \rho_M(q, p) dq. \quad (2.19)$$

Заметим, что мы часто будем опускать индекс  $M$  у плотности  $\rho_M$  для упрощения формул, но всегда следует помнить, что  $\rho$  соответствует определенной макрообстановке  $M$ .

### Лекция 3. Классическая статистическая механика в пространстве $\mathcal{R}(q, q')$

Глубокие связи между классической статистической механикой и квантовой механикой особенно ясно обнаруживаются, если обратиться к представлению классической статистической механики в вдвоенном пространстве конфигураций  $\mathcal{R}(q, q')$  вместо обычного рассмотрения ее в пространстве фаз  $\mathcal{R}(q, p)$  [1, 5]. Такое рассмотрение можно осуществить, если вместо точки  $(p)$  пространства фаз ввести вторую точку в пространстве конфигураций  $(q')$  посредством следующего преобразования Фурье любой динамической переменной  $L(q, p)$ :

$$L(q, p) = \int L(q, \xi) \exp(i p \xi / \hbar^*) d\xi. \quad (3.1)$$

<sup>1</sup> Здесь  $\delta(x)$  обозначает известную сингулярную функцию Дирака.

Здесь  $\xi = q' - q$  и  $\hbar^*$  — некоторая произвольная постоянная размерности действия. Подобным же образом

$$\rho(q, p) = \int \rho(q, \xi) \exp(ip\xi/\hbar^*) d\xi. \quad (3.2)$$

Обратные формулы имеют вид

$$L(q, q') \equiv L(q, \xi) = \int L(q, p) \frac{\exp(-ip\xi/\hbar^*)}{2\pi\hbar^*} dp, \quad (3.3)$$

$$\rho(q, q') \equiv \rho(q, \xi) = \int \rho(q, p) \frac{\exp(-ip\xi/\hbar^*)}{2\pi\hbar^*} dp. \quad (3.4)$$

Это представление сближает классическую статистическую механику с квантовой механикой. Замечательным образом динамические переменные классической статистической механики в новом представлении оказываются обобщенными функциями. В частности, имеем в этом представлении

$$p_{qq'} \equiv p_{q\xi} = \int p \exp(-ip\xi/\hbar^*) \frac{dp}{2\pi\hbar^*} = i\hbar^* \frac{d\delta(\xi)}{d\xi} = i\hbar^* \frac{d\delta(q - q')}{dq'} \quad (3.5)$$

$$q_{qq'} \equiv q_{q\xi} = \int q \exp(-ip\xi/\hbar^*) \frac{dp}{2\pi\hbar^*} = q' \delta(\xi) = q' \delta(q - q'). \quad (3.6)$$

Эти выражения для  $p$  и  $q$  полностью совпадают с выражениями для операторов  $\hat{p}$  и  $\hat{q}$  в квантовой механике (в координатном представлении). В рассматриваемом представлении динамические переменные статистической механики перемножаются как компоненты Фурье:

$$C(q, \xi) = \widehat{AB}(q, \xi) = \int A(q, u) B(q, \xi - u) du. \quad (3.7)$$

Поэтому произведение  $AB = BA$ . В частности, легко проверить, что

$$(pq - qp)_{q, \xi} = 0 \quad (3.8)$$

в отличие от квантовой механики, где это выражение не равно нулю. Запишем теперь важнейшие формулы в новом представлении. Нормировка плотности  $\rho$ , как следует из (3.2), теперь гласит:

$$\int \rho(q, p) dq dp = \int \rho(q, \xi)_{\xi=0} dq = 1 \quad (3.9)$$

или

$$\int \rho(q, q) dq = 1.$$

Формула (2.15) для среднего значения величины  $L(q, p)$  после подстановки в нее выражений (3.1) и (3.2) приобретает вид

$$\bar{L} = \int \rho(q, \xi) L^*(q, \xi) dq d\xi,$$



или

$$\bar{L} = \int \rho(q, q') L^*(q, q') dq dq'. \quad (3.10)$$

Далее, вероятность конфигурации (2.18) будет равна

$$\rho(q) = \rho(q, \xi)_{\xi=0} = \rho(q, q), \quad (3.11)$$

и наконец, имеет место соотношение

$$(AB - BA)_{q, \xi} = 0. \quad (3.12)$$

Подробности необходимых выкладок, приводящих к этим формулам, даны в дополнении 1. В заключение этой лекции приведем уравнения движения для плотности  $\rho$  в координатном представлении в пространстве  $\mathcal{R}(q, q')$ .

Чтобы получить это уравнение, необходимо выразить все величины в уравнении (2.12) через их компоненты Фурье согласно преобразованию (3.1) и (3.2) и воспользоваться законом умножения (3.7). Ограничимся простым случаем одной степени свободы  $q$  и простым гамильтонианом:

$$H(q, p) = p^2/2m + V(q). \quad (3.13)$$

Здесь  $p$  — импульс частицы,  $m$  — масса,  $V(q)$  — потенциальная энергия. Уравнение для  $\rho(q, p, t)$ , как это легко найти из (2.12), теперь гласит:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial \rho}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial q} \frac{\partial \rho}{\partial p} = 0. \quad (3.14)$$

Выполняя указанное преобразование, в результате выкладок, приведенных в дополнении 1, получим вместо (3.14) уравнение для  $\rho(q, \xi, t)$ :

$$\frac{\partial \rho(q, \xi)}{\partial t} - \frac{i\hbar^*}{m} \frac{\partial^2 \rho(q, \xi)}{\partial q \partial \xi} + \frac{i}{\hbar^*} \frac{\partial V}{\partial q} \xi \rho(q, \xi) = 0. \quad (3.15)$$

Ниже приводятся два простых случая, когда уравнение (3.15) решается несложно.

*A. Свободное движение.*  $V = \text{const}$ . Положим

$$\rho(q, \xi, t) = \int \tilde{\rho}(\alpha, \beta) \exp [i\omega t - i(\alpha q + \beta \xi)] d\alpha d\beta, \quad (3.16)$$

где  $\tilde{\rho}(\alpha, \beta)$  — произвольная функция, которую следует выбрать по начальным данным. Подстановка в (3.15) приводит к дисперсионному уравнению

$$i\omega(\alpha, \beta) + \frac{i\hbar^*}{m} \alpha \beta = 0. \quad (3.17)$$

Если подставить (3.17) в (3.16) и перейти с помощью преобразования Фурье от  $\rho(p, \xi, t)$  к  $\rho(q, p, t)$ , то получается, что  $\rho(q, p, t) = f(p, q - pt/m)$ , где функция  $f(p, q)$  описывает начальное распределение при  $t = 0$ .

Нетрудно проверить, что это решение удовлетворяет уравнению (3.14) при  $\partial V/\partial q = 0$ .

Б. *Осциллятор*.  $V = m\omega_0^2 q^2/2$ . В этом случае следует ввести переменную  $z = q\xi/\Lambda^2$ , где  $\Lambda^2 = \hbar^*/m\omega_0$ . Преобразуя уравнение (3.15) с помощью подстановки для специального случая гармонической зависимости  $\hat{\rho}$  от  $t$ :

$$\rho(z, t) = \rho(z) \exp(i\omega t),$$

получим уравнение

$$\frac{d^2 \rho}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\rho}{dz} - \left(1 + \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{z}\right) \rho = 0, \quad (3.18)$$

которое имеет решение<sup>1</sup>

$$\rho(z) = e^{\pm z} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\omega}{\omega_0}, 1; \pm 2z\right), \quad (3.19)$$

где  ${}_1F_1(\alpha, \gamma; z)$  — вырожденная гипергеометрическая функция, определяемая рядом

$${}_1F_1(\alpha, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$$

#### Лекция 4. Квантовая механика как обобщение классической статистической механики

Объектом применения квантовой механики является квантовый ансамбль. Подобно ансамблю Гиббса, квантовый ансамбль образован неограниченным повторением ситуаций, состоящих из определенной макроскопической обстановки  $M$  и погруженной в эту обстановку микроскопической системы  $\mu$  (см. рис. 2). Пусть система  $\mu$  характеризуется набором переменных  $L \equiv (L_1, L_2, \dots, L_f)$  ( $f$  — число степеней свободы). Пусть в первом измерении  $L = L'$ , во втором  $L = L''$ , в  $n$ -м  $L = L^{(n)}$  и т. д. Предполагается, что в этих условиях результаты измерений  $L$  имеют определенное воспроизводимое распределение  $dW(L)$  (для непрерывной переменной  $dW(L) = \rho(L)dL$ ). Однако это распределение основано на совсем новых законах движения, характерных для квантовых явлений.

Наиболее важной чертой квантового ансамбля является тот факт, что среднее квадратичное отклонение координаты  $\overline{\Delta q_s^2}$  зависит от среднего квадратичного отклонения сопряженного ей импульса  $\overline{\Delta p_s^2}$ . Они связаны знаменитым соотношением «неопределенностей» Гейзенберга [6]

$$\overline{\Delta p_s^2} \overline{\Delta q_s^2} \geq \hbar^2/4. \quad (4.1)$$

<sup>1</sup> См. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. С. 110–119.

Это соотношение может рассматриваться как математическое выражение принципа дополнительности Н. Бора. Согласно этому принципу динамические переменные, характеризующие микросистемы, распадаются на два взаимно дополняющих друг друга класса: пространственно-временных переменных  $Q$  и импульсно-энергетических переменных  $P$ , относящихся к исключаящим друг друга несовместимым измерениям. Из (4.1) следует, что никаким выбором результатов измерений нельзя получить квантовый ансамбль, в котором отсутствовала бы статистическая дисперсия по всем динамическим переменным, иными словами, ансамбль, в котором все динамические переменные  $L$  имели бы определенное значение  $L = \bar{L}$ . Всегда найдутся переменные, для которых среднее квадратичное отклонение  $\overline{\Delta L^2} \neq 0$ . Поэтому в квантовой области статистика неустранима в принципе. Будем рассматривать квантовую механику как обобщение классической статистической механики, данной в координатном представлении в вдвоенном пространстве конфигураций  $\mathcal{R}(q, q')$ .

Суть необходимого обобщения заключается в замене коммутативной алгебры (3.12) динамических переменных и их функций на некоммутативную алгебру, в которой  $AB \neq BA$ . Эта программа реализуется заменой классических компонент Фурье  $A(q, \xi) \equiv A(q, q')$ , изображающих классические динамические переменные в пространстве  $\mathcal{R}(q, q')$ , на элементы матриц  $\hat{A}(q, q')$ , закон умножения  $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$  которых имеет вид

$$\hat{C}(q, q') = \hat{A}\hat{B}(q, q') = \int \hat{A}(q, q'')\hat{B}(q'', q')dq'' \quad (4.2)$$

В общем случае  $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ , так что возникает новая некоммутативная алгебра.

Исходными динамическими переменными, характеризующими квантовую систему, являются канонические импульсы  $p_s$  ( $s = 1, 2, \dots, f$ ), изображаемые теперь операторами  $\hat{p}_s$  и сопряженные им координаты  $q_s$  ( $s = 1, 2, \dots, f$ ), изображаемые операторами  $\hat{q}_s$ .

Другие динамические переменные, аналоги классических  $\mathcal{L}(q, p)$ , изображаются операторами  $\hat{\mathcal{L}}$ , которые являются функциями операторов  $\hat{p}$ ,  $\hat{q}$ :

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}(\hat{p}, \hat{q}). \quad (4.3)$$

Операторы, представляющие действительные физические величины, должны быть эрмитовы, т. е.

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}^+. \quad (4.4)$$

Это условие в раскрытом виде записывается так:  $\hat{\mathcal{L}}(q, q') = \hat{\mathcal{L}}^*(q', q)$  (\* — знак комплексного сопряжения). Условие канонической сопряженности величин, изображаемых операторами  $\hat{p}$ ,  $\hat{q}$ , постулируется в форме

$$[\hat{p}_s, \hat{p}_r] = 0, \quad [\hat{q}_s, \hat{q}_r] = 0, \quad [\hat{p}_s, \hat{q}_r] = \delta_{sr}, \quad (4.5)$$

где  $[\hat{A}, \hat{B}]$  — квантовая скобка Пуассона

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})/\hbar. \quad (4.6)$$

Условия (4.5) должны рассматриваться как условия «квантования» соответствующих классических величин, впервые установленные Гейзенбергом<sup>1</sup>.

Операторы  $\hat{p}$  и  $\hat{q}$ , удовлетворяющие каноническим условиям (4.5), имеют вид (в представлении в пространстве  $\mathcal{R}(q, q')$ )

$$\hat{p}(q, q') = i\hbar \frac{\partial \delta(q - q')}{\partial q}, \quad (4.7)$$

$$\hat{q}(q, q') = q' \delta(q' - q) \quad (4.8)$$

и отличаются от соответствующих классических обобщенных функций  $p_{qq'}$  и  $q_{qq'}$  (3.5) и (3.6) только законом умножения (4.2) вместо (3.12) и заменой произвольной постоянной  $\hbar^*$  на постоянную Планка  $\hbar$ . Доказательство того, что (4.7) и (4.8) удовлетворяют условиям (4.5), дано в дополнении 2.

В соответствии с развиваемой программой построения квантовой механики предполагается, что квантовый ансамбль, состоящий из микросистемы  $\mu$ , определяемый макроскопической обстановкой  $M$ , описывается *статистическим оператором*, или *матрицей плотности*

$$\hat{\rho}_M = \hat{\rho}_M^+. \quad (4.9)$$

Мы будем пользоваться первым термином и обычно в сокращенной форме:  $\hat{\rho}_M$  называют *статоператором*. Этот оператор был введен фон Нейманом [8]. Он имеет в пространстве  $\mathcal{R}(q, q')$  матричные элементы  $\rho_M(q, q')$  и играет в квантовой механике ту же роль, что и фурье-компонента плотности вероятности  $\rho_M(q, \xi) \equiv \rho_M(q, q')$  в классической статистической физике<sup>2</sup>. Оператор  $\hat{\rho}$  нормируется на единицу:

$$\text{Sp } \hat{\rho} = 1, \quad (4.10)$$

где знак Sp означает сумму диагональных элементов оператора (след матрицы). Связь с наблюдаемыми величинами устанавливается определением среднего значения  $\bar{L}$  величины  $L$ , изображаемой оператором  $\hat{L}$  в ансамбле, описываемом статистическим оператором  $\hat{\rho}$ :

$$\bar{L} = \text{Sp}(\hat{\rho}\hat{L}). \quad (4.11)$$

В дополнении 3 показано, что формулы (4.10) и (4.11) отличаются от соответствующих формул классической статистической механики (3.9) и (3.10) только изменением закона умножения.

Операторы  $\hat{L}$  и  $\hat{L}'$  считаются эквивалентными, т. е. представляющими одну и ту же физическую величину  $L$ , если они связаны друг с другом унитарным преобразованием

$$\hat{L}' = S\hat{L}S^{-1}, \quad (4.12)$$

<sup>1</sup> История этого открытия освещена в статьях В. Гейзенберга, Дж. Мехры и др. авторов, которые помещены в юбилейном выпуске журнала «Успехи физических наук», посвященном пятидесятилетию квантовой механики: УФН. 1977. Т. 122, вып. 4.

<sup>2</sup> В последующем будем опускать индекс  $M$ , но его неявное присутствие не должно забываться.

где  $S$  — унитарная матрица,  $S^{-1}$  — обратная ей матрица, которые определяются соотношениями

$$SS^{-1} = S^{-1}S = 1, \quad S^{-1} = S^+, \quad (4.13)$$

т. е. эрмитово-сопряженная матрица  $S^+$  равна обратной  $S^{-1}$ . Унитарное преобразование обладает важнейшим свойством: оно сохраняет канонические соотношения (4.5), так что новые переменные  $\hat{q}' = S\hat{q}S^{-1}$  и  $\hat{p}' = S\hat{p}S^{-1}$  подчиняются также соотношениям (4.5) (см. дополнение 4). Поэтому унитарное преобразование можно также называть каноническим<sup>1</sup>. Это преобразование оставляет также неизменным условие нормировки (4.10) и формулу для вычисления среднего (4.11), т. е.  $\text{Sp } \hat{\rho}' = \text{Sp } \hat{\rho}$  и  $\bar{L} = \bar{L}'$ . Эти утверждения вытекают из известной возможности переставлять циклически множители, стоящие под знаком  $\text{Sp}$  (доказательство см. в дополнении 4). Рассмотрим теперь бесконечно малое унитарное преобразование динамических переменных. Такое преобразование можно записать в виде

$$S = \exp(i\hat{A}d\alpha/\hbar) = 1 + i\hat{A}d\alpha/\hbar + \dots, \quad (4.14)$$

где  $\hat{A}$  — некоторый эрмитов оператор  $\hat{A}^+ = \hat{A}$ ,  $\alpha$  — параметр преобразования. Подставляя (4.14) в формулу (4.12), получаем

$$\hat{\mathcal{L}}' = \hat{\mathcal{L}} + [\hat{A}, \hat{\mathcal{L}}]d\alpha. \quad (4.15)$$

Оператор  $(\hat{\mathcal{L}}' - \hat{\mathcal{L}})/d\alpha$  следует рассматривать как оператор  $d\hat{\mathcal{L}}/d\alpha$ , представляющий производную оператора по  $\alpha$ . Если оператор  $\hat{\mathcal{L}}$  явно зависит от  $\alpha$ , то необходимо учесть частную производную  $\partial\hat{\mathcal{L}}/\partial\alpha$ ; таким образом, можно написать

$$d\hat{\mathcal{L}}/d\alpha = \partial\hat{\mathcal{L}}/\partial\alpha + [\hat{A}, \hat{\mathcal{L}}]. \quad (4.16)$$

Это важное соотношение позволяет придать смысл понятию производной оператора по параметру.

В классической механике движение можно рассматривать как последовательность бесконечно малых канонических преобразований от  $q(t)$ ,  $p(t)$  к  $q(t + \Delta t)$ ,  $p(t + \Delta t)$ . Такое понимание движения переносится и в квантовую механику. Если в бесконечно малом унитарном преобразовании под параметром  $\alpha$  разумеется время, то формула (4.16) определяет производную оператора по времени. Оператор  $\hat{A}$  в этом специальном случае называется оператором Гамильтона  $\hat{H} = \hat{H}(\dots \hat{p} \dots \hat{q}, t)$ . Он является характерным для каждой квантовой системы. В частном случае, когда этот оператор не зависит от времени  $t$ , он совпадает с оператором полной энергии системы. Согласно (4.16) будем иметь для оператора производной по времени следующее выражение:

$$d\hat{\mathcal{L}}/dt = \partial\hat{\mathcal{L}}/\partial t + [\hat{H}, \hat{\mathcal{L}}]. \quad (4.17)$$

<sup>1</sup> Унитарное преобразование сохраняет также свойство эрмитовости операторов. — Прим. ред.

Если  $\hat{H}$  — оператор полной энергии, то из (4.17) получаем

$$d\hat{H}/dt = [\hat{H}, \hat{H}] = 0, \quad (4.18)$$

что выражает на языке операторов закон сохранения энергии. Применяя (4.17) к статистическому оператору  $\hat{\rho}$ , находим

$$d\hat{\rho}/dt = \partial\hat{\rho}/\partial t + [\hat{H}, \hat{\rho}]. \quad (4.19)$$

По аналогии с законом движения для классической плотности  $\rho$  (2.12) на основании (4.19) постулируется закон движения для статистического оператора  $\hat{\rho}$

$$d\hat{\rho}/dt = 0 \quad \text{или} \quad \partial\hat{\rho}/\partial t + [\hat{H}, \hat{\rho}] = 0. \quad (4.20)$$

Из этого уравнения получаем сохранение нормировки оператора  $\hat{\rho}$  (4.10)<sup>1</sup>:

$$\text{Sp} \left( \frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \text{Sp} \hat{\rho} = -\text{Sp} [\hat{H}, \hat{\rho}] = 0. \quad (4.21)$$

Основное уравнение (4.20) допускает формальное решение (для случая  $\partial\hat{H}/\partial t = 0$ ):

$$\hat{\rho}(t) = \exp(i\hat{H}t/\hbar) \hat{\rho}(0) \exp(-i\hat{H}t/\hbar), \quad (4.22)$$

где  $\hat{\rho}(0)$  — статоператор при  $t = 0$ ,  $\hat{\rho}(t)$  — этот же оператор при  $t > 0$ . Однако раскрытие лаконичной операторной записи (4.22) редко бывает легче решения уравнения (4.20), которое обычно оказывается дифференциальным уравнением в частных производных. Во многих важных задачах оператор Гамильтона можно разложить на сумму

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}, \quad (4.23)$$

где  $\hat{H}_0$  представляет энергию рассматриваемой квантовой системы, состоящей из двух или более частей, без взаимодействия их между собой,  $\hat{W}$  — энергию их взаимодействия. Величина  $\hat{H}_0$  может также представлять энергию системы саму по себе («свободной» системы), а  $\hat{W}$  — энергию ее взаимодействия с внешним полем. В этих случаях оказывается целесообразным перейти к представлению, называемому *представлением взаимодействия*. Оно определяется с помощью следующего унитарного преобразования:

$$\hat{\rho}' = \exp(i\hat{H}_0 t/\hbar) \hat{\rho} \exp(-i\hat{H}_0 t/\hbar); \quad (4.24)$$

$$\hat{\mathcal{L}}' = \exp(i\hat{H}_0 t/\hbar) \hat{\mathcal{L}} \exp(-i\hat{H}_0 t/\hbar) \quad (4.25)$$

и в отличие от (4.22) вычисление явного вида  $\hat{\rho}'$  и  $\hat{\mathcal{L}}'$  не представляет труда.

<sup>1</sup> Следует заметить, что при обращении с операторными формулами необходимо соблюдать осторожность: в некоторых случаях такие выражения, как  $\text{Sp} \hat{A}$ , могут расходиться, тогда полезно прибегать к ограничениям, а потом переходить к нужному пределу.

Энергия взаимодействия  $\widehat{W}$ , конечно, преобразуется так же, как и любой другой оператор  $\widehat{L}$ :

$$\widehat{W}' = \exp(i\widehat{H}_0 t/\hbar) \widehat{W} \exp(-iH_0 t/\hbar). \quad (4.26)$$

Операторы  $\widehat{\rho}'$ ,  $\widehat{W}'$ ,  $\widehat{L}'$  будут теперь явно зависеть от времени даже и в том случае, если  $\widehat{\rho}$ ,  $\widehat{W}$ ,  $\widehat{L}$  не зависят от времени. Выражая  $\widehat{\rho}$  и  $\widehat{W}$  через  $\widehat{\rho}'$  и  $\widehat{W}'$  и подставляя эти выражения в (4.20), получаем новое уравнение для  $\widehat{\rho}'$

$$\partial \widehat{\rho}' / \partial t + [\widehat{W}', \widehat{\rho}'] = 0. \quad (4.27)$$

Это уравнение по сравнению с (4.20) выгодно отличается тем, что оператор  $\widehat{\rho}'$  при слабом взаимодействии  $\widehat{W}'(t)$  медленно зависит от времени (при  $\widehat{W}' = 0$   $d\widehat{\rho}'/dt = 0$ ). Поэтому представление взаимодействия полезно при решении уравнения (4.20) методом теории возмущений.

## Лекция 5. Теория когерентного ансамбля

В этой лекции будем рассматривать специальный, но очень важный класс квантовых ансамблей, который характеризуется тем, что статистический оператор подчиняется условию

$$\widehat{\rho}^2 = \widehat{\rho}. \quad (5.1)$$

Такой ансамбль называют *когерентным* или *чистым*<sup>1</sup>.

Рассмотрение такого ансамбля позволит нам ввести в теорию важнейшее понятие волновой функции и показать эквивалентность описания когерентного ансамбля с помощью статоператора  $\widehat{\rho}$  и с помощью волновой функции  $\psi$ . Рассмотрим среднее квадратичное отклонение какой-либо динамической переменной, изображаемой оператором  $\widehat{L}$ . Обозначим  $\lambda$  — среднее его значение  $\overline{L}$ . Оператор отклонения от среднего будет  $\Delta\widehat{L} = \widehat{L} - \lambda$ , а оператор квадратичного отклонения —  $\Delta\widehat{L}^2$ .

Среднее значение оператора квадратичного отклонения на основании общей формулы для среднего (4.11) будет иметь вид

$$\overline{\Delta L^2} = \text{Sp}(\widehat{\rho} \Delta\widehat{L}^2). \quad (5.2)$$

В частном случае когерентного ансамбля (5.1) можно заменить в (5.2)  $\widehat{\rho}$  на  $\widehat{\rho}^2$ ; тогда получим

$$\overline{\Delta L^2} = \text{Sp}(\widehat{\rho}^2 \Delta\widehat{L}^2). \quad (5.3)$$

Пользуясь возможностью циклической перестановки множителей под знаком  $\text{Sp}$ , заменим  $\widehat{\rho}^2 \Delta\widehat{L}^2$  на  $\Delta\widehat{L} \widehat{\rho} \Delta\widehat{L}$ . Обозначая теперь  $\widehat{C} = \Delta\widehat{L} \widehat{\rho}$ , имеем

<sup>1</sup> Термин *когерентный* ансамбль был введен К.В.Никольским [9], термин *чистый* ансамбль — фон Нейманом [8]. Терминология Никольского, на мой взгляд, точнее отображает суть дела.

$\widehat{C}^+ = \widehat{\rho}^+ \Delta \widehat{L}^+$ ; в силу эрмитовости  $\widehat{\rho}$  и  $\Delta \widehat{L}$   $\widehat{C}^+ = \rho \widehat{\Delta L}$ . Поэтому (5.3) можно переписать в виде

$$\overline{\Delta L^2} = \text{Sp}(CC^+). \quad (5.4)$$

Рассмотрим теперь такой специальный случай, когда

$$\overline{\Delta L^2} = 0. \quad (5.5)$$

Тогда из (5.4) следует

$$\text{Sp}(\widehat{C}\widehat{C}^+) = 0, \quad (5.6)$$

иными словами, взят такой ансамбль, в котором динамическая переменная  $L$  имеет лишь одно определенное значение  $L = \lambda$ . Это возможно лишь в том случае, когда

$$\widehat{C} = \widehat{C}^+ = 0 \quad (5.7)$$

(см. дополнение 5). Имея в виду определение операторов  $\widehat{C}$ ,  $\widehat{C}^+$  и оператора  $\Delta \widehat{L} = \widehat{L} - \lambda$ , получаем из (5.7) два уравнения

$$\widehat{L}\widehat{\rho} = \lambda\widehat{\rho}, \quad \widehat{\rho}\widehat{L} = \lambda\widehat{\rho}, \quad (5.8)$$

или в раскрытом виде

$$\int \widehat{L}(q, q'') \widehat{\rho}(q'', q') dq'' = \lambda \widehat{\rho}(q, q'), \quad (5.9)$$

$$\int \widehat{\rho}(q, q'') \widehat{L}(q'', q') dq'' = \lambda \widehat{\rho}(q, q'). \quad (5.10)$$

Такие уравнения для матричных элементов статоператора  $\widehat{\rho}$  можно свести к уравнению для «волновой» функции  $\psi_\lambda(q)$  и уравнению для функции  $\psi_\lambda^*(q')$ , комплексно-сопряженной  $\psi_\lambda(q')$ :

$$\int \widehat{L}(q, q'') \psi_\lambda(q'') dq'' = \lambda \psi_\lambda(q), \quad (5.11)$$

$$\int \psi_\lambda^*(q'') \widehat{L}(q'', q') dq'' = \lambda \psi_\lambda^*(q'). \quad (5.12)$$

В силу эрмитовости  $\widehat{L}$ ,  $\widehat{L}(q'', q') = \widehat{L}^*(q', q'')$ , так что уравнение (5.12) попросту комплексно-сопряжено к (5.11). Поэтому достаточно рассматривать только (5.11). Коротко оно записывается в виде

$$\widehat{L}\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda, \quad (5.13)$$

а искомый матричный элемент оператора  $\widehat{\rho}$ , принадлежащий значению  $L = \lambda$ , оказывается равным

$$\widehat{\rho}_\lambda(q, q') = \psi_\lambda(q) \psi_\lambda^*(q'). \quad (5.14)$$

Доказательство этой формулы приведено в дополнении 5.



Статоператор (5.14), удовлетворяющий уравнению (5.8), будем называть *собственным статоператором оператора  $\hat{L}$* . Из теории линейных уравнений с самосопряженными операторами ( $\hat{L} = \hat{L}^+$ ) известно, что уравнение (5.13) имеет корректные (регулярные) решения только для определенных значений параметра  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s, \dots$ . Эти значения называют *собственными значениями оператора  $\hat{L}$* , а соответствующие функции  $\psi_\lambda(q)$  — *собственными функциями* этого оператора. Во многих случаях спектр собственных значений  $\lambda$  может быть и непрерывным или кусочно-непрерывным.

Собственные функции  $\psi_\lambda(q)$ , принадлежащие различным  $\lambda$ , ортогональны. Их можно нормировать в пространстве  $\mathcal{R}(q)$  на единицу. Последовательность функций  $\psi_{\lambda_1}(q), \psi_{\lambda_2}(q), \dots, \psi_{\lambda_s}(q), \dots$  образует ортонормированную систему функций в функциональном пространстве Гильберта  $\mathcal{H}(\psi)$ . Условие нормировки и ортогональности записывается следующим образом:

для дискретного спектра  $\lambda$

$$\int \psi_\lambda(q) \psi_\mu^*(q) dq = \delta_{\lambda\mu}; \quad (5.15)$$

для непрерывного спектра  $\lambda$

$$\int \psi_\lambda(q) \psi_{\lambda'}^*(q) dq = \delta(\lambda - \lambda'). \quad (5.16)$$

Оба уравнения можно записать в виде символического скалярного произведения

$$\langle \psi_\lambda, \psi_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}. \quad (5.17)$$

Собственные функции  $\psi_\lambda(q)$  обладают также свойством полноты

$$\int \psi_\lambda(q) \psi_\lambda^*(q') d\lambda = \delta(q - q'), \quad (5.18)$$

которое можно записать кратко в виде символического разложения единицы по операторам проектирования:

$$\int d\hat{\rho}_\lambda = 1, \quad (5.19)$$

где  $d\hat{\rho}_\lambda = \psi_\lambda(q) \psi_\lambda^*(q') d\lambda$  для непрерывного спектра или  $d\hat{\rho}_\lambda = \sum_n \psi_{\lambda_n}(q) \psi_{\lambda_n}^*(q') \delta(\lambda - \lambda_n) d\lambda$  для дискретного ( $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ ). Мы не будем более подробно останавливаться на теории уравнения (5.13), поскольку она хорошо описана в традиционных курсах по квантовой механике.

Важно, что, исходя из теории статистического оператора, мы пришли к понятию собственных функций операторов  $\hat{L}$ , образующих в пространстве Гильберта ортонормированные последовательности функций  $\psi_\lambda(q)$ . Это позволяет нам определить любую волновую функцию  $\psi(q)$  — вектор в простран-

стве Гильберта  $\mathfrak{H}(\psi)$  — спектральным разложением по ортонормированным функциям  $\psi_\lambda(q)$ :

$$\psi(q) = \int \psi_\lambda(q) d c_\lambda, \quad (5.20)$$

где  $d c_\lambda$  — амплитуда волны  $\psi_\lambda(q)$ . Запись этого разложения в виде (5.20) пригодна как для непрерывного спектра, так и для дискретного. В первом случае  $d c_\lambda = c(\lambda) d\lambda$ , во втором  $d c_\lambda = \sum_n c(\lambda) \delta(\lambda - \lambda_n) d\lambda$ , и интеграл (5.20)

переходит в сумму по дискретным значениям  $\lambda = \lambda_n$ ,  $c(\lambda) = c(\lambda_n) \equiv c_n$ . Разложение (5.20) — представление любой волновой функции в виде *когерентной суперпозиции* частных волновых функций  $\psi_\lambda$ . Статоператор  $\hat{\rho}$  когерентного ансамбля можно построить не только на основе собственных функций  $\psi_\lambda(q)$  какого-либо оператора  $\hat{\mathcal{L}}$  (см. (5.14)), но и на основе любой их когерентной суперпозиции (5.20):

$$\hat{\rho}(q, q') = \psi(q) \psi^*(q'). \quad (5.21)$$

Подставляя сюда  $\psi(q)$  из (5.20), мы увидим, что возникают интерференционные члены типа  $\psi_\lambda(q) \psi_{\lambda'}^*(q')$ . Это обстоятельство и послужило основанием для названия рассматриваемых ансамблей *когерентными*.

Нетрудно показать, что общий статоператор (5.21) так же, как и более частный (5.14), удовлетворяет условию  $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ .

Условие (5.1) позволяет назвать статоператор когерентного ансамбля *оператором проектирования*. Рассмотрим любой вектор в пространстве Гильберта  $\Phi(q)$ , подействуем на него оператором  $\hat{\rho}$  (5.21) и получим (см. дополнение 5)

$$\hat{\rho}\Phi(q) = \psi(q) \langle \Phi, \psi \rangle, \quad (5.22)$$

где  $\langle \Phi, \psi \rangle$  — определенное выше скалярное произведение

Из вектора  $\Phi(q)$  оператор  $\hat{\rho}$  (5.21) вырезает кусок, параллельный  $\psi(q)$ , и длина функционального отрезка равна  $\langle \Phi, \psi \rangle$ . Это и есть проектирование  $\Phi$  на  $\psi$ . Полагая в (5.22)  $\Phi(q) = \psi(q)$ , получаем

$$\hat{\rho}\psi(q) = \psi(q) \quad (5.23)$$

(так как  $\langle \psi, \psi \rangle = 1$ ). Из этого видно, что любой проекционный оператор имеет одно-единственное собственное значение  $\lambda = +1$ .

Отметим еще одну важную формулу: любой эрмитов оператор  $\mathcal{L}$  можно записать в виде разложения по операторам проектирования

$$\hat{\mathcal{L}} = \int \lambda d\hat{\rho}_\lambda, \quad (5.24)$$

где  $\lambda$  — собственные значения оператора  $\hat{\mathcal{L}}$ ; статоператор  $\hat{\rho}$  — собственный статоператор оператора  $\hat{\mathcal{L}}$ . Оператор  $d\hat{\rho}_\lambda$  был определен ранее. Соотношение (5.24) проверяется подстановкой его в (5.13).

В заключение покажем, что развитие волновой функции  $\psi(q)$  от времени подчиняется уравнению Шредингера.

Для этой цели применим уравнение движения для статоператора  $\hat{\rho}$  (4.20) к специальному случаю когерентного ансамбля, когда элементы  $\hat{\rho}$  имеют вид  $\psi(q)\psi^*(q')$ . В раскрытом виде уравнение (4.20) гласит:

$$\frac{\partial \hat{\rho}(q, q')}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \int \{ \hat{H}(q, q'') \hat{\rho}(q'', q') - \hat{\rho}(q, q'') \hat{H}(q'', q') \} dq'' = 0, \quad (5.25)$$

где  $\hat{H}(q, q')$  означает матричный элемент оператора Гамильтона. Подставим в это уравнение  $\hat{\rho}(q, q')$  в виде (5.21), и разделим результат на  $\psi(q)\psi^*(q')$ ; затем соберем члены, зависящие от  $q$  и  $q'$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi(q)} \left[ \frac{\partial \psi(q)}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \int \hat{H}(q, q'') \psi(q'') dq'' \right] + \\ + \frac{1}{\psi^*(q')} \left[ \frac{\partial \psi^*(q')}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} \int \psi^*(q'') \hat{H}(q'', q') dq'' \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Это равенство возможно только в том случае, если каждое из выражений, зависящих одно от  $q$ , другое от  $q'$ , постоянны и равны друг другу, но с обратным знаком. Если обозначить эту постоянную  $\frac{i}{\hbar} E_0$ , то тот или иной выбор постоянной  $E_0$  будет, как нетрудно проверить, означать выбор отсчета потенциальной энергии. Поэтому без ограничения можно положить  $E_0 = 0$ . Тогда из (5.26) получаем уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \psi(q)}{\partial t} = \int \hat{H}(q, q'') \psi(q'') dq'' \quad (5.27)$$

и второе уравнение, комплексно-сопряженное к приведенному. Уравнение (5.27) есть уравнение Шредингера в координатном представлении. Таким образом, доказано, что описания когерентного ансамбля статоператором и волновой функцией эквивалентны.

В этой связи заметим, что волновую функцию нельзя считать величиной, которую можно приписать отдельной микрочастице. Никаким способом ее нельзя измерить, экспериментируя с одной частицей. Волновая функция  $\psi(q)$  так же, как и статоператор  $\hat{\rho}$ , характеризует принадлежность микрочастицы к определенному квантовому ансамблю, суть которого была описана в лекции 4. Измерением в когерентном ансамбле волновая функция  $\psi(q)$  может быть найдена, но, конечно, с точностью до постоянного нормировочного множителя.

## Лекция 6. Вероятности и квадратичные отклонения

Обратимся сначала к унитарным преобразованиям операторов  $\hat{\rho}$  и  $\hat{\mathcal{L}}$ . В пространстве Гильберта такое преобразование можно рассматривать как поворот, т. е. переход от одной ортонормированной системы векторов  $\psi_\lambda(q)$  к другой  $\psi_\mu(q)$ .

Покажем теперь, что эти функции могут выступать и в другой роли: в роли матричных элементов унитарного преобразования  $S$ . Определим элементы этого преобразования с помощью соотношения

$$S(\lambda, q) = \psi_\lambda^*(q), \quad (6.1)$$

а элементы обратного преобразования  $S^{-1}$  — через соотношения<sup>1</sup>

$$S^{-1}(q, \lambda) = \psi_\lambda(q). \quad (6.2)$$

Перемножив теперь матрицы (6.1) и (6.2) по закону умножения матриц, будем иметь

$$\int S(\lambda, q'') S^{-1}(q'', \lambda') dq'' \equiv \int \psi_{\lambda'}(q'') \psi_\lambda^*(q'') dq'' = \delta(\lambda - \lambda'). \quad (6.3)$$

Условие полноты системы ортонормированных функций (5.16) позволяет доказать также и равенство  $S^{-1}S = 1$ . Именно из него следует, что

$$\int S^{-1}(q, \lambda'') S(\lambda'', q') d\lambda'' = \delta(q - q'). \quad (6.4)$$

Далее, согласно (6.1) и (6.2)  $S^{-1} = S^+$ , поэтому преобразование с такими матричными элементами — унитарное. Это преобразование позволяет нам переходить из одного представления операторов в другое. В частности, преобразование с элементами (6.1) и (6.2) позволяет переходить из *координатного* представления в пространстве переменных  $q - \mathcal{R}(q)$  в пространство переменных  $\lambda - \mathcal{R}(\lambda)$ , которое является пространством собственных значений некоторого оператора  $\hat{\mathcal{L}}$ , представляющего динамическую переменную  $L$ .

Если оператор  $\hat{\mathcal{L}}$  задан в пространстве  $\mathcal{R}(q)$  своими матричными элементами  $\hat{\mathcal{L}}(q, q')$ , то унитарное преобразование (6.1) приведет его к диагональному виду. Действительно, элементы преобразованного оператора  $\hat{\mathcal{L}}'$  равны элементам  $S\hat{\mathcal{L}}S^{-1}$ . В раскрытом виде элементы оператора  $\hat{\mathcal{L}}'$  в  $L$ -представлении (в пространстве  $\mathcal{R}(\lambda)$ ) следующие:

$$\hat{\mathcal{L}}'(\lambda, \lambda') = \int \psi_\lambda^*(q) dq \hat{\mathcal{L}}(q, q') \psi_{\lambda'}(q') dq dq' = \lambda' \int \psi_\lambda^*(q) \psi_{\lambda'}(q') dq dq' = \lambda' \delta(\lambda - \lambda'). \quad (6.5)$$

Для дискретного спектра  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  элементы  $\hat{\mathcal{L}}'$  имеют вид

$$\hat{\mathcal{L}}'(n, m) = \lambda_n \delta_{mn}, \quad (6.6)$$

где  $n$  — номер собственного значения  $\lambda$ . При выводе (6.5) и (6.6) было использовано то обстоятельство, что  $\psi_\lambda$  есть собственная функция оператора  $\hat{\mathcal{L}}$ , т. е. уравнение (5.13).

<sup>1</sup> Заметим, что в формулах (6.2) и (6.3) строчки и колонки матриц нумеруются в разных пространствах  $\mathcal{R}(q)$  и  $\mathcal{R}(\lambda)$ .

Преобразуем теперь этим же унитарным преобразованием статоператор  $\hat{\rho}$ , заданный первоначально в пространстве  $\mathcal{R}(q)$  формулой (5.21). Элементы оператора  $\hat{\rho}'$  в  $L$ -представлении согласно определению унитарного преобразования (6.1) и (6.2) будут равны

$$\hat{\rho}'(\lambda, \lambda') = \int \psi_{\lambda}^*(q) \psi(q) \psi^*(q') \psi_{\lambda'}(q') dq dq'. \quad (6.7)$$

Подставляя в (6.7)  $\psi(q)$  в виде суперпозиции (5.20), получаем для непрерывного спектра  $\lambda$

$$\hat{\rho}'(\lambda, \lambda') = c(\lambda) c^*(\lambda'); \quad (6.8)$$

для дискретного спектра  $\lambda$

$$\hat{\rho}'(n, m) = c(n) c^*(m). \quad (6.9)$$

Эти формулы дают элементы статоператора  $\hat{\rho}$  в  $L$ -представлении.

Воспользуемся теперь этими формулами, чтобы вычислить средние величины  $L$  в состоянии, описываемом статоператором  $\hat{\rho}$  в  $L$ -представлении. Как было показано ранее, унитарное преобразование не меняет следа матриц:

$$\text{Sp}(\hat{\rho}\hat{\mathcal{L}}) = \text{Sp}(\hat{\rho}'\hat{\mathcal{L}}').$$

Это означает, что в формуле для среднего значения величины  $L$ , измеряемой в ансамбле, можно написать произведение  $\hat{\rho}\hat{\mathcal{L}}$  в форме произведения  $\hat{\rho}'\hat{\mathcal{L}}'$ , взятых теперь в  $L'$ -представлении. В раскрытом виде след этого произведения равен

$$\bar{L} = \text{Sp}(\hat{\rho}\hat{\mathcal{L}}) = \int \hat{\rho}(\lambda, \lambda'') \hat{\mathcal{L}}(\lambda'', \lambda) d\lambda'' d\lambda. \quad (6.10)$$

Замечая, что в  $L$ -представлении матрица  $\hat{\mathcal{L}}$  диагональна  $\hat{\mathcal{L}}(\lambda, \lambda'') = \lambda \delta(\lambda - \lambda'')$ , получаем из (6.10)

$$\bar{L} = \int \lambda d\hat{\rho}(\lambda, \lambda) \quad (6.11)$$

при условии  $\text{Sp} \hat{\rho} = 1$ , т. е. при

$$\int d\hat{\rho}(\lambda, \lambda) = 1. \quad (6.12)$$

Для непрерывного спектра  $d\hat{\rho}(\lambda, \lambda) = |c(\lambda)|^2 d\lambda$ , а для дискретного спектра  $d\hat{\rho}(\lambda, \lambda) = \sum_n |c(\lambda)|^2 \delta(\lambda - \lambda_n) d\lambda$ . Поэтому имеем для этих случаев

$$\bar{L} = \int \lambda |c(\lambda)|^2 d\lambda, \quad (6.13)$$

или

$$\bar{L} = \sum_n \lambda_n |c(n)|^2. \quad (6.14)$$

Сравним эти выражения с общим определением среднего, принятым в теории вероятностей.

Среднее значение случайной величины  $L$ , принимающей значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ , с вероятностью  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$  ( $\sum P_n = 1$ ) равно

$$\bar{L} = \sum_n \lambda_n P_n. \quad (6.15)$$

Сравнивая (6.13) с (6.15), видим, что величину  $|c(n)|^2$  необходимо трактовать как вероятность наблюдения в ансамбле  $\hat{\rho}$  значения динамической переменной  $L = L_n$ , т. е.

$$P_n = |c(n)|^2. \quad (6.16)$$

Нетрудно видеть, что для непрерывного спектра вероятность того, что  $\lambda \leq L \leq \lambda + \Delta\lambda$ , будет равна

$$P(\lambda)d\lambda = |c(\lambda)|^2 d\lambda. \quad (6.17)$$

Рассмотрим теперь две динамические величины  $L$  и  $M$ , изображаемые операторами  $\hat{\mathcal{L}}$  и  $\hat{\mathcal{M}}$  соответственно. Нас будет интересовать случай, когда

$$[\hat{\mathcal{L}}, \hat{\mathcal{M}}] = \hat{c} \neq 0. \quad (6.18)$$

Пусть ансамбль будет когерентным и определяется статоператором

$$\hat{\rho}(q, q') = \psi(q)\psi^*(q'). \quad (6.19)$$

Если волновая функция  $\psi(q)$  не является собственной функцией ни того, ни другого оператора, то ясно, что в таком ансамбле ни величина  $L$ , ни величина  $M$  не имеют определенного значения. Поэтому  $\overline{\Delta L^2} > 0$  и  $\overline{\Delta M^2} > 0$ . Установим соотношения между этими квадратичными отклонениями. В дополнении 6 показано, что если  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  — два эрмитовых оператора, а  $\hat{c}$  их коммутатор,  $\hat{c} = [\hat{A}, \hat{B}]$ , то имеет место соотношение

$$\overline{\hat{A}^2} \overline{\hat{B}^2} \geq \frac{\hbar^2}{4} |\overline{\hat{c}^2}|^2, \quad (6.20)$$

где  $\overline{\hat{A}^2}$ ,  $\overline{\hat{B}^2}$  — средние значения квадратов операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ <sup>1</sup>. Полагая в (6.20)  $\hat{A} = \hat{\mathcal{L}} - \bar{L}$  и  $\hat{B} = \hat{\mathcal{M}} - \bar{M}$ , где  $\bar{L}$  и  $\bar{M}$  среднее значение величин  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{M}$  соответственно, получаем важное соотношение

$$\overline{\Delta L^2} \overline{\Delta M^2} \geq \frac{\hbar^2}{4} |[\hat{\mathcal{L}}, \hat{\mathcal{M}}]|^2. \quad (6.21)$$

<sup>1</sup> При условии, что эти средние значения конечны.

В частности, если  $\hat{L} = \hat{p}_s$  и  $\hat{M} = \hat{q}_s$ , пользуясь условием квантования (4,5), находим соотношение Гейзенберга в самой общей форме:

$$\overline{\Delta p_s^2} \overline{\Delta q_s^2} \geq \frac{\hbar^2}{4} \delta_{ss}. \quad (6.22)$$

Существование соотношений вида (6.21) и фундаментального соотношения (6.22), как уже отмечалось ранее, показывает, что никаким выбором подансамблей  $\hat{\rho}_\lambda$  когерентного ансамбля  $\hat{\rho}$  невозможно получить ансамбль, в котором все средние квадратичные отклонения были бы равны нулю.

Как видно из (6.21), если коммутатор (6.18) равен нулю, то возможно одновременное равенство  $\Delta L^2 = \Delta M^2 = 0$ , т. е. обе величины,  $L$  и  $M$ , могут иметь определенные значения  $\lambda$  и  $\mu$ . Из равенства нулю коммутатора (6.18) следует, что уравнения для собственных функций оператора  $\hat{L}$  и  $\hat{M}$ :

$$\hat{L}\psi = \lambda\psi; \quad (6.23)$$

$$\hat{M}\psi = \mu\psi, \quad (6.24)$$

могут быть удовлетворены одной общей волновой функцией  $\psi$ . Чтобы убедиться в этом, следует подействовать на уравнение (6.23) оператором  $\hat{M}$ , а на уравнение (6.24) — оператором  $\hat{L}$  и взять разность результатов.

## Лекция 7. Некогерентный ансамбль

Рассмотрим такую ситуацию, когда не определено, какому когерентному ансамблю  $\hat{\rho}_\lambda$  из возможных в заданной макроскопической обстановке  $\mathcal{M}$  принадлежит частица  $\mu$ . Однако будем предполагать, что нам известны вероятности того, что частица  $\mu$  может оказаться принадлежащей соответствующему когерентному ансамблю  $\hat{\rho}_\lambda$ .

Вероятности  $P_\lambda$  являются постоянными числами ( $P_\lambda \geq 0$ ,  $\sum P_\lambda = 1$ ), характеризующими заданную информацию о квантовом ансамбле. Набор статоператоров  $\hat{\rho}_\lambda$  и вероятностей  $P_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, N$ ) можно заменить одним статоператором  $\hat{\rho}$ , характеризующим самый общий квантовый ансамбль:

$$\hat{\rho} = \sum_{\lambda=1}^N P_\lambda \hat{\rho}_\lambda, \quad (7.1)$$

$$\hat{\rho}_\lambda(q, q') = \psi_\lambda(q) \psi_\lambda^*(q'). \quad (7.2)$$

Такой ансамбль называют некогерентным или *смешанным*<sup>1</sup>. Основанием для такого названия является то обстоятельство, что волновые функции  $\psi_\lambda(q)$ , определяющие когерентные подансамбли, складываются в (7.1) своими интенсивностями  $|\psi_\lambda(q)|^2$  (при  $q = q'$ ) и поэтому не интерferируют между

<sup>1</sup> Термин *смешанный* принадлежит фон Нейману. Термин *некогерентный* — К. В. Никольскому.

собой. Напомним, что в когерентном ансамбле складываются амплитуды волновых функций с учетом их фаз:  $\psi(q) = \sum_{\lambda} \psi_{\lambda}(q)$ . Частные операторы проекции  $\hat{\rho}_{\lambda}$ , определяющие полный статоператор  $\hat{\rho}$  для некогерентного ансамбля (7.1), ортогональны друг другу:

$$\hat{\rho}_{\lambda}\hat{\rho}_{\mu} = 0, \quad \lambda \neq \mu \quad (7.3)$$

и определяют статистически независимые события.

Сумма вероятностей  $P_{\lambda}$ , входящих в определение  $\hat{\rho}$  (7.1), подчиняется условию вероятностей независимых событий

$$\sum_{\lambda} P_{\lambda} = 1. \quad (7.4)$$

Собственные значения операторов  $\hat{\rho}_{\lambda}$ , как и всякого оператора проекции, равны +1. В результате собственные значения оператора  $\hat{\rho}$  (7.1) равны вероятностям  $P_1, P_2, \dots, P_{\lambda}, \dots, P_N$ . Поэтому оператор  $\hat{\rho}$  (7.1), будучи приведен к диагональному виду, приобретает вид

$$\hat{\rho} = \begin{vmatrix} P_1 & & 0 \\ & P_2 & \\ 0 & & P_N \end{vmatrix}. \quad (7.5)$$

Заметим, что общая запись оператора (7.1), пригодная как для непрерывного, так и для дискретного спектра, следующая:

$$\hat{\rho} = \int P(\lambda) d\rho_{\lambda}, \quad (7.6)$$

при этом, конечно,  $d\rho_{\lambda}$  не обязательно задавать в координатном представлении в пространстве  $\mathcal{R}(q, q')$ . С помощью унитарного преобразования можно перейти к любому другому представлению  $M$ .

Если собственные значения  $M_1, \dots, M_n, \dots, M_m$  оператора  $\hat{M}$  дискретны, то оператор  $\hat{\rho}$  в пространстве  $\mathcal{R}(M, M')$  приобретает вид

$$\hat{\rho}(n, m) = \sum_{\lambda} P_{\lambda} \psi_{\lambda}(n) \psi_{\lambda}^*(m), \quad (7.7)$$

где  $\psi_{\lambda}(n)$  — амплитуды в разложении

$$\psi_{\lambda}(q) = \sum_n \psi_n(n) \Phi_n(q), \quad (7.8)$$

а  $\Phi_n(q)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — собственные функции оператора  $\hat{M}$ . В силу того, что вероятности  $P_{\lambda}$  входят в матрицу  $\hat{\rho}$  линейно и не зависят от времени,



а только от нашей информации об ансамбле, то все соотношения и уравнения, установленные ранее для когерентного ансамбля, остаются верными и для ансамбля некогерентного, конечно, за исключением условия  $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ , характерного только для когерентного ансамбля. В некогерентном ансамбле имеем

$$\hat{\rho}^2 = \sum_{\lambda} P_{\lambda}^2 \hat{\rho}_{\lambda}. \quad (7.9)$$

Собственные значения  $\hat{\rho}^2$  суть  $P_{\lambda}^2 < 1$ .

Вычислим теперь среднее квадратичное отклонение какой-либо величины  $L$ , изображенной оператором  $\hat{L}$ .

Если среднее значение  $L$  есть  $\bar{L}$ , то

$$\begin{aligned} \overline{\Delta L^2} &= \text{Sp} [\hat{\rho}(\hat{L} - \bar{L})^2] = \sum_{\lambda} P_{\lambda} \text{Sp} \rho_{\lambda} (\hat{L} - \bar{L})^2 = \\ &= \sum_{\lambda} P_{\lambda} \text{Sp} \hat{\rho}_{\lambda} \{(\hat{L} - \bar{L}_{\lambda})^2 + (\bar{L} - \bar{L}_{\lambda})^2\} = \sum_{\lambda} P_{\lambda} [\overline{\Delta L_{\lambda}^2} + (\bar{L} - \bar{L}_{\lambda})^2], \end{aligned} \quad (7.10)$$

где  $\bar{L}_{\lambda}$  — среднее значение  $L$  в подансамбле  $\hat{\rho}_{\lambda}$ ,  $\overline{\Delta L_{\lambda}^2}$  — среднее квадратичное отклонение в том же подансамбле, величина  $(\bar{L} - \bar{L}_{\lambda})^2$  — дополнительная статистическая дисперсия, характерная для некогерентного ансамбля, которая устранима применением анализатора, разлагающего некогерентный ансамбль  $\hat{\rho}$  на когерентные подансамбли  $\hat{\rho}_{\lambda}$ , которые уже не разложимы на бездисперсионные подансамбли.

Обратимся теперь к уравнению движения для оператора  $\hat{\rho}$  (7.1). Из постоянства вероятностей  $P_{\lambda}$  заключаем, что уравнение движения для статоператора  $\hat{\rho}$  некогерентного ансамбля не будет отличаться от уравнения движения для статоператора когерентного ансамбля (4.20). Действительно,

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \sum_{\lambda} P_{\lambda} \frac{\partial \hat{\rho}_{\lambda}}{\partial t} = - \sum_{\lambda} P_{\lambda} [\hat{H}, \hat{\rho}_{\lambda}] = - [\hat{H}, \sum_{\lambda} \hat{\rho}_{\lambda}]. \quad (7.11)$$

Поэтому уравнение

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + [\hat{H}, \hat{\rho}] = 0 \quad (7.12)$$

сохраняет свое значение и для самого общего квантового ансамбля, каким является ансамбль некогерентный. В этом выводе строго учитывается требование  $\partial P_{\lambda} / \partial t = 0$ . Подчеркнем еще раз, что величины  $P_{\lambda}$  меняются только с изменением нашей информации. Разумеется, если эта информация меняется очень медленно (например термостат, в который погружена система  $\mu$ , очень медленно меняет свою температуру  $\theta$ ) и если при этом наша микросистема  $\mu$  приходит в тепловое равновесие, то в (7.10) величины  $P_{\lambda} = P_{\lambda}(\theta)$ ,  $\theta = \theta(t)$  можно считать зависящими от времени, пренебрегая все же величиной  $\partial P_{\lambda} / \partial t$ .

Если же изменения температуры  $\theta$  быстрые, то и сам термостат нужно изучать средствами квантовой механики и определить новую макроскопиче-

скую обстановку  $\mathcal{M}'$ , такую, что  $\mathcal{M}$  погружено теперь в  $\mathcal{M}'$ . Новая обстановка  $\mathcal{M}'$  должна быть достаточно стабильна, как и всякая хорошая система отсчета.

Рассмотрим теперь, как изменяется со временем  $\rho(n, t)$  — вероятность найти в момент времени  $t$  значение какой-либо динамической величины  $L$ , равное  $\lambda$ . Для определенности будем считать, что спектр оператора  $\widehat{L}$  дискретный:  $L = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots, \lambda_m$ .

По определению вероятность  $\rho(n, t)$  равна диагональному элементу матрицы  $\widehat{\rho}$ , взятой в  $L$ -представлении:

$$\rho(n, t) = \rho(n, n; t) \equiv \langle n | \widehat{\rho}(t) | n \rangle. \quad (7.13)$$

Часто интересуются не самой вероятностью, а скоростью ее изменения со временем. Ответ на этот вопрос дается непосредственно уравнением (7.11), которое удобнее для нашей цели написать в представлении взаимодействия. Согласно (4.27) в этом представлении уравнение (7.11) приобретает вид

$$\frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial t} + [\widehat{W}(t), \widehat{\rho}] = 0, \quad (7.14)$$

где  $\widehat{W}$  — энергия взаимодействия, из этого уравнения следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(n, t)}{\partial t} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} \langle n | \widehat{\rho}(t) | n \rangle = \\ &= -\frac{i}{\hbar} \sum_{n''} \{ \langle n | \widehat{W}(t) | n'' \rangle \langle n'' | \widehat{\rho} | n \rangle - \langle n | \widehat{\rho} | n'' \rangle \langle n'' | \widehat{W}(t) | n \rangle \} = \\ &= -\frac{i}{\hbar} \sum_{n''} \{ \langle n | \widehat{W}(t) | n'' \rangle \langle n'' | \widehat{\rho} | n \rangle - \langle n'' | \widehat{\rho} | n \rangle^* \langle n | \widehat{W}(t) | n'' \rangle^* \}, \end{aligned} \quad (7.15)$$

откуда

$$\frac{\partial \rho(n, t)}{\partial t} = \frac{2}{\hbar} \text{Im} \langle n | \widehat{W}(t) \widehat{\rho}(t) | n \rangle. \quad (7.16)$$

Если было известно, что при  $t = 0$  система  $\mu$  находилась в состоянии  $L = \lambda_m$ , так что при  $t = 0$  только один матричный элемент отличен от нуля  $\langle m | \widehat{\rho}(0) | m \rangle = 1$ , то формула (7.16) дает *вероятность перехода* системы  $\mu$  в единицу времени из состояния  $m$  в состояние  $n$ .

Эта вероятность имеет простой вид в том случае, когда можно ограничиться первым неисчезающим приближением теории возмущения. В этом приближении из уравнения (7.14) будем иметь

$$\frac{\partial \langle n | \widehat{\rho}(t) | m \rangle}{dt} = -\langle n | [\widehat{W}(t), \widehat{\rho}(0)] | m \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle n | \widehat{W}(t) | m \rangle \langle m | \rho(0) | m \rangle. \quad (7.17)$$

Имея в виду, что  $\langle n | \widehat{\rho}(0) | m \rangle = 0$ , получаем

$$\langle n | \widehat{\rho}(t) | m \rangle = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \langle n | \widehat{W}(\tau) | m \rangle d\tau. \quad (7.18)$$

Все остальные матричные элементы  $\langle n|\hat{\rho}(t)|n''\rangle$ ,  $n'' \neq m$  в рассматриваемом приближении равны нулю. Подставляя эти результаты в (7.15), находим

$$\frac{\partial \rho(n, t)}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \langle n|\hat{\rho}(t)|n\rangle = \frac{1}{\hbar^2} \frac{d}{dt} \left| \int_0^t \langle n|\widehat{W}(\tau)|m\rangle d\tau \right|^2. \quad (7.19)$$

Эта известная формула теории квантовых переходов определяет в первом приближении вероятность перехода системы в единицу времени из состояния с  $L = \lambda_m$  в состояние с  $L = \lambda_n$ .

## Лекция 8. Уравнение движения для статистического оператора в различных представлениях

Рассмотрим уравнения движения для статистического оператора  $\hat{\rho}$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + [\hat{H}, \hat{\rho}] = 0 \quad (8.1)$$

в раскрытом виде в координатном представлении в пространстве  $\mathcal{R}(q, q')$ .

Ограничимся случаем одной степени свободы. Соответственно возьмем оператор функции Гамильтона (оператор полной энергии) в виде

$$\hat{H} = \hat{p}^2/2m + V(\hat{q}), \quad (8.2)$$

где  $\hat{p}$  — оператор импульса,  $m$  — масса частицы, оператор потенциальной энергии. В координатном представлении матричные элементы этого оператора имеют вид

$$\hat{H}(q, q') = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \delta(q - q')}{\partial q'^2} + V(q')\delta(q - q'). \quad (8.3)$$

Подставляя это выражение в (8.1), применяя правила умножения матриц и используя при этом интегрирование по частям, получаем

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}(q, q')}{\partial t} = \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \hat{\rho}(q, q')}{\partial q^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \hat{\rho}(q, q')}{\partial q'^2} + \{V(q) - V(q')\}\hat{\rho}(q, q') = 0. \quad (8.4)$$

Если ввести новые переменные  $\xi = q' - q$  и  $Q = (q' + q)/2$ , то получается

$$\frac{\partial \hat{\rho}(Q, \xi)}{\partial t} - \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial Q \partial \xi} + \frac{i}{\hbar} \left\{ V\left(Q + \frac{\xi}{2}\right) - V\left(Q - \frac{\xi}{2}\right) \right\} \hat{\rho}(Q, \xi) = 0. \quad (8.5)$$

Это уравнение формально можно записать в виде разложения по степеням  $\xi$ :

$$\frac{\partial \hat{\rho}(Q, \xi)}{\partial t} - \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial Q \partial \xi} + \frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{\partial V}{\partial Q} \xi + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n V}{\partial Q^n} \xi^n \right\} \rho(Q, \xi) = 0. \quad (8.6)$$

Уравнение (8.6) переходит в уравнение для классической плотности  $\rho(q, p)$ , представленной в пространстве  $\mathcal{R}(q, q')$ .

Действительно, если потенциал  $V(Q)$  и матрица  $\hat{\rho}(Q, \xi)$  достаточно гладкие функции, то в (8.6) можно пренебречь высшими производными  $\partial^n V / \partial Q^n$ , начиная с  $n = 2$ . В этом случае уравнение (8.6) отличается от соответствующего уравнения классической статистической механики заменой в (3.15) произвольной постоянной  $\hbar^*$  на постоянную Планка  $\hbar$ .

В этой связи рассмотрим еще одно важное представление для статистического оператора  $\hat{\rho}$ . Подобно тому как классическую плотность  $\rho(q, p)$  можно представить в пространстве  $\mathcal{R}(q, q')$ , так и квантовый оператор  $\hat{\rho}(q, q')$  можно представить в пространстве фаз  $\mathcal{R}(q, p)$ . Для этой цели колонки матрицы  $\hat{\rho}(q, q')$  будем нумеровать не переменной  $q'$ , а переменной  $p$ .

Этого можно достигнуть, если выполнить «половинное» унитарное преобразование, вводя вместо  $\hat{\rho}(q, q')$  величину  $\hat{\rho}(q, p)$ , определенную преобразованием колонки  $q'$ :

$$\hat{\rho}(q, p) = \int \hat{\rho}(q, q'') S(q'', p) dq'', \quad (8.7)$$

где матрица унитарного преобразования  $S$  имеет элементы

$$S(q, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(-i\frac{pq}{\hbar}\right). \quad (8.8)$$

В таком представлении, называемом «смешанным», квантовые операторы отображаются в пространство фаз  $\mathcal{R}(q, p)$  и возникает новая связь с классической статистической механикой (см. [1, 6, 10, 11]).

Было замечено, что целесообразней вместо матричных элементов  $\hat{\rho}(q, p)$  ввести новые элементы, отличающиеся от (8.7) множителем  $\exp(-ipq\hbar)/\sqrt{2\pi\hbar}$ , не обращающимся нигде ни в 0, ни в  $\infty$ .

Эти новые элементы мы обозначим  $R(q, p)$ :

$$R(q, p) = \hat{\rho}(q, p) \exp(-ipq/\hbar)/\sqrt{2\pi\hbar}. \quad (8.9)$$

Такому преобразованию следует подчинить и все другие операторы. Вместо матричных элементов  $\hat{\mathcal{L}}(q, q')$  будем иметь

$$L(q, p) = \hat{\mathcal{L}}(q, p) \exp(-ipq/\hbar)/\sqrt{2\pi\hbar} \quad (8.10)$$

и

$$\hat{\mathcal{L}}(q, p) = \int \hat{\mathcal{L}}(q, q'') \exp(-ipq''/\hbar) dq''/\sqrt{2\pi\hbar}. \quad (8.11)$$

Пользуясь этими преобразованиями, нетрудно убедиться в том, что новые матричные элементы  $L(q, p)$  в простейших случаях в точности совпадают с соответствующими классическими величинами. Именно

$$p_{q,p} = p, \quad q_{q,p} = q, \quad (8.12)$$

$$H(q, p) = p^2/2m + V(q). \quad (8.13)$$

(Доказательство см. в дополнении 7.)

Там же показано, что формула для среднего значения величины  $L(q, p)$  принимает «классический» вид

$$\bar{L} = \int R^*(q, p) L(q, p) dq dp. \quad (8.14)$$

Вероятность найти систему  $\mu$  в точке  $(q)$  пространства конфигураций  $\mathcal{R}(q)$  имеет также классический вид

$$\rho(q) = \int R(q, p) dp. \quad (8.15)$$

Подобным же образом для импульсного пространства

$$\rho(p) = \int R(q, p) dq \quad (8.16)$$

при условии нормировки

$$\int R(q, p) dq dp = 1. \quad (8.17)$$

Однако  $R(q, p)$  не является вероятностью найти систему  $\mu$  в точке  $(q, p)$  фазового пространства  $\mathcal{R}(q, p)$ , что противоречило бы принципу дополнительности. Это обстоятельство находит свое выражение в том, что величина  $\hat{R}(q, p)$ , как можно доказать, всегда комплексная, т. е.

$$R(q, p) \neq R^*(q, p). \quad (8.18)$$

В силу линейности выполняемых преобразований уравнение движения (8.1) сохраняется и для величины  $\hat{R}(q, p)$ :

$$\partial \hat{R} / \partial t + [\hat{H}, \hat{R}] = 0. \quad (8.19)$$

Однако конкретный вид операторной скобки Пуассона  $[\hat{H}, \hat{R}]$  совершенно меняется. Именно, в раскрытом виде уравнение (8.19) теперь записывается так (см. дополнение 7):

$$\frac{\partial R(q, p)}{\partial t} + \int \exp(i\xi\eta/\hbar) \{H(q, p + \eta)R(q + \xi, p) - R(q, p + \eta)H(q + \xi, p)\} d\xi d\eta. \quad (8.20)$$

Если учесть конечное значение интеграла

$$I_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi\eta/\hbar) \xi^n \eta^m d\xi d\eta = (\pm i\hbar)^{n+m} m! \delta_{nm}, \quad (8.21)$$

то в (8.20) можно разложить  $H(q + \xi, p + \eta)$  и  $R(q + \xi, p + \eta)$  по степеням  $\xi$  и  $\eta$  и выполнить интегрирование по этим переменным. В результате получаем (см. дополнение 7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(q, p)}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial R(q, p)}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial q} \frac{\partial R(q, p)}{\partial q} = \\ = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 R(q, p)}{\partial q^2} + \sum_{n \geq 2} \frac{(-i\hbar)^{n-1}}{n!} \frac{\partial^n V(q)}{\partial q^n} \frac{\partial^n R(q, p)}{\partial p^n}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

В случае достаточной гладкости функций  $R(q, p)$  и  $V(q)$  можно пренебречь правой частью в (8.22). При этом условии уравнение (8.22) для  $R(q, p)$  превращается в уравнение для классической плотности  $\rho(q, p)$ . Представление квантовой механики в пространстве фаз  $\mathcal{R}(q, p)$  сближает ее с классической статистической механикой в том же пространстве.

Это позволяет нам сделать вывод о том, что обе теории, классическая и квантовая, работают в одинаковых пространствах:  $\mathcal{R}(q, q')$  и  $\mathcal{R}(q, p)$ <sup>1</sup>. Некоторое расширение набора динамических переменных, характеризующих микроскопические системы  $\mu$ , по сравнению с набором классических переменных происходит за счет дискретных квантовых переменных, таких, как механический спин частицы  $\sigma$  или ее изотопический спин  $\tau$ . Непрерывные же переменные полностью уместаются в классических пространствах.

## Лекция 9. Симметрии в системах тождественных частиц

Система  $\mu$ , состоящая из  $N$  тождественных частиц, обладает симметриями, имеющими фундаментальное значение для физики микрочастиц.

Оператор Гамильтона  $\hat{H}$  такой системы должен быть симметричным относительно перестановок частиц. Это свойство гамильтониана — математическое выражение самого понятия тождественности частиц: тождественные частицы одинаково взаимодействуют между собой и с внешними полями, имеют одинаковые массы, заряды и другие признаки. Если  $\mathcal{P}_{ik}$  обозначить операцию перестановки  $i$ -й и  $k$ -частиц, то для тождественных частиц имеет место следующее равенство:

$$\mathcal{P}_{ik} \hat{H} = \hat{H}. \quad (9.1)$$

Однако это тривиальное соотношение, справедливое и в классической механике, в квантовой области ведет к важным последствиям. Для выяснения этих последствий следует обратиться к изучению возможных симметрий статистического оператора  $\hat{\rho}$  для  $N$  тождественных частиц. Ясно, что оператор  $\hat{\rho}$  может быть симметричным в отношении перестановки частиц. Нетривиальная симметрия относится к перестановкам  $\mathcal{P}_{ik}(q)$  и  $\mathcal{P}_{ik}(q')$ , переставляющим частицы только в строках матрицы  $\hat{\rho}(q, q')$  и только в ее колонках соответственно. Если вспомнить, что любой статистический оператор  $\hat{\rho}$  — сумма билинейных выражений типа  $\psi(q)\psi^*(q')$  (здесь  $\psi(q)$  — волновая функция),

<sup>1</sup> Возможно еще и представление в импульсном пространстве  $\mathcal{R}(p, p')$ .

то  $\mathcal{P}_{ik}(q)$  и  $\mathcal{P}_{ik}(q')$  означают перестановки частиц в волновой функции  $\psi(q)$  и соответственно в функции  $\psi^*(q')$ . Поэтому симметрия статистического оператора при подобных перестановках полностью определяется симметрией волновых функций  $\psi(q)$ .

Рассмотрим волновые функции  $N$  тождественных частиц  $\psi(q_1, \dots, q_i, \dots, q_k, \dots, q_N)$ , являющиеся собственными функциями оператора перестановки  $\mathcal{P}_{ik}$ :

$$\mathcal{P}_{ik}\psi(q_1, \dots, q_i, \dots, q_k, \dots, q_N) = \lambda\psi(q_1, \dots, q_i, \dots, q_k, \dots, q_N), \quad (9.2)$$

где  $\lambda$  — собственное значение оператора  $\mathcal{P}_{ik}$ . Применяя к уравнению (9.2) вторично перестановку  $\mathcal{P}_{ik}$  и замечая, что  $\mathcal{P}_{ik}^2 = 1$ , приходим к заключению, что  $\lambda^2 = 1$ . Следовательно, возможные собственные значения оператора перестановки равны  $\lambda = \pm 1$ .

Поэтому волновые функции системы тождественных частиц распадаются на два класса: симметричных функций  $\psi_s(q)$  и антисимметричных функций  $\psi_a(q)$ . Для этих функций имеем

$$\mathcal{P}_{ik}\psi_s(\dots q \dots) = +\psi_s(\dots q \dots), \quad \mathcal{P}_{ik}\psi_a(q) = -\psi_a(q) \quad (9.3)$$

для любой пары частиц  $i, k$ . Соответственно этим двум классам волновых функций возникает два класса статистических операторов для систем тождественных частиц:  $\hat{\rho}_s$  и  $\hat{\rho}_a$ , построенных на функциях  $\psi_s(q)$  или  $\psi_a(q)$ . Матрица  $\hat{\rho}_s(q, q')$  имеет структуру суммы  $\psi_s(q)\psi_s^*(q')$ , а матрица  $\hat{\rho}_a(q, q')$  — структуру суммы  $\psi_a(q)\psi_a^*(q')$ . Первая симметрична относительно перестановок  $\mathcal{P}_{ik}(q)$ ,  $\mathcal{P}_{ik}(q')$ . Вторая антисимметрична относительно этих же перестановок.

В обоих случаях статистические операторы  $\hat{\rho}$  симметричны относительно перестановок частиц  $\mathcal{P}_{ik} = \mathcal{P}_{ik}(q)\mathcal{P}_{ik}(q')$ . Рассмотренные свойства симметрии статистического оператора не зависят от представления. В приведенных выше рассуждениях под переменными  $q$  можно понимать не только координаты частиц, но и любые другие переменные  $L$ , которые полностью характеризуют состояние микросистемы  $\mu$ .

При изменении статистического оператора с течением времени симметрия его сохраняется. Согласно основному уравнению движения приращение статистического оператора  $\hat{\rho}$  за время  $dt$  равно

$$d\hat{\rho} = -[\hat{H}, \hat{\rho}]dt. \quad (9.4)$$

В силу симметрии оператора  $\hat{H}$  при перестановке частиц скобка Пуассона имеет симметрию или  $\hat{\rho}_a$ , или  $\hat{\rho}_s$ . Вместе с тем  $d\hat{\rho}$  имеет симметрию  $d\hat{\rho}_a$  или  $d\hat{\rho}_s$  соответственно (см. подробнее дополнение 8).

Поэтому, если в какой-то момент времени оператор  $\hat{\rho}$  принадлежал классу симметричных  $\hat{\rho}_s$  или к классу антисимметричных  $\hat{\rho}_a$  статистических операторов, то это его свойство инвариантно при движении. Деление операторов на два класса носит абсолютный характер.

В согласии с экспериментальными данными ансамбли частиц с целым спином принадлежат к классу симметричных ансамблей, ансамбли частиц с полуцелым спином — к классу антисимметричных ансамблей<sup>1</sup>.

В соответствии с этим делением различают два типа квантовых статистических ансамблей — две статистики: статистику Бозе–Эйнштейна  $\rho_s$  и статистику Ферми–Дирака  $\rho_a$ . Для статистики Бозе–Эйнштейна

$$\mathcal{P}_{ik}(q)\hat{\rho}_s = +\rho_s, \quad \hat{\rho}_s\mathcal{P}_{ik}(q') = +\hat{\rho}_s. \quad (9.5)$$

В случае статистики Ферми–Дирака

$$\mathcal{P}_{ik}(q)\hat{\rho}_a = -\rho_s, \quad \hat{\rho}_a\mathcal{P}_{ik}(q') = -\hat{\rho}_a \quad (9.6)$$

для любой пары частиц  $(i, k)$ . Заметим, что свойства симметрии на языке оператора  $R(q, p)$ , описывающего квантовый ансамбль в фазовом пространстве  $\mathcal{R}(q, p)$ , выражаются более сложно, а именно:

$$\mathcal{P}_{ik}\hat{R}(q, p) = \pm\hat{R}(q, p) \exp [i(p_i - p_k)(x_i - x_k)/\hbar]. \quad (9.7)$$

Это справедливо при перестановке координат. При перестановке импульсов знак у фазы противоположный. При перестановке частиц  $\hat{\mathcal{R}}(q, p)$  не меняется. В предыдущих лекциях указывалось, что квантовое уравнение движения для статистического оператора  $\hat{\rho}(t)$  формально переходит в классическое при  $\hbar \rightarrow 0$  и при достаточной гладкости потенциала и начального статистического оператора  $\hat{\rho}(0)$ .

В этой связи следует подчеркнуть, что свойства симметрии не могут исчезнуть при  $\hbar \rightarrow 0$ . Симметричный или антисимметричный статистический оператор обычно будет содержать существенную особенность по  $\hbar$  как параметру. Это свойство ясно видно из формулы (9.7), когда статистический оператор дан в пространстве  $\mathcal{R}(q, p)$ .

Простым примером поясним суть дела. Пусть имеются две тождественные свободные частицы 1 и 2, имеющие координаты  $x_1$  и  $x_2$ , импульсы  $p_1$  и  $p_2$ . Несимметризованная волновая функция  $\psi$  имеет вид произведения двух волн:

$$\psi(x_1, x_2) = \exp(ip_1x_1/\hbar) \exp(ip_2x_2/\hbar). \quad (9.8)$$

Диагональный элемент соответствующего статистического оператора определяется равенством

$$\hat{\rho}(x_1, x_2; x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2)\psi^*(x_1, x_2). \quad (9.9)$$

Для симметризованных состояний

$$\psi(x_1, x_2) = \{\exp(ip_1x_1/\hbar) \exp(ip_2x_2/\hbar) \pm \exp(ip_2x_1/\hbar) \exp(ip_1x_2/\hbar)\}/\sqrt{2}. \quad (9.10)$$

<sup>1</sup> Это разделение можно теоретически обосновать в квантовой теории поля [12].



Здесь знак выбирается в зависимости от статистики, отсюда получим

$$\hat{\rho}(x_1, x_2; x_1, x_2) = 1 + \cos[(p_1 - p_2)(x_1 - x_2)/\hbar]. \quad (9.11)$$

При  $\hbar \rightarrow 0$  возникают осцилляции, частота которых неограниченно нарастает; точка  $\hbar = 0$  — существенно особая точка.

Рассмотренный здесь пример реализуется в природе при рассеянии одинаковых частиц, например протона на протоне (случай статистики Ферми–Дирака), или при рассеянии  $\alpha$ -частиц на He (случай статистики Бозе–Эйнштейна). При определенном классическом рассмотрении, когда точность измерений недостаточна, чтобы различать области фазового пространства  $\mathcal{R}(q, p)$  размером  $|(p_1 - p_2)(x_2 - x_2)| \approx \hbar$ , осциллирующий член в (9.11) становится ненаблюдаемым, но не исчезает сам по себе [11].

## Лекция 10. Энтропия и информация

В статистической термодинамике энтропия  $S$  системы определяется известной формулой Больцмана:

$$S = -k \sum_{\lambda} P_{\lambda} \ln P_{\lambda}, \quad \sum_{\lambda} P_{\lambda} = 1, \quad (10.1)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана,  $P_{\lambda}$  — вероятность возможных состояний  $\lambda$  системы. Согласно (7.4) вероятность  $P_{\lambda}$  — собственное значение статистического оператора  $\hat{\rho}$ . Поэтому формулу (10.1) можно записать в виде, инвариантном относительно выбора представления статистического оператора  $\hat{\rho}$ , а именно в виде<sup>1</sup>

$$S = -k \text{Sp}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}), \quad \text{Sp} \hat{\rho} = 1. \quad (10.2)$$

Собственное и единственное значение оператора  $\hat{\rho}$  для когерентного ансамбля есть  $P_{\lambda} = 1$ . Поэтому энтропия для когерентного ансамбля

$$S = 0. \quad (10.3)$$

Для некогерентного ансамбля, как следует из (10.1),

$$S > 0. \quad (10.4)$$

С другой стороны, когерентный и некогерентный ансамбли отличаются с кибернетической точки зрения различным содержанием информации.

Когерентный ансамбль содержит максимум информации о микросистеме  $\mu$ , совместимый с принципом дополнительности. Такой ансамбль, несмотря на наличие в нем статистической дисперсии, является максимально упорядоченным ансамблем, поэтому его энтропия равна нулю и не может быть уменьшена. Некогерентный ансамбль отбором результатов измерений можно разбить на чистые, когерентные ансамбли  $\hat{\rho}_{\lambda}$ , в каждом из которых энтропия  $S_{\lambda} = 0$ .

<sup>1</sup> Эти формулы впервые даны фон Нейманом [8].

Мерой информации  $I$  в теории информации является величина, пропорциональная разности энтропий [13]:

$$I \approx S \text{ (до измерения)} - S \text{ (после измерения)}. \quad (10.5)$$

При этом энтропию  $S$  обычно измеряют в единицах информации — в битах. Если перейти к этим единицам, то (10.5) переписывается в виде

$$I = H \text{ (до измерения)} - H \text{ (после измерения)}. \quad (10.6)$$

Величина

$$H = - \sum_{\lambda} P_{\lambda} \log_2 P_{\lambda} = S / (k \ln 2) \quad (10.7)$$

принимается за меру неопределенности информации. Если имеются только две возможности, то  $\rho_{\lambda} = 1/2$  и, следовательно,  $H = 1$  бит.

Измерения в некогерентном ансамбле, определяемом статистическим оператором  $\hat{\rho}_M$ , даны на рис. 3, а. Энтропия этого ансамбля  $S_M > 0$ . После измерений величины  $L$ , имеющей собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ , все экземпляры микросистемы  $\mu$ , имеющие  $L = \lambda_1$ , помещают в первый ящик, экземпляры, имеющие  $L = \lambda_2$  — во второй ящик и т. д. После этой операции внутри каждого ящика номера  $s$  имеется когерентный ансамбль частиц с  $L = \lambda_s$ . Энтропия этого ансамбля  $S_s = 0$ . Сумма энтропий всех этих ансамблей  $S = 0$ .

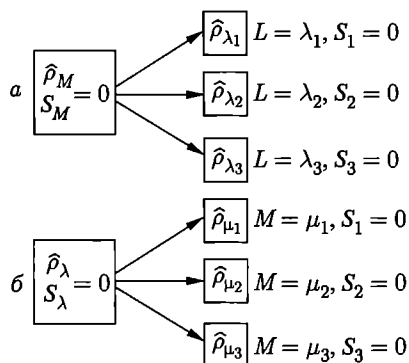


Рис. 3. Измерение в некогерентном (а) и когерентном (б) ансамблях: а — исходная энтропия  $S_M > 0$ . После измерения величины  $L$  в каждом ящике с определенным  $L = \lambda$  величина  $S_{\lambda} = 0$ . Объем информации возрос; б — исходная энтропия  $S_{\lambda} = 0$ . После измерения величины  $M$  в каждом ящике энтропия  $S_{\mu} = 0$ . Объем информации не изменился

В рассматриваемом случае  $S'$  (до измерений)  $= S_M > 0$ ,  $S$  (после измерений)  $= \sum S_s = 0$ . Информация  $I$  оказывается положительной:  $I = S / (k \ln 2) > 0$ .

Измерения в когерентном ансамбле даны на рис. 3, б. Предполагается, что ансамбль задан значением некоторой динамической переменной  $L = \lambda$ , описываемой оператором  $\hat{L}$ . Ансамбль  $S_{\lambda}$  когерентен; в этом ансамбле  $\Delta L^2 = 0$ . Мы будем интересоваться некоторой другой динамической переменной  $M$ , описываемой оператором  $\hat{M}$ , причем предполагается, что

$$[\hat{L}, \hat{M}] \neq 0. \quad (10.8)$$

В силу соотношения (6.21) в исходном ансамбле  $\Delta M^2 > 0$ . Если собственные значения оператора  $\hat{M}$  есть  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s, \dots$ , а собственные функции суть  $\varphi_{\mu}(q)$ , то волновая функция  $\psi_{\lambda}(q)$ , описывающая исходный ансамбль, — когерентная суперпозиция функций  $\varphi_{\mu}(q)$ :

$$\psi_{\lambda}(q) = \sum_{\mu} c_{\lambda}(\mu) \varphi_{\mu}(q). \quad (10.9)$$

Анализатор прибора раскладывает эту суперпозицию на пучки, каждый с определенным значением  $M = \mu_s$ . Экземпляры с определенным  $M$  собираем в соответствующие «ящики». Таким путем из одного чистого исходного ансамбля  $\hat{\rho}_\lambda$  возникло несколько чистых, когерентных ансамблей  $\hat{\rho}_{\mu_1}, \hat{\rho}_{\mu_2}, \dots, \hat{\rho}_{\mu_n}, \dots$ . Во всех этих ансамблях энтропия равна нулю. Поэтому полученная информация  $I$  в этом случае равна нулю.

Этот результат не должен казаться странным, так как во вновь возникших когерентных ансамблях  $\overline{\Delta M^2} = 0$ , но  $\overline{\Delta L^2} > 0$ . Мы получили информацию о величине  $M$ , но потеряли информацию об  $L$ . В частности, если  $L$  и  $M$  — канонически сопряженные величины, то

$$[\hat{L}, \hat{M}] = 1; \quad (10.10)$$

$$\overline{\Delta L^2} \overline{\Delta M^2} \geq \hbar^2/4. \quad (10.11)$$

Измерять изменение информации в когерентных квантовых ансамблях в терминах энтропии уже невозможно, поскольку она все время остается равной нулю. Поделим (10.11) на  $\hbar^2/4$  и введем безразмерные квадратичные дисперсии  $\overline{\Delta L^2}$  и  $\overline{\Delta M^2}$ . Беря логарифм от полученного выражения, найдем

$$(-\ln \overline{\Delta L^2}) + (-\ln \overline{\Delta M^2}) \leq 0. \quad (10.12)$$

Если каждое из слагаемых рассматривать как меру информации об  $L$  и  $M$  (соответственно) в когерентном ансамбле, то (10.12) указывает верхнюю границу для этой информации и взаимную дополняемость информации об  $L$  и  $M$ .

В заключение приведем некоторые формулы, относящиеся к квантовому ансамблю, находящемуся в равновесии с термостатом температуры  $\theta = kT$  ( $T$  — абсолютная температура). Макроскопическая обстановка  $M$  вполне определяется таким термостатом.

Это равновесный квантовый ансамбль Гиббса. Распределение в данном случае является каноническим:

$$P_\lambda \sim \exp(-E_\lambda/\theta), \quad (10.13)$$

где  $E_\lambda$  — энергия микросистемы  $\mu$  в состоянии  $\lambda$ .

Условие нормировки  $\sum_\lambda P_\lambda = 1$  приводит к выражению

$$P_\lambda = \exp\{[F(\theta) - E_\lambda]/\theta\}, \quad (10.14)$$

где  $F(\theta)$  — свободная энергия системы. Из условия нормировки на единицу имеем

$$\exp(F/\theta) = Z^{-1}(\theta); \quad Z(\theta) = \sum_\lambda \exp(-E_\lambda/\theta), \quad (10.15)$$

где  $Z(\theta)$  называется суммой состояний<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Величина  $Z(\theta)$  обычно называется статистической суммой. — Прим. ред.

Подставляя  $P_\lambda$  из (10.14), найдем из формулы (10.1) для энтропии:

$$S = -k\{F/\theta - \bar{E}/\theta\} = (\bar{E} - F)/T, \quad (10.16)$$

где  $\bar{E}$  — средняя энергия системы. Из (10.16) следует известная формула  $F = \bar{E} - TS$ . Статистический оператор для канонического ансамбля имеет матричные элементы:

$$\hat{\rho}_\theta(q, q') = \sum_\lambda \exp[(F - E_\lambda)/\theta] \psi_\lambda(q) \psi_\lambda^*(q'), \quad (10.17)$$

где  $\psi_\lambda(q)$  — собственная функция оператора энергии  $\hat{H}$ :

$$\hat{H}\psi_\lambda(q) = E_\lambda\psi_\lambda(q), \quad (10.18)$$

отсюда

$$f(\hat{H})\psi_\lambda(q) = f(E_\lambda)\psi_\lambda(q). \quad (10.19)$$

Это соотношение позволяет записать (10.17) в символическом виде

$$\hat{\rho}_\theta = \exp(F/\theta) \int \exp[-\hat{H}(q)/\theta] d\hat{\rho}_\lambda, \quad (10.20)$$

и, следовательно, величина  $\hat{R}_\theta = -\hat{\rho}_\theta \exp(-F/\theta)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \hat{R}}{\partial \beta} = \hat{H}(q)\hat{R}. \quad (10.21)$$

Здесь  $\beta = 1/\theta$ . Это уравнение замечательным образом совпадает с уравнением Шрёдингера с «мнимым» временем  $t = i\hbar\beta$ . Причем  $t = 0$  отвечает  $\beta = 0$ , т. е. бесконечно высокой температуре  $\theta$ .

## Лекция 11. Теория открытых систем и процесс измерения

Под открытой квантовой системой понимается система  $A$  с ограниченным числом степеней свободы  $f_A$ , взаимодействующая с другой системой  $B$ , имеющей неограниченное (или очень большое) число степеней свободы  $f_B$ . Координаты системы  $A$  обозначим  $x \equiv (x_1, \dots, x_{f_A})$ , а координаты системы  $B$  —  $Q \equiv (q_1, \dots, q_{f_B})$ ;  $f_B \gg 1$ . Пусть состояния системы  $A$  сосредоточены в гильбертовом пространстве  $\mathfrak{A}$ , в котором заданы ортонормированные функции  $\varphi_\alpha(x)$ . Состояния системы  $B$  сосредоточены в пространстве  $\mathfrak{B}$ , в нем заданы ортонормированные функции  $\psi_\beta(Q)$  ( $\alpha$  — динамические переменные системы  $A$ ,  $\beta$  — динамические переменные системы  $B$ ). Оператор Гамильтона всей системы  $(A + B)$  обозначим  $\hat{H}$ :

$$\hat{H} = \hat{H}_A(x) + \hat{H}_B(Q) + \hat{W}_{AB}(x, Q), \quad (11.1)$$

где  $\hat{H}_A(x)$  — гамильтониан изолированной системы  $A$ ,  $\hat{H}_B(Q)$  — гамильтониан изолированной системы  $B$ ,  $\hat{W}_{AB}(x, Q)$  — энергия взаимодействия систем

$A$  и  $B$ . Предполагается, что для  $t \leq 0$   $\widehat{W}_{AB}(x, Q) = 0$ . В момент  $t = 0$  состояние системы  $A$  характеризуется статистическим оператором  $\widehat{\rho}_A(0)$ , определенным в пространстве  $\mathfrak{A}$ , а состояние системы  $B$  — статистическим оператором  $\widehat{\rho}_B(0)$ , определенным в пространстве  $\mathfrak{B}$ .

Статистический оператор для всей системы обозначим  $\widehat{\rho}_{AB}$ , и действует он в пространстве  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ . Согласно предположению при  $t = 0$  имеем

$$\widehat{\rho}_{AB}(0) = \widehat{\rho}_A(0)\widehat{\rho}_B(0). \quad (11.2)$$

Чтобы найти оператор  $\widehat{\rho}_{AB}(t)$ , описывающий состояние взаимодействующей системы  $(A + B)$  для  $t > 0$ , необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial \widehat{\rho}_{AB}}{\partial t} + [\widehat{H}, \widehat{\rho}_{AB}] = 0 \quad (11.3)$$

с начальным условием (11.2) и гамильтонианом (11.1).

Решение уравнений подобного типа, содержащих большое число переменных (система  $B$ ), представляет собой труднейшую математическую проблему. Существенный вклад в одоление этих трудностей внесен Н. Н. Боголюбовым [14, 15].

Формальное решение уравнения (11.3) можно записать с помощью унитарного преобразования

$$\widehat{\rho}_{AB}(t) = \exp(i\widehat{H}t)\widehat{\rho}_A(0)\widehat{\rho}_B(0)\exp(-i\widehat{H}t), \quad (11.4)$$

где  $\widehat{H}$  — оператор Гамильтона (11.1). Это же решение можно представить в виде ряда Тейлора по степеням времени  $t$ :

$$\widehat{\rho}_{AB}(t) = \exp(\widehat{Z}t)\widehat{\rho}_A(0)\widehat{\rho}_B(0), \quad (11.5)$$

где  $\widehat{Z}$  — оператор взятия скобок Пуассона, т. е.  $\widehat{Z}\widehat{\rho} \equiv [\widehat{H}, \widehat{\rho}]$ . Разлагая (11.5) по степеням  $t$ , получаем ряд, коэффициенты которого суть  $n$ -кратные скобки Пуассона. Эти скобки имеют смысл  $n$ -й производной по времени от  $\widehat{\rho}$ :  $\widehat{Z}^n\widehat{\rho} = d^n\widehat{\rho}/dt^n$ . Поэтому представление (11.5) эквивалентно ряду Тейлора.

Часто интересуются не столько совместным состоянием систем  $A$  и  $B$ , сколько состоянием малой системы  $A$ . Статистический оператор  $\widehat{\rho}_A(t)$ , определяющий состояние системы  $A$ , в момент времени  $t$  при любом состоянии системы  $B$  выражается через статистический оператор  $\widehat{\rho}_{AB}(t)$  с помощью следующей формулы:

$$\widehat{\rho}_A(t) = \text{Sp}^{(B)}\widehat{\rho}_{AB}(t), \quad (11.6)$$

где след  $\text{Sp}^{(B)}$  берется только по переменным системы  $B$ , т. е. в пространстве  $\mathfrak{B}$ .

Построить точное уравнение движения только для оператора  $\widehat{\rho}_A(t)$  невозможно. Однако возможны различные приближения. Если влиянием системы  $A$  на большую систему  $B$  можно пренебречь, то  $\widehat{\rho}_B(t) = \widehat{\rho}_B(0)$ , и следовательно,  $\widehat{\rho}_{AB}(t) = \widehat{\rho}_A(t)\widehat{\rho}_B(0)$ . Подставляя это выражение для статистического оператора в уравнение (11.3) и замечая, что

$$\text{Sp}^{(B)}\widehat{\rho}_B(0) = 1, \quad \text{Sp}^{(B)}[\widehat{H}_B, \widehat{\rho}_B(0)] = 0, \quad (11.7)$$

получаем уравнение для  $\hat{\rho}_A(t)$ :

$$\frac{\partial \hat{\rho}_A(t)}{\partial t} + [\hat{H}_A, \hat{\rho}_A(t)] = 0, \quad (11.8)$$

где оператор

$$\hat{W}_A = \text{Sp}^{(B)} \hat{W}_{AB} \quad (11.9)$$

и представляет собой взаимодействие  $\hat{W}_{AB}$ , усредненное по состояниям системы  $B$ . В таком приближении система  $B$  создает некоторое внешнее поле, действующее на систему  $A$ . Нетрудно доказать, что из условия  $\hat{W}_{AB} = \hat{W}_{AB}^+$  следует эрмитовость  $\hat{W}_A = \hat{W}_A^+$  и сохранение нормировки

$$\frac{d}{dt} \text{Sp} \hat{\rho}_A = 0. \quad (11.10)$$

Возможность сведения общего уравнения (11.3) к «управляющему» уравнению (11.8) (система  $B$  управляет системой  $A$ ) представляет собой серьезное упрощение проблемы, но все же это уравнение может быть очень полезным в тех случаях, когда существенно среднее поле, создаваемое системой  $B$ <sup>1</sup>. Такое приближение можно взять также в качестве нулевого приближения с тем, чтобы позднее учесть отклонения координат системы  $B$  от их средних значений.

Возможны и такие любопытные случаи, когда систему  $B$  можно описать классической статистической механикой. В этом случае состояние системы  $B$  задается плотностью  $\rho(q, p)$  в фазовом пространстве  $\mathcal{R}(q, p)$  или в пространстве  $\mathcal{R}(q, q')$  с помощью фурье-образа  $\tilde{\rho}(q, \xi)$ ;  $\xi = q' - q$  (см. лекцию 3). По поводу теории открытых систем существует обширная литература. Помимо классических работ Н. Н. Боголюбова [14–16] приводим еще несколько [17–20].

Важным классом открытых систем являются системы, в которых малая микроскопическая система  $A$  управляет состоянием большой, макроскопической системы  $B$ . Такая ситуация осуществляется во всех приборах, предназначенных для измерений в области квантовых макроскопических явлений<sup>2</sup>; образно можно сказать, что микросистема  $\mu$  обязана в этом случае сдвинуть «стрелку» прибора, поставив ее в положение, определяемое микросистемой  $\mu$ . Ясно, что такое течение явлений возможно лишь в том случае, когда измерительный прибор (большая система  $B$ ) является макроскопически неустойчивой системой. В противном случае частица  $\mu$  (малая система  $A$ ) не сможет изменить макроскопическое состояние большой системы  $B$  из-за недостаточности у нее энергии и импульса.

Найдем условия, налагаемые на статистический оператор, описывающий процедуру измерения. Пусть малая система  $A$  — микрочастица  $\mu$ , описываемая динамическими переменными  $x = (x_1, x_2, \dots, x_f)$ , а система

<sup>1</sup> Например,  $A$  есть атом, погруженный в электронную плазму  $B$ .

<sup>2</sup> Существуют макроскопические квантовые системы, например сверхпроводники и сверхтекучие жидкости. В дальнейшем они не обсуждаются.

$B$  — макроскопически неустойчивая система, описываемая переменными  $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$  ( $N$  — большое число). Эта система и будет служить измерительным прибором. При  $t = 0$  их общий статистический оператор  $\hat{\rho}_{AB}(0)$  имеет вид (11.2), причем  $\hat{\rho}_A(0)$  и  $\hat{\rho}_B(0)$  имеют матричные элементы:

$$\hat{\rho}_A(0) = \langle x | \hat{\rho}_A | x' \rangle, \quad \hat{\rho}_B(0) = \langle Q | \hat{\rho}_B | Q' \rangle. \quad (11.11)$$

Оператор  $\hat{\rho}_B(0)$  описывает неустойчивое состояние системы  $B$  при  $t = 0$ . Оператор  $\hat{\rho}_{AB}(t)$  вычисляется из уравнения (11.3), которое в представлении взаимодействия принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \hat{\rho}_{AB}(t)}{\partial t} + [\widehat{W}_{AB}(t), \hat{\rho}_{AB}(t)] = 0. \quad (11.12)$$

Для краткости матричные элементы оператора  $\hat{\rho}_{AB}(t)$  обозначим  $\rho(x, Q | x', Q'; t)$ , где чертой отделены строки от колонок. Разложим этот оператор по собственным функциям некоторого оператора  $\hat{L}(x)$ , который представляет измеряемую величину  $L$ , имеющую собственные значения  $L_n$  и собственные функции  $\psi_n(x)$ . Тогда получим

$$\rho(x, Q | x', Q'; t) = \sum_{n,m} R_{nm}(Q | Q'; t) \psi_n(x) \psi_m^*(x'). \quad (11.13)$$

Макроскопическая система  $B$  будет служить измерительным прибором для определения величины  $L$ , присущей микрочастице  $\mu$ , если с течением времени  $t$  исчезнут интерференционные члены в (11.13), т. е. требуется, чтобы для некоторого  $t > T_1 > 0$

$$R_{nm}(Q | Q'; t) = 0, \quad n \neq m. \quad (11.14)$$

Тем самым выполняется условие, согласно которому прибор действует как спектральный анализатор, разлагая общее состояние в спектр по «пучкам»  $\psi_n(x)$ , каждый с определенным значением  $L = L_n$ . Иными словами, статистический оператор (11.13) превращается в статистический оператор, представляющий смесь состояний по признаку  $L = L_n$  для  $t > T_1$ :

$$\rho(x, Q | x', Q'; t) = \sum_n R_n(Q | Q'; t) \psi_n(x) \psi_n^*(x'). \quad (11.15)$$

Интересующая нас вероятность того или иного состояния нашей системы определяется диагональными членами этого статистического оператора. Из (11.15) видно, что эти члены

$$\rho(x, Q | x, Q; t) = \sum_n R_n(Q | Q; t) |\psi_n(x)|^2. \quad (11.16)$$

В дальнейшем с течением времени при  $t > T_2 > T_1 > 0$  наш прибор должен свести сумму (11.16) к одному члену. Допустим, что пространство  $\mathcal{R}(Q)$  переменных  $Q$  можно разбить на такие непересекающиеся области

$\Omega_n(Q) \in \mathcal{R}(Q)$ , что если  $Q \in \Omega_n$ , то при  $t > T_2$  все  $R_m(Q|Q; t) = 0$ , кроме  $R_n(Q|Q; t)$ .

Интегрируя тогда (11.16) по переменным  $Q$ , найдем для системы  $\mu$

$$\rho_m(x, t) = \int_{\mathcal{R}(Q)} \rho(x, Q|x, Q; t) dQ = P_n |\psi_n(x)|^2, \quad (11.17)$$

где

$$P_n = \int_{\Omega_n} R_n(Q|Q; t) dQ \quad (11.18)$$

— вероятность того, что измеряемая величина  $L$  равна  $L_n$  и микрочастица  $\mu$  находится в состоянии, описываемом функцией  $\psi_n(x)$ .

При этом система  $B$  сосредоточивается в некоторой области  $\Omega_n(Q)$  пространства  $\mathcal{R}(Q)$ . В силу предполагаемой макроскопичности  $B$  число переменных  $Q_s$  — большое число  $N$ . Сосредоточение их в области  $\Omega_n$  означает изменение макроскопического состояния  $B$ , которое можно выразить в макроскопических терминах, например, сосредоточение переменных  $Q$  в области  $\Omega_n$  означает изменение температуры, силы тока, цвета и т. п. Микрочастица  $\mu$  (система  $A$ ) не может вызвать таких глобальных изменений системы  $B$ , если в ней заранее не была заложена неустойчивость. Эта неустойчивость может быть электрической, термодинамической, механической и т. п.

Работа измерительного прибора при  $t > T_2$ , приводящая к исчезновению всех  $R_m(Q|Q; t)$ , кроме  $R_n(Q|Q; t)$ , т. е. все  $Q$  лежат в  $\Omega_n$ , есть вторая функция измерительного прибора — функция детектора.

Из практики эксперимента хорошо известно, что все детекторы — системы неустойчивые. Например, искровая камера неустойчива электрически; пузырьковая камера или камеры Вильсона — термодинамически. Во всех случаях детектирование состояния микрочастицы является «взрывом» макроскопической системы, инициированным микрочастицей [21]. Разделение функций измерительного прибора на функцию анализатора  $A$  и функцию детектирования  $D$  показано на рис. 4. Источник частиц  $S$  и диафрагма  $OO'$  — макроскопическая обстановка  $M$ , задающая состояние  $\hat{\rho}_M$  частиц пучка  $\mu$ . Дифракционная решетка является анализатором  $A$ .

Здесь ставится вопрос: что хотим измерять? Детекторы  $D_1, D_2 \dots$  отвечают на вопрос, в каком именно состоянии оказалась частица  $\mu$  или используем язык оптики: какого она цвета? В этом примере источник излучает «белый» свет. Статистический оператор  $\hat{\rho}_M$  описывает некогерентный ансамбль

$$\hat{\rho}_M = \sum_{\lambda} P_{\lambda} \hat{\rho}_{\lambda}. \quad (11.19)$$

Анализатор  $A$  разлагает этот некогерентный ансамбль на «чистые» ансамбли  $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots$  фазовые соотношения между различными цветами были нарушены уже в исходном ансамбле, и после анализатора пучки разного цвета остались некогерентными.



Волновую функцию системы  $\Psi(x, Q, t)$  для  $t > 0$  будем искать, исходя из уравнения Шредингера

$$i\hbar\partial\Psi/\partial t - \{\widehat{H}_A(x) + \widehat{H}_B(Q) + \widehat{W}_{AB}(x, Q)\}\Psi = 0. \quad (12.6)$$

Здесь  $\widehat{H}_A(x)$ ,  $\widehat{H}_B(Q)$  — гамильтонианы свободного движения частицы  $\mu$  и шарика  $M$ . Положим

$$\Psi(x, Q, t) = \Psi_0(x, Q) \exp[-i(E_0 + \varepsilon_k)t] + u(x, Q, t), \quad (12.7)$$

где  $u$  — рассеянная волна. Подставляя (12.7) в (12.6) и пренебрегая произведением  $\widehat{W}u$  (величиной порядка  $g^2$ ), получаем уравнение для рассеянной волны:

$$i\hbar\partial u(x, Q, t)/\partial t - \{\widehat{H}_A(x) + \widehat{H}_B(Q)\}u(x, Q, t) = \widehat{W}_{AB}(x, Q)\Psi_0(x, Q, t) \exp[-i(E_0 + \varepsilon_k)t]. \quad (12.8)$$

Эту волну будем искать в виде разложения

$$u(x, Q, t) = \int \Phi_P(Q) \exp[-iE_P t/\hbar] u_P(x, t) dP. \quad (12.9)$$

Подставляя теперь (12.9) в (12.8), умножая полученное уравнение на  $\Phi_{P'}^*(Q)$ , интегрируя по  $Q$  и пользуясь условием ортогональности

$$\int \Phi_{P'}^*(Q) \Phi_P(Q) dQ = \delta(P' - P), \quad (12.10)$$

получаем уравнение для  $u_P(x, t)$ :

$$i\hbar\partial u_P(x, t)/\partial t - \widehat{H}_A(x)u_P(x, t) = g\Phi_P^*(x)\Phi_0(x)\varphi_k(x) \exp[i(E_P - \varepsilon_k)/\hbar - i\omega_k t/\hbar]. \quad (12.11)$$

Здесь

$$\hbar\omega_k = \hbar^2 k^2 / 2\mu, \quad \widehat{H}_A(x) = -(\hbar^2 / 2\mu) d^2 / dx^2.$$

Уравнение (12.11) разрешаем с помощью функции Грина  $\mathcal{G}(x - x', t - t')$  свободного уравнения, т. е. уравнения (12.11) при  $g = 0$ :

$$u_P(x, t) = \int_0^t \mathcal{G}_\mu(x - x', t - t') dt' dx' \rho(x', t') dx' dt', \quad (12.12)$$

где согласно (12.11) источник  $\rho(x', t')$  равен

$$\rho_P(x', t') = g\Phi_P^*(x)\Phi_0(x)\varphi_k(x) \exp[i(E_P - E_0)t/\hbar - i\omega_k t]. \quad (12.13)$$

Амплитуды  $A^+$ ,  $A^-$  входят в (12.13) линейно, поэтому достаточно вместо  $\varphi_k(x)$  рассматривать функцию  $A^\pm \exp(\pm ikx)$  и соответствующие рассеянные волны  $u^\pm_P(x, t)$ .

Как известно, функция  $\mathcal{G}(x, t)$  для свободного движения частицы с массой  $\mu$  равна<sup>1</sup>

$$\mathcal{G}(x, t) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi i \hbar}} \exp(i\mu x^2/2\hbar t) \frac{1}{\sqrt{t}}. \quad (12.14)$$

Подставляя теперь  $u_P(x, t)$  в (12.9), мы видим, что в (12.9) войдет интеграл, равный

$$\mathcal{G}_M(Q - x', t - t') = \int dP \Phi_P(Q) \Phi_{P'}^*(x') \exp[iE_P(t - t')], \quad (12.15)$$

который есть не что иное, как функция Грина для свободного движения частицы  $M$  (шарика). Поэтому имеем

$$u^\pm(x, Q, t) = gA^\pm \int_0^t \mathcal{G}_\mu(x - x', t - t') \times \\ \times \mathcal{G}_M(Q - x', t - t') dx' dt' \Phi_0(x') \exp(\pm ikx') \exp[-iE_0 t'/\hbar] \quad (12.16)$$

или в раскрытом виде, полагая  $\tau = t - t'$ :

$$u^\pm(x, Q, t) = gA^\pm \exp(i\omega_0 t) \sqrt{\frac{\mu}{2\pi i \hbar}} \sqrt{\frac{M}{2\pi i \hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \times \\ \times \int_0^t \frac{d\tau}{\tau} \exp\left[i\mu \frac{(x - x')^2}{2i\hbar\tau} + iM \frac{(Q - x')^2}{2i\hbar\tau}\right] \exp(\pm ikx') \times \\ \times \Phi_0(x') \exp(-i\omega_0 \tau). \quad (12.17)$$

В этом интеграле можно выполнить интегрирование по  $dx'$  (см. дополнение 9). Тогда получим

$$u^\pm(x, Q, t) = gA^\pm \exp(i\omega_0 t) \frac{\sqrt{\mu M}}{2\pi i \hbar} \sqrt{\pi} \int_0^t \frac{d\tau}{\tau} \exp(-i\omega_0 \tau) \times \\ \times \frac{1}{A(\tau)} \exp[-B_\pm^2(\tau) + C(\tau)], \quad (12.18)$$

причем

$$A = \frac{1}{a^2} - \frac{i}{2\hbar\tau}(\mu + M), \quad B_\pm = \frac{1}{2A} \left[ \mp k + \frac{i}{\hbar\tau}(\mu x + MQ) \right],$$

<sup>1</sup> См., например, [21].

$$C = \frac{i}{2\hbar\tau}(\mu x^2 + MQ^2). \quad (12.19)$$

Если теперь использовать исходное предположение  $M \gg \mu$ , то  $\text{Re } B_{\pm}^2$  принимает вид

$$\text{Re } B_{\pm}^2 = (Q \pm v\tau)^2/a^2. \quad (12.20)$$

Здесь  $v = \hbar k/M$  — скорость шарика (см. дополнение 9).

Отсюда следует, что функция  $u^+(Q, t)$  сосредоточена в области положительных  $Q$ :  $0 < Q < vt$ , а функция  $u^-(Q, t)$  сосредоточена в области отрицательных  $Q$ :  $-vt < Q < 0$ , так что  $u^+(Q, t)u^-(Q, t) \approx 0$ . Дальнейшее движение шарика  $M$  в область  $Q > |b|$  практически будет совпадать с классическим движением падающего с «горки» шарика.

Таким образом, доказывается, что при движении шарика в области  $-b < Q < b$  уничтожается интерференция состояний, принадлежащих различным направлениям движения шарика. По достижении области  $Q > |b|$  шарик будет падать направо или налево, набирая сколь угодно большую энергию  $U_0$ . Этим восполняется детекторная функция нашего измерительного устройства: по падению шарика направо или налево мы узнаем знак импульса частицы  $\mu$ .

### Лекция 13. Термодинамически неустойчивый детектор

В этой лекции рассматривается измерительный прибор, предназначенный для определения направления спина микрочастицы  $\mu$  [21]. Предполагается, что эта частица обладает магнитным моментом  $\mu$ :

$$\mu = \mu_0 \sigma, \quad (13.1)$$

где  $\sigma$  — матрица Паули. Пучок частиц  $\mu$  будем считать неполяризованным. Поэтому исходный ансамбль — некогерентный и описывается статистическим оператором  $\rho$ , имеющим матричные элементы:

$$\hat{\rho}(x, x') = P_1 \psi_1(x) \psi_1^*(x') + P_2 \psi_2(x) \psi_2^*(x'), \quad (13.2)$$

где волновая функция  $\psi_1$  — состояние частицы  $\mu$  с проекцией спина на ось  $OZ$ , равной  $+1/2$ , а волновая функция  $\psi_2$  представляет состояние с проекцией спина на  $OZ$ , равной  $-1/2$ . Эти состояния равновероятны, так что  $P_1 = P_2 = 1/2$ .

С помощью неоднородного магнитного поля, параллельного оси  $OZ$ , пучки  $\psi_1$  и  $\psi_2$  можно разделить пространственно так, что каждый направляется в свой детектор  $D_1$  или  $D_2$  (см. рис. 5). Этим выполняется первая функция прибора — функция анализатора. Эта функция в рассматриваемом случае тривиальна, и мы ее рассматривать далее не будем, а сосредоточимся исключительно на работе детекторов. Достаточно рассмотреть один из них.

В качестве детектора рассмотрим макроскопическое собрание осцилляторов, обладающих магнитным моментом, которое находится в термодинамически неустойчивом состоянии. Магнитный момент осцилляторов  $\mathfrak{M}$  можно выразить через заряд  $e$  и механический момент  $\mathbf{M}$  согласно известной формуле  $\mathfrak{M} = e\mathbf{M}/2mc$ , где  $m$  — масса осциллятора,  $c$  — скорость света.

Энергия взаимодействия частицы  $\mu$  с одним из осцилляторов детектора будет равна

$$\widehat{W} = -\mathfrak{M} \mathbf{H}(x). \quad (13.3)$$

В этой формуле  $\mathbf{H}(x)$  — магнитное поле, действующее на осциллятор со стороны частицы  $\mu$ . Это поле выражается формулой

$$\mathbf{H}(x) = \mu/R^3 - \mathbf{R}(\mu\mathbf{R})/R^5. \quad (13.4)$$

Здесь  $R$  — расстояние от частицы  $\mu$  до осциллятора. Для нашей цели достаточно ограничиться рассмотрением двумерной задачи. Будем считать, что осцилляторы образуют в плоскости  $xu$  двумерный кристаллик размером  $a$ . Далее будем считать, что длина волны  $\lambda$  частицы  $\mu$  удовлетворяет соотношению  $\lambda \gg a$ .

Предположим, что частица поляризована в направлении оси  $OZ$ . При этих условиях скалярное произведение  $(\mu\mathbf{R})$  в (13.4) равно нулю. Условие  $\lambda/\gg a$  позволяет заменить величину  $1/R^3$  в (13.4) на ее среднее значение, так что  $1/R^3 \approx 1/a^3$ . При этих предположениях энергия взаимодействия частицы и  $s$ -го осциллятора принимает простой вид:

$$\widehat{W}_s = \pm i\hbar\omega \partial/\partial\varphi_s, \quad (13.5)$$

где частота  $\omega = (1/a^3)(e/2mc)\mu_0$ ,  $i\hbar\partial/\partial\varphi_s = \widehat{M}_{zs}$  — оператор проекции механического момента  $s$ -го осциллятора на ось  $OZ$ ,  $\varphi_s$  — полярный угол. Знаки отвечают двум возможным ориентациям спина частицы  $\mu$ . Достаточно ограничиться одной из возможностей. Невозмущенный гамильтониан системы из осцилляторов можно записать в виде

$$\widehat{H} = \sum_{s=1}^N \widehat{H}(x_s, y_s) = \sum_{s=1}^N \left\{ \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} + \frac{1}{2} x_s^2 \right) + \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_s^2} + \frac{1}{2} y_s^2 \right) \right\}. \quad (13.6)$$

Причем в этой формуле энергии и все координаты сделаны безразмерными путем выбора единицы длины  $l = \sqrt{\hbar/2m\omega_0}$ , единицы энергии  $\varepsilon = \hbar\omega_0$ ;  $\omega_0$  — частота колебаний осциллятора. На основании (13.5) энергия возмущения всей системы

$$\widehat{W} = \sum_{s=1}^N \widehat{W}_s \equiv \sum_{s=1}^N \left( \pm i\hbar\omega \frac{\partial}{\partial\varphi_s} \right). \quad (13.7)$$

Из (13.6) видно, что наши осцилляторы обладают симметрией относительно вращения около каждого из узлов решетки, поэтому

$$[\widehat{H}, \widehat{W}] = 0. \quad (13.8)$$

Предположим, что в начальный момент времени  $t = 0$ , т.е. в отсутствие частицы  $\mu$ , система осцилляторов находилась в неравновесном состоянии: колебания по оси  $OY$  были «заморожены», они имели температуру  $\theta = 0$ , а колебания по оси  $OX$  были «нагреты» до температуры  $\theta = kT > 0$ .

Будем вычислять теперь элементы матрицы плотности  $\rho(x, y|x', y')$  для одного из осцилляторов при указанных условиях. Временно будем опускать индекс  $s$  у  $x_s, y_s, x'_s, y'_s$ , так как все осцилляторы нашего плоского кристаллика находятся в равных условиях. Из определения матрицы плотности канонического ансамбля следует

$$\hat{\rho}(x, y|x', y') = \sum_{n=0}^{\infty} \exp[(F - E_n - E_0)/\theta] \psi_n(x) \psi_n^*(x') \psi_0(y) \psi_0^*(y'). \quad (13.9)$$

Здесь сумма взята по всем уровням энергии осцилляторов  $E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2)$ , колеблющимся вдоль оси  $OX$ ;  $\psi_n(x)$  — собственная функция такого линейного осциллятора, принадлежащая  $n$ -му уровню;  $E_0 = \hbar\omega_0/2$  — энергия нулевых колебаний по оси  $OY$ ;  $\psi_0(y)$  — соответствующая волновая функция. Эта функция, в указанных ранее безразмерных переменных, равна  $\psi_0(y) = \exp(-y^2/2)/\sqrt{\pi}$ ;  $F(\theta)$  — свободная энергия одного из  $N$  осцилляторов. Проблему представляет суммирование по  $n$ . Эта сумма

$$Z(x, x') = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta E_n) \psi_n(x) \psi_n^*(x'), \quad (13.10)$$

где положено  $\beta = \hbar\omega_0/\theta$ . Чтобы найти эту сумму, применим прием, описанный в лекции 10. Заменим  $\exp(-\beta E_n) \psi_n(x)$  на  $\exp[-\beta \hat{H}(x)] \psi_n(x)$  и продифференцируем сумму по  $\beta$ , тогда получим уравнение Шредингера с мнимым временем  $t = i\beta$ :

$$\partial Z(x, x')/\partial \beta + \hat{H}(x) Z(x, x') = 0. \quad (13.11)$$

В раскрытом виде это уравнение записывается так:

$$\partial Z(x, x')/\partial \beta + [-(1/2)\partial^2/\partial x^2 + x^2/2] Z(x, x') = 0.$$

Заметим, что переменная  $x'$  входит в (13.11) как параметр.

Однако ясно, что такое же уравнение можно написать, действуя в (13.10) оператором  $H(x')$  на  $\psi_n(x')$ . Поэтому в переменных  $x$  и  $x'$  функция  $Z(x, x')$  симметрична. «Начальное условие» при  $\beta = 0$ , что соответствует бесконечно большой температуре  $\theta$ , определим из естественного предположения, что при  $\theta \rightarrow \infty$  осциллятор испаряется, его движение по оси  $OX$  становится свободным. Значение суммы  $Z_0(x, x')$  для свободного движения хорошо известно:

$$Z_0(x, x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \exp[-(x - x')^2/(2\beta)]. \quad (13.12)$$

Оно совпадает с функцией Грина для свободного движения частицы [21], если в (13.12) положить  $it = \beta$  ( $m = 1$ ). В дополнении 10 показано, что решение уравнения (13.11), удовлетворяющее этому начальному условию и имеющее необходимую симметрию, как можно убедиться прямой подстановкой в (13.11), имеет вид

$$Z(x|x') = \exp[-A - (Bx^2 - 2Cxx' + Bx'^2)/2]/\sqrt{\pi}. \quad (13.13)$$

Причем коэффициенты  $A, B, C$  оказываются равными:

$$B = \text{cth } \beta, \quad C = 1/\text{sh } \beta, \quad A = \ln(\text{sh } \beta)/2 + \ln 2/2. \quad (13.14)$$

Учитывая множитель  $\exp(-E_0/\Theta)\psi_0(y)\psi_0(y')$  в (13.9), получаем окончательно

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}(x, y|x', y') = & \frac{\exp[\beta F - (A + \beta/2)]}{\pi} \times \\ & \times \exp\left[-\frac{1}{2}(Bx^2 - 2Cxx' + Bx'^2)\right] \exp\left[-\frac{1}{2}(y^2 + y'^2)\right]. \end{aligned} \quad (13.15)$$

Оставшаяся неопределенной свободная энергия  $F$  находится из условия нормировки  $\text{Sp } \widehat{\rho} = 1$ . В раскрытом виде это условие гласит

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\rho}(x, y|x, y) dx dy = 1. \quad (13.16)$$

Полагая  $B - C = a^2 = \text{th } (\beta/2)$  и вводя для удобства  $b^2 = 1$ , получаем из (13.15) и (13.16)

$$\exp[\beta F - (A + \beta/2)] \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(a^2 x^2 + b^2 y^2)] dx dy = 1, \quad (13.17)$$

откуда  $\exp[\beta F - (A + \beta/2)] = ab$ , так что

$$\beta F = \beta/2 + \ln[2\text{sh } (\beta/2)]. \quad (13.18)$$

Таким образом, окончательно матричный элемент  $\widehat{\rho}(x, y|x', y')$  принимает простой вид:

$$\widehat{\rho}(x, y|x', y') = (ab/\pi) \exp[-(Bx^2 - 2Cxx' + Bx'^2)/2 - (y^2 + y'^2)/2]. \quad (13.19)$$

Обратимся теперь к вычислению матрицы плотности для  $t > 0$ . В момент  $t = 0$  в кристаллик влетает частица  $\mu$  и, взаимодействуя с осцилляторами, изменяет их состояние. Характер возмущения описан выше. В силу того, что оператор возмущения (13.7) коммутирует с исходным гамильтонианом  $H$  (см. (13.8)), оператор  $\widehat{W}$  (13.7) имеет одинаковый вид в шредингеровском представлении и в представлении взаимодействия. Поэтому в последнем представлении уравнение движения для матрицы плотности  $\rho$  записывается так:

$$\frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial t} + [\widehat{\rho}, \widehat{W}] = 0. \quad (13.20)$$

Имея в виду (13.7), нетрудно показать, что в координатном представлении это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(\dots x_s \dots y_s \dots | x'_s \dots y'_s \dots; t) \pm \\ \pm \omega \sum_{s=1}^N \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi_s} \hat{\rho}(\dots x_s \dots y_s \dots | x'_s \dots y'_s \dots; t) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \varphi'_s} \hat{\rho}(\dots x_s \dots y_s \dots | x'_s \dots y'_s \dots; t) \right] = 0, \quad (13.21) \end{aligned}$$

где знаки  $\pm$  соответствуют двум возможным проекциям спина частицы  $\mu$  на ось  $OZ$ . То, что обе производные  $\partial/\partial\varphi_s$  и  $\partial/\partial\varphi'_s$  входят в уравнение (13.20) с одним знаком, следует из того, что в скобке Пуассона (13.20) оператор  $\partial/\partial\varphi'_s$  действует на  $\rho$  справа налево. Интегрированием по частям он переносится налево и при этом меняет свой знак. Уравнение (13.21) есть уравнение в частных производных, но очень простое. Общее решение этого уравнения, удовлетворяющее избранному при  $t=0$  начальному значению  $\rho(\dots x_s \dots y_s \dots | \dots x'_s \dots y'_s \dots; 0)$ , получается простой заменой углов  $\varphi_s$  и  $\varphi'_s$  на  $\varphi_s + \omega t$  и  $\varphi'_s + \omega t$  соответственно. Поэтому

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(\dots x_s \dots y_s \dots | \dots x'_s \dots y'_s \dots; t) = \\ = \hat{\rho}(\dots x_s(t) \dots y_s(t) \dots | \dots x'_s(t) \dots y'_s(t) \dots; 0). \quad (13.22) \end{aligned}$$

В полярной системе координат при  $t=0$  имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} x_s = r_s \cos \varphi_s, \quad y_s = r_s \sin \varphi_s; \\ x'_s = r'_s \cos \varphi'_s, \quad y'_s = r'_s \sin \varphi'_s. \end{aligned} \quad (13.23)$$

Как пояснено выше, в этих формулах следует заменить  $\varphi_s$  на  $\varphi_s + \omega t$  и  $\varphi'_s$  на  $\varphi'_s + \omega t$  и подставить в (13.22). Заметим, что радиусы  $r_s$  и  $r'_s$  выступают как параметры. Из этого обстоятельства следует, что под воздействием возмущения, вызванного частицей  $\mu$ , осцилляторы кристаллика, не деформируясь, прецессируют с частотой  $\omega$ :

$$\begin{aligned} x_s(t) = r_s \cos(\varphi_s + \omega t), \quad y_s(t) = r_s \sin(\varphi_s + \omega t), \\ x'_s(t) = r'_s \cos(\varphi'_s + \omega t), \quad y'_s(t) = r'_s \sin(\varphi'_s + \omega t). \end{aligned} \quad (13.24)$$

Далее нас будут интересовать лишь диагональные члены оператора  $\hat{\rho}$ . Пользуясь (13.24), на основании (13.22) получим из (13.19)

$$\hat{\rho}(x_s, y_s | x_s, y_s; t) = (ab/\pi) \exp[-a^2 x_s^2(t) - b^2 y_s^2(t)], \quad (13.25)$$

где  $x(t)$  и  $y(t)$  даются формулой (13.24).

Формула (13.25) справедлива для всех осцилляторов независимо от их положения в кристаллике. Поэтому в (13.25) индекс  $s$  можно опустить. Вычисляя с помощью (13.25) среднее значение величин  $x^2/2$  и  $y^2/2$ , имеем

$$\left\langle \frac{1}{2}x^2 \right\rangle = \frac{ab}{\pi} \int \exp[-a^2x^2(t) - b^2y^2(t)] \frac{1}{2}x^2 dx dy, \quad (13.26)$$

$$\left\langle \frac{1}{2}y^2 \right\rangle = \frac{ab}{\pi} \int \exp[-a^2x^2(t) - b^2y^2(t)] \frac{1}{2}y^2 dx dy. \quad (13.27)$$

Для этого заметим, что

$$a^2x^2(t) + b^2y^2(t) = r^2(a^2 + b^2)/2 + [r^2(a^2 - b^2) \cos \psi]/2 = Z(M + N \cos \psi), \quad (13.28)$$

где  $Z = r^2/2$ ;  $\psi = 2(\omega t + \varphi)$ ;  $M = a^2 + b^2$ ;  $N = a^2 - b^2 > 0$ ;  $N/M = \varepsilon$ . Далее,

$$x^2(t)/2 = Z[1 + (\cos \psi \cos 2\omega t + \sin \psi \sin 2\omega t)]/2, \quad (13.29)$$

$$y^2(t)/2 = Z[1 - (\cos \psi \cos 2\omega t + \sin \psi \sin 2\omega t)]/2. \quad (13.30)$$

Переходя в (13.26) и (13.27) к полярной системе координат и подставляя (13.29), (13.30), получаем (см. дополнение 11):

$$\langle x^2/2 \rangle = (1/8)(1/a^2 + 1/b^2) + (1/8)(1/a^2 - 1/b^2) \cos 2\omega t, \quad (13.31)$$

$$\langle y^2/2 \rangle = (1/8)(1/a^2 + 1/b^2) + (1/8)(1/a^2 - 1/b^2) \cos 2\omega t. \quad (13.32)$$

Следовательно, эти величины осциллируют с частотой  $2\omega$ . Средняя потенциальная энергия  $\langle U \rangle = \langle x^2 \rangle/2 + \langle y^2 \rangle/2$ , а вместе с тем и полная энергия всей системы остаются, конечно, постоянными. Частица  $\mu$  меняет только распределение энергии между степенями свободы.

Напомним, что при относительно высокой температуре  $\theta$  ( $\beta \rightarrow 0$ ) величина  $a^2 = \beta/2$ , а  $b^2 = 1$ . Поэтому до взаимодействия с частицей  $\psi$  при  $t \leq 0$  мы имели:

$$\langle x^2/2 \rangle_0 = 1/4a^2 = 1/2\beta = \theta/2\hbar\omega_0 \gg 1, \quad (13.33)$$

$$\langle y^2/2 \rangle_0 = 1/4b^2 = 1/4. \quad (13.34)$$

После взаимодействия при  $t > 0$  получим

$$\langle x^2/2 \rangle_t = (\theta/2)/2\hbar\omega_0 + 1/8 + \text{осц. член}, \quad (13.35)$$

$$\langle y^2/2 \rangle_t = (\theta/2)/2\hbar\omega_0 + 1/8 + \text{осц. член}. \quad (13.36)$$

Таким образом, при  $t \gg 2\pi/\omega$  энергия перераспределяется по обеим степеням свободы, а температура кристаллика  $\theta$  падает вдвое:  $\theta' = \theta/2$ . Это утверждение сделано в предположении, что макроскопический термометр не успевает следить за поведением осциллирующих членов, среднее значение которых равно нулю.



В заключение вычислим изменение энтропии. Энтропия определяется формулой

$$S = -k \operatorname{Sp} \overline{(\hat{\rho} \ln \hat{\rho})} \quad (13.37)$$

(черта сверху указывает на усреднение по времени). Из (13.25) имеем

$$\hat{\rho} \ln \hat{\rho} = \hat{\rho} \{ \ln(ab/\pi) - a^2 x^2(t) - b^2 y^2(t) \}. \quad (13.38)$$

Поэтому

$$-\operatorname{Sp} \overline{(\hat{\rho} \ln \hat{\rho})} = 2a^2 \overline{\langle x^2(t)/2 \rangle} + 2b^2 \overline{\langle y^2(t)/2 \rangle} - \ln(ab/\pi). \quad (13.39)$$

Пользуясь (13.35) и (13.36), найдем из (13.39) для изменения энтропии:

$$\begin{aligned} \Delta S &= -k[\operatorname{Sp}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho})_t - \operatorname{Sp}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho})_0] = \\ &= 1/4a^2 + \dots = (k/2)\theta/\hbar\omega_0 + \dots > 0. \end{aligned} \quad (13.40)$$

Итак, частица  $\mu$  восстановила равновесие в кристаллике. При этом общая температура стала равной  $\theta/2$ , а энтропия возросла на величину  $k(\theta/2)/\hbar\omega_0$ . Сравним эту энтропию с энтропией исходного некогерентного ансамбля, описываемого статистическим оператором (13.2). Его энтропия

$$S_0 = -k(P_1 \ln P_1 + P_2 \ln P_2) = -k2 \ln(1/2)/2 = k \ln 2 > 0.$$

После разделения пучка имеем два пучка, каждый из которых принадлежит когерентному ансамблю  $\hat{\rho}_1 = \hat{\psi}_1(x)\hat{\psi}_1(x')$  и  $\hat{\rho}_2 = \hat{\psi}_2(x)\hat{\psi}_2(x')$  соответственно. Их энтропия  $S_1 = S_2 = 0$ . Таким образом, анализатор уменьшил энтропию на величину  $S_1 - S_0 = k \ln 2$  и вместе с этим увеличил нашу информацию на  $I = \ln 2$ . Получение этой информации сопровождалось ростом энтропии детектора на (13.40), которая много больше  $k \ln 2$ . Это положение носит совершенно общий характер, и рассмотренный пример является иллюстрацией необходимости расплачиваться за приобретенную информацию увеличением энтропии.

## Лекция 14. Детектор с цепной реакцией

Рассмотрим последствия взаимодействия микрочастицы  $\mu$ , влетающей в неустойчивую макроскопическую систему, способную к размножению частиц, с этой системой. Такой системой может являться газ или жидкость, на которые наложено внешнее электрическое поле достаточно высокого напряжения. Это поле и является причиной неустойчивости рассматриваемой системы. Влетающая в такую систему электрически заряженная частица, например электрон, вызовет ионизацию атомов и молекул этой среды, что поведет к появлению нового электрона. Ускоряясь в приложенном поле, этот новый электрон способен ионизацией освободить еще один электрон и т. п. В результате возникает макроскопическое явление — электрическая искра.

Другим примером может служить попадание нейтрона в среду, которая образована атомами, способными делиться с испусканием новых нейтронов.

В этом случае может возникнуть цепная реакция, которая инициирована нейтроном, вторгшимся в делящееся вещество.

Явления, разыгрывающиеся в приведенных примерах, весьма сложны. В дальнейшем рассмотрим очень упрощенную модель подобных явлений, ограничивая к тому же анализ этих явлений изучением лишь одной стороны дела — возникновением необратимых явлений в макроскопической системе под воздействием одной микрочастицы.

В качестве такой модели изучим среду, в которой возможны только два процесса, обратные друг другу, которые можно записать в следующем виде:

$$n'_1 + n'_2 + B \rightleftharpoons n_1 + A; \quad A = (B + n_2). \quad (14.1)$$

Частицы  $n_1$ ,  $n_2$  и  $n'_1$ ,  $n'_2$  можно рассматривать как электроны; частицу  $B$  — как ион  $A^+$  и частицы  $A$  — как атом. Процесс, читаемый справа налево, — процесс ионизации атома  $A$ , процесс, читаемый слева направо, — процесс рекомбинации иона  $B = A^+$  с электроном. Частицы  $n$  можно считать нейтронами. Тогда процесс  $n'_1 + A \rightarrow n_1 + n_2 + B$  можно рассматривать как простейший случай деления, происходящий с образованием одного нового нейтрона и «осколка»  $B$ . Обратный процесс — процесс «синтеза» ядра  $A$  из ядра  $B$  (захват нейтрона).

Для необратимости процессов, возникающих под действием залетевшей извне частицы, определяющим является то обстоятельство, что процесс «деления»  $n'_1 + A \rightarrow n_1 + n_2 + B$  возникает в результате столкновения двух частиц  $n$  и  $A$ , обратный процесс, процесс синтеза, — результат тройного столкновения частиц  $n_1$ ,  $n_2$  и  $B$ .

Теория тройных столкновений не очень популярна. Поэтому далее изложим эту теорию, основываясь на простой модели. Существенные для нашей проблемы выводы не будут зависеть от этих упрощений. Предположим, что гамильтониан нашей системы частиц имеет вид:

$$\hat{H}(x_1, x_2, x_3) = \hat{H}_n(x_1 - x_3) + \hat{H}_n(x_2 - x_3) + \hat{H}_A(x_3) + W(x_1 - x_2), \quad (14.2)$$

где  $\hat{H}_n(x) = p^2/2m + U(x)$ ,  $\hat{H}_A(x) = p^2/2M$ . Здесь  $x_1, x_2$  — координаты электронов (или нейтронов),  $m$  — их масса,  $x_3$  — координата иона (или ядра атома),  $M$  — его масса ( $M \gg m$ ),  $U$  — энергия взаимодействия электрона с ионом  $B$  (или нейтрона с осколком  $B$ ),  $W(x_1 - x_2)$  — энергия взаимодействия электронов (или нейтронов).

Рассмотрим переход  $n'_1 + n'_2 + B \rightarrow n_1 + A$ . Импульсы участвующих в нем частиц положим равными  $p'_1, p'_2, p'_3, p_1, p_3$  соответственно. Этот процесс описывается диаграммой, изображенной на рис. 8. Волновую функцию начального состояния для процесса  $a$  представим в виде

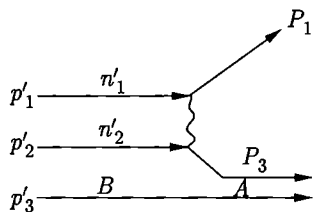


Рис. 8. Диаграмма синтеза, или захвата. Процесс  $n'_1 + n'_2 + B \rightarrow n_1 + A$

$$\psi_{p'_1 p'_2 p'_3}(x_1, x_2, x_3) = \varphi_{p'_1}(x_1 - x_3) \varphi_{p'_2}(x_2 - x_3) \psi_{p'_3}(x_3). \quad (14.3)$$

Волновую функцию связанного состояния  $A$  обозначим  $\varphi_A(x_2 - x_3)$ . Функция непрерывного спектра  $\varphi_p(x)$  имеет вид

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{V^{1/2}} [\exp(ipx) + u_p(x)], \quad (14.4)$$

где  $u_p(x)$  — рассеянная волна. Эти функции нормированы на единицу в объеме  $V$  ( $V$  — объем нашей системы) и ортогональны, так что

$$\langle \varphi_{p_1}(x), \varphi_{p_2}^*(x) \rangle = \delta_{p_1 p_2}. \quad (14.5)$$

Волновая функция, описывающая конечное состояние

$$\psi_{p_1 A p_3}(x_1, x_2, x_3) = \varphi_{p_1}(x_1 - x_3) \varphi_A(x_2 - x_3) \psi_{p_3}(x_3). \quad (14.6)$$

Если ввести обозначения  $\bar{x}_1 = x_1 - x_3$ ,  $\bar{x}_2 = x_2 - x_3$ , то матричный элемент энергии возмущения  $W$  для рассматриваемого квантового перехода принимает вид

$$\langle p'_1, p'_2, p'_3 | W | p_1, A, p_3 \rangle = \delta_{p'_3 p_3} \int d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 W(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \varphi_{p'_1}(\bar{x}) \varphi_{p'_1}^*(\bar{x}_1) \varphi_{p'_2}(\bar{x}_2) \varphi_A(\bar{x}_2), \quad (14.7)$$

где  $\bar{x}_1 = x_1 - x_3$ ,  $\bar{x} = x_2 - x_3$ . Вводя переменные  $x = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ ,  $y = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$  получим

$$\langle p'_1, p'_2, p'_3 | W | p_1, A, p_3 \rangle = \delta_{p'_3 p_3} \frac{1}{V^{3/2}} \widetilde{W}(q) \widetilde{\varphi}(p'_2 - q). \quad (14.8)$$

Здесь  $\widetilde{W}$  и  $\widetilde{\varphi}$  — компоненты Фурье от  $W(x)$  и  $\varphi(x)$  соответственно;  $q = p_1 - p'_1$  — передача импульса от частицы  $n_1$  к частице  $n_2$ . Произведение  $\widetilde{W}(q) \widetilde{\varphi}(p'_2 - q)$  обозначим сокращенно  $f(q, p'_2)$ . Существенно, что амплитуда  $f(q, p'_2)$  не зависит от объема  $V$ , в котором разыгрывается изучаемый процесс.

Вероятность перехода, который приведен на рис. 8, рассчитана на 1 с и равна

$$P(p'_1 p'_2 p'_3 | p_1 A p_3) = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(\Delta E) \delta_{p'_3 p_3} \frac{1}{V^3} |f(q, p'_2)|^2, \quad (14.9)$$

причем

$$\Delta E = E'_1 + E'_2 + E'_3 - E_1 - \varepsilon_A - E_3. \quad (14.10)$$

Умножим теперь эту вероятность на число частиц  $dN(p'_1)$  в малом интервале в окрестности импульса  $p'_1$ , далее — на  $dN(p'_2)$ , число тех же частиц в окрестности импульса  $p'_2$ , а также на число  $N_B$  частиц  $B$  и на число состояний в окрестности импульса  $p_1$   $V d\Omega(p_1)$ . Тогда получим дифференциальную скорость реакции  $I$ , рассчитанную на 1 см<sup>3</sup>:

$$dR_1 = \frac{2\pi}{\hbar} |f(q, p'_2)|^2 \delta(\Delta E) dn(p'_1) dn(p'_2) n_B d\Omega(p_1), \quad (14.11)$$

где  $n_1, n_2, n_B$  — плотности частиц.

Вычислим теперь скорость прямого процесса  $A + n_1 \rightarrow B + n'_1 + n'_2$  (процесса ионизации, или «деления»), описываемого диаграммой рис. 9. Сечение для этого процесса

$$d\sigma = \frac{2\pi}{\hbar} |f(q, p'_2)|^2 \delta(\Delta E) \frac{1}{V^3} V d\Omega(p'_1) V d\Omega(p'_2) \frac{v(p_1)}{V}, \quad (14.12)$$

где  $v(p_1)$  — скорость частицы  $n_1$ . Умножая это сечение на поток частиц  $v(p_1)/V$ , на полное число атомов  $A - N_A$  и на число падающих электронов (нейтронов)  $dn(p_1)$ , получим для скорости этой реакции

$$dR_{II} = \frac{2\pi}{\hbar} |f(q, p'_2)|^2 \delta(\Delta E) d\Omega(p'_1) d\Omega(p'_2) dn(p_1) n_A. \quad (14.13)$$

Заметим, что  $d\Omega(p) = d^3p/(2\pi\hbar)^3$ .

Допустим теперь, что электронный газ (или газ нейтронов) имеет максвелловское распределение для температуры  $\theta = kT$ . Тогда

$$dn(p, \theta) = n \exp(-p^2/p_\theta^2) d\Omega(\theta, p), \quad (14.14)$$

где  $n$  — полная плотность частиц;  $p_\theta^2 = 2m\theta$ ,  $d\Omega(\theta, p) = N(p_\theta) d\Omega(p)$ ,  $N(p_\theta) = 1/\pi^{3/2} \lambda_\theta^3$ ,  $\lambda_\theta = 2\pi\hbar/p_\theta$  — длина волны частицы с импульсом  $p_\theta$ . Учитывая это распределение, получим для полных скоростей реакций

$$R_I = \frac{2\pi}{\hbar} n^2 n_B \int |f|^2 \delta(\Delta E) N_\theta^2 \exp[-(p_1'^2 + p_2'^2)/p_\theta^2] d\Omega(p'_1) d\Omega(p'_2) d\Omega(p_1), \quad (14.15)$$

$$R_{II} = \frac{2\pi}{\hbar} n n_A \int |f|^2 \delta(\Delta E) N_\theta \exp[-(p_1^2/p_\theta^2)] d\Omega(p_1) d\Omega(p'_1) d\Omega(p'_2). \quad (14.16)$$

В силу равенства  $p_1^2/2m + \varepsilon_A = (p_2'^2 + p_2'^2)/2m$  условие равновесия  $R_I = R_{II}$  приводит к соотношению

$$n n_A = n^2 n_B \exp(-\varepsilon_A/\theta). \quad (14.17)$$

В этой формуле  $n$  — плотность электронов (или нейтронов),  $n_A$  — плотность атомов (ядер)  $A$ ,  $n_B$  — плотность ионов (или «осколков»)  $B$ . Из сравнения формул (14.15) и (14.16) следует, что скорость реакции I — реакции рекомбинации (или «синтеза») пропорциональна  $n^2 n_B$ , а скорость реакции II — реакции ионизации (или «деления») пропорциональна  $n n_A$ . В самом начале процесса, когда в среду влетает лишь один электрон (или один нейтрон), скорость реакции I пропорциональна  $n_B/V^2$ , а скорость прямой реакции ионизации (или «деления») —  $n_A/V$ , причем  $n_B \ll n_A$ .

С учетом этих соотношений реакция в рассматриваемом случае будет идти односторонне, нарастая лавинообразно. Равновесное соотношение (14.17), которое характерно для всей системы, помещенной в термостат с температурой  $\theta$ , будет недостижимо из-за утечки частиц из конечной системы. Таким образом, одна микрочастица, попавшая в неустойчивую среду, может вызвать необратимый процесс, носящий характер взрыва или искры.

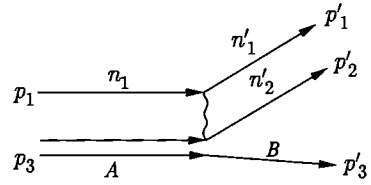


Рис. 9. Диаграмма «деления», или ионизации. Процесс  $n_1 + A \rightarrow B + n'_1 + n'_2$

## Лекция 15. Работа фотопластинки или пузырьковой камеры

Рассмотрим два атома  $A$  и  $B$ , погруженных в некоторую среду или даже укрепленных в ней. Это обстоятельство отражает макроскопический характер изучаемого измерительного устройства. Ради упрощения расчетов не будем рассматривать движение самих атомов; ограничимся предположением, что координаты их центров тяжести  $Q_A$  и  $Q_B$  сосредоточены около  $Q_1 \pm \Delta Q_1$  и  $Q_2 \pm \Delta Q_2$  соответственно. Размеры областей  $\Delta Q_1$ ,  $\Delta Q_2 \ll |Q_A - Q_B|$ . Пусть координата электрона атома  $A$  будет  $y_1$ , координата электрона в атоме  $B$  —  $y_2$ , координату электрона, влетающего в среду, обозначим  $x$ .

Прибор предназначен для измерения положения влетающего в среду электрона. Гамильтониан нашей системы (атомы  $A$ ,  $B$  и три электрона) имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}^0(x) + \hat{H}^0(y_1 - Q_1) + \hat{H}^0(y_2 - Q_2) + W(x - y_1) + W(x - y_2) \quad (15.1)$$

(взаимодействие атомных электронов рассматривать не нужно). Волновая функция системы при  $t \leq 0$  до начала взаимодействия есть

$$\psi_0(x, y_1, y_2) = \exp(ikx)\varphi_0(y_1 - Q_1)\varphi_0(y_2 - Q_2), \quad (15.2)$$

где  $k$  — импульс налетающего электрона,  $\varphi_0$  — волновая функция электрона, находящегося в атоме  $A$  или  $B$ . Волновую функцию для  $t \rightarrow \infty$  обозначим

$$\psi(x, y_1, y_2) = \psi_0(x, y_1, y_2) + u(x, y_1, y_2), \quad (15.3)$$

где  $u(x, y_1, y_2)$  — волна, возникающая в результате взаимодействия. Разложим ее по собственным функциям связанных состояний в атоме  $\varphi_n(y - Q)$  (непрерывный спектр не будем рассматривать):

$$u(x, y_1, y_2) = \sum_{n,m} \varphi_n(y_1 - Q_1)\varphi_m(y_2 - Q_2)u_{nm}(x). \quad (15.4)$$

Исходя из гамильтониана (15.1), обычными методами получаем уравнение для рассеянной волны:

$$\nabla^2 u_{nm}(x) + k_{nm}^2 u_{nm}(x) = (2m/\hbar^2)[W_{n0}(x - Q_1) + W_{m0}(x - Q_2)] \exp(ikx), \quad (15.5)$$

где

$$W_{n0}(x - Q_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(y_1 - Q_1)W(x - y_1)\varphi_0(y_1 - Q_1)dy_1, \quad (15.6)$$

и тот же смысл имеет величина  $W_{m0}(x - Q_2)$  для атома  $B$ ;  $k_{nm}^2 = (2m/\hbar^2) \times (k^2 - \varepsilon_n - \varepsilon_m)$ ;  $\varepsilon_n$  и  $\varepsilon_m$  — энергия возбуждения  $n$ -го и  $m$ -го уровней атомов  $A$  и  $B$ .

Из (15.5) методом функции Грина получим

$$\begin{aligned}
 u_{nm}(x) = & -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \int \frac{\exp[i\mathbf{k}_{nm}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')]}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}') \times \\
 & \times [W_{n0}(x' - Q_1) + W_{m0}(x' - Q_2)] d^3x' = \\
 = & \exp(i\mathbf{k}\mathbf{Q}_1) f_n(k, x - Q_1) + \exp(i\mathbf{k}\mathbf{Q}_2) f_m(k, x - Q_2). \quad (15.7)
 \end{aligned}$$

Первая из этих волн описывает рассеяние на атоме  $A$  и возможное его возбуждение (если  $n \neq 0$ ), при этом атом  $B$  не участвует в процессе. Вторая волна описывает такое же рассеяние на атоме  $B$ . Первая из этих волн сосредоточена около  $x = Q_1$ , вторая — около  $x = Q_2$ . Из-за большого предполагаемого расстояния  $|Q_1 - Q_2| \gg a$  ( $a$  — размер атома) произведение  $f_n f_m^*$  мало. Далее следует отметить, что сами положения атомов  $A$  и  $B$  случайны в пределах  $\Delta Q_1$  и  $\Delta Q_2$ , поэтому случайны и фазы  $(\mathbf{k}\mathbf{Q}_1)$  и  $(\mathbf{k}\mathbf{Q}_2)$ , следовательно,  $f_n f_m^* \approx 0$ .

Таким образом, рассмотренное устройство нарушает интерференцию состояний с различными возможными положениями электрона (около  $Q_1$  или около  $Q_2$ ) и, следовательно, служит анализатором состояния электрона  $x$  по «спектру» его координат  $-\infty < x < +\infty$ .

Возбужденный атом, скажем  $A$ , может передать свою энергию возбуждения соседним с ним атомам среды, что поведет к нагреванию окрестности  $A$ , в частности, к локальному вскипанию жидкости в пузырьковой камере. Подобное же возбуждение для фотопластинки послужит инициатором цепных химических реакций в чувствительном зерне фотоэмульсии. В обоих случаях возникают необратимые процессы, которые выполняют роль детектора.

## Лекция 16. Заключение

Построение квантовой механики на основе статистического оператора  $\hat{\rho}$  объединяет идеологию квантовой механики с идеологией классической статистической механики, в частности с ансамблем Гиббса. Описание с помощью волновой функции становится характерным для специального случая — когерентного ансамбля.

Во всех случаях волновая функция  $\psi$  или оператор  $\hat{\rho}$  не являются величинами, принадлежащими одному экземпляру микрочастицы (или общее, одному экземпляру квантовой системы). Напротив,  $\psi_M$  или  $\rho_M$  указывают на то, какому квантовому ансамблю, определяемому макроскопической обстановкой  $M$ , принадлежит изучаемый экземпляр квантовой системы.

Такое понимание квантовой механики на основе квантового ансамбля позволяет избежать парадоксов, характерных для обычного понимания квантовой механики на основе субъективной трактовки  $\psi$ -функции. Квантовые ансамбли позволяют сделать теорию измерений предметом математического расчета.

Если в тридцатых годах всех заботило влияние прибора на состояние частицы, то теперь пора возвратиться к более традиционной постановке вопросов — о влиянии микрообъекта на состояния макросистемы. Это не только теория измерений, это теория порождения макроявлений микроявлением. Она может оказаться значительной и для эволюционной биологии...

# ДОПОЛНЕНИЯ

## 1. Вычисление средних в пространстве $\mathcal{R}(q, q')$

Формула (3.10) для среднего  $\bar{L}$  величины  $L$  получается на основании (3.1) и (3.2) из общей формулы

$$\bar{L} = \int \rho(q, p) L(q, p) \frac{dq dp}{2\pi\hbar} \quad (\text{Д.1})$$

при условии нормировки

$$\int \rho(q, p) dq dp = 1 \quad (\text{Д.2})$$

следующим образом. Подставим в (Д.1) выражения

$$\rho(q, p) = \int \rho(q, \xi) \exp(i p \xi / \hbar) d\xi, \quad (\text{Д.3})$$

$$L(q, p) = \int L^*(q, \xi) \exp(-i p \xi' / \hbar) d\xi'. \quad (\text{Д.4})$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{L}(q, p) &= \int d\xi d\xi' \exp\left(\frac{i p \xi'}{\hbar} - \frac{i p \xi}{\hbar}\right) L^*(q, \xi') \rho(q, \xi) \frac{dq dp}{2\pi\hbar} = \\ &= \int d\xi dq d\xi' \delta(\xi' - \xi) L^*(q, \xi') \rho(q, \xi) = \int d\xi dq L^*(q, \xi) \rho(q, \xi). \end{aligned} \quad (\text{Д.5})$$

Заменяя обозначения  $\rho(q, \xi) \equiv \rho(q, q')$ ,  $L^*(q, \xi) \equiv L^*(q, q')$ , получаем результат

$$\bar{L} = \overline{L(q, p)} = \int \rho(q, q') L^*(q, q') dq dq', \quad (\text{Д.6})$$

приведенный в (3.10). С помощью такого же рода преобразований из уравнений (3.14) получается уравнение (3.15).

## 2. Операторы $\hat{p}$ и $\hat{q}$

Рассмотрим некоторую функцию  $\psi(q)$  и применим к ней сперва оператор  $\hat{q}$ , а затем  $\hat{p}$ , представляющий импульс, сопряженный координате  $q$ . Имеем

$$\hat{q}\psi(q) = \int q \delta(q - q'') \psi(q'') dq'' = q\psi(q) \equiv F(q). \quad (\text{Д.7})$$

Далее

$$\begin{aligned} \hat{p}\hat{q}\psi(q) &= \hat{p}F = \int i\hbar \frac{\partial \delta(q'' - q)}{\partial q''} F(q'') dq'' = \\ &= -i\hbar \frac{\partial F(q)}{\partial q} = -i\hbar \left( \psi(q) + q \frac{\partial \psi}{\partial q} \right). \end{aligned} \quad (\text{Д.8})$$

Выполняя операции в обратном порядке, найдем

$$\widehat{q}\widehat{p}\psi(q) = -i\hbar q\partial\psi(q)/\partial q. \quad (\text{Д.9})$$

Поэтому

$$(\widehat{p}\widehat{q} - \widehat{q}\widehat{p})\psi(q) = -i\hbar\psi(q). \quad (\text{Д.10})$$

Следовательно,

$$[\widehat{p}, \widehat{q}]\psi = \psi. \quad (\text{Д.11})$$

Ввиду произвольности функции  $\psi(q)$  из (Д.11) получаем

$$[p, q] = 1. \quad (\text{Д.12})$$

В координатном представлении имеем

$$\widehat{I} \equiv \delta(q - q'). \quad (\text{Д.13})$$

Нетрудно доказать, что если  $\widehat{p}$  и  $\widehat{q}$  относятся к разным степеням свободы, то в (Д.12) вместо единицы будем иметь нуль.

### 3. Связь классических и квантовых формул

В лекции 3 было показано, что нормировка классической плотности в пространстве  $\mathcal{R}(q, q')$  гласит:

$$\int \rho(q, q) dq = 1, \quad (\text{Д.14})$$

а выражение для среднего значения  $\overline{L}$  имеет вид

$$\overline{L} = \int \rho(q, q') L^*(q, q') dq dq' \quad (\text{Д.15})$$

(см. (3.9) и (3.10)). С другой стороны (формула (4.9)),

$$\text{Sp } \widehat{\rho} = 1. \quad (\text{Д.16})$$

В раскрытом виде этот след есть сумма диагональных элементов  $\widehat{\rho}(q, q')_{q'=q} = \rho(q, q)$ . Для непрерывной переменной, какой является переменная  $q$ , след матрицы по определению есть интеграл по этой переменной:

$$\text{Sp } \widehat{\rho} \equiv \int \widehat{\rho}(q, q) dq = 1. \quad (\text{Д.17})$$

Поэтому формулы (Д.14) и (Д.16) совпадают. Далее, если в (Д.15) рассматривать  $L^*(q, q')$  как матричный элемент эрмитова оператора  $\widehat{L}$ , то  $L^*(q, q') = L(q', q)$ . Поэтому замена коммутативного закона умножения в (Д.15) на закон умножения матриц позволяет записать (Д.15) в «квантовом» виде:

$$\overline{L} = \int \rho(q, q') L(q', q) dq' dq. \quad (\text{Д.18})$$



В соответствии с законом умножения матриц и определением следа матрицы получаем, что формула (Д.15) после изменения закона умножения переходит в (4.10):

$$\bar{L} = \text{Sp}(\hat{\rho}\hat{L}). \quad (\text{Д.19})$$

Укажем важное равенство

$$\text{Sp}(\hat{A}\hat{B}) = \text{Sp}(\hat{B}\hat{A}). \quad (\text{Д.20})$$

Действительно,

$$\text{Sp}(\hat{A}\hat{B}) = \sum_n \sum_s A_{ns} B_{sn} = \sum_s \sum_n B_{sn} A_{ns} = \text{Sp}(\hat{B}\hat{A}). \quad (\text{Д.21})$$

То же самое легко доказать для непрерывных матриц, заменяя суммирование по дискретным индексам  $s, n$  на интегрирование по непрерывным переменным:

$$\text{Sp}(\hat{A}\hat{B}) = \int \int dq dq'' A(q, q'') B(q'', q) = \text{Sp}(\hat{B}\hat{A}). \quad (\text{Д.22})$$

Таким же путем доказывается возможность циклической перестановки операторов:

$$\text{Sp}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = \text{Sp}(\hat{C}\hat{A}\hat{B}) \quad (\text{Д.23})$$

и т. п. Заметим, что равенства (Д.21) и (Д.23) предполагают сходимость входящих в них сумм или интегралов.

#### 4. Инвариантность канонических соотношений и формул для средних

Пусть

$$[\hat{p}_r, \hat{q}_s] = \hat{I} \delta_{rs}. \quad (\text{Д.24})$$

Введем новые переменные с помощью унитарного преобразования  $S$ :

$$\hat{P}_r = S \hat{p}_r S^{-1}, \quad (\text{Д.25})$$

$$\hat{Q}_s = S \hat{q}_s S^{-1}. \quad (\text{Д.26})$$

Отсюда имеем для обратного преобразования

$$\hat{p}_r = S^{-1} \hat{P}_r S, \quad (\text{Д.27})$$

$$\hat{q}_s = S^{-1} \hat{Q}_s S. \quad (\text{Д.28})$$

Перемножая (Д.27) и (Д.28), учитывая, что  $SS^{-1} = 1$ , найдем

$$\hat{p}_r \hat{q}_s = S^{-1} \hat{P}_r \hat{Q}_s S, \quad (\text{Д.29})$$

$$\hat{q}_s \hat{p}_r = S^{-1} \hat{Q}_s \hat{P}_r S, \quad (\text{Д.30})$$

Поэтому

$$S^{-1}[\widehat{P}_r, \widehat{Q}_s]S = \widehat{I}\delta_{rs}. \quad (\text{Д.31})$$

Умножая (Д.31) слева на  $S$  и справа на  $S^{-1}$ , замечая, что

$$S\widehat{I}S^{-1}\delta_{rs} = \widehat{I}\delta_{rs}, \quad (\text{Д.32})$$

получаем

$$[\widehat{P}_r, \widehat{Q}_s] = \widehat{I}\delta_{rs}. \quad (\text{Д.33})$$

Таким образом, переменные  $\widehat{P}_r, \widehat{Q}_s$  образуют систему новых канонически сопряженных переменных.

Обратимся теперь к формулам для средних. Для преобразованных операторов  $\widehat{\rho}'$  и  $\widehat{\mathcal{L}}'$  имеем

$$\text{Sp } \widehat{\rho}' = \text{Sp } (S\widehat{\rho}S^{-1}) \quad (\text{Д.34})$$

и

$$\widehat{\mathcal{L}}' = \text{Sp } (\widehat{\rho}'\widehat{\mathcal{L}}') = \text{Sp } (S\widehat{\rho}S^{-1}S\widehat{\mathcal{L}}S^{-1}) = \text{Sp } (S(\widehat{\rho}\widehat{\mathcal{L}})S^{-1}). \quad (\text{Д.35})$$

Применим теперь циклическую перестановку операторов в (Д.34) и (Д.35), возможность которой доказана в дополнении 3, и получим

$$\text{Sp } (S\widehat{\rho}S^{-1}) = \text{Sp } (S^{-1}S\widehat{\rho}) = \text{Sp } \widehat{\rho} \quad (\text{Д.36})$$

и из (Д.35)

$$\text{Sp } (S(\widehat{\rho}\widehat{\mathcal{L}})S^{-1}) = \text{Sp } (S^{-1}S(\widehat{\rho}\widehat{\mathcal{L}})) = \text{Sp } (\widehat{\rho}\widehat{\mathcal{L}}). \quad (\text{Д.37})$$

Тем самым доказано, что  $\text{Sp } \widehat{\rho}$  и  $\text{Sp } (\widehat{\rho}\widehat{\mathcal{L}})$  суть инварианты унитарных преобразований.

Ясно, что это утверждение можно распространить на след любого оператора  $\widehat{N}$ :

$$\text{Sp } \widehat{N}' = \text{Sp } \widehat{N}. \quad (\text{Д.38})$$

## 5. О собственных функциях и собственных значениях операторов

Для выводов лекции 5 существенно выражение

$$\text{Sp } (\widehat{C}\widehat{C}^+) = 0. \quad (\text{Д.39})$$

Напишем его в раскрытом виде, ограничившись случаем дискретного спектра операторов  $C$  и  $C^+$ , имеем

$$\text{Sp } (\widehat{C}\widehat{C}^+) = \sum_{n,s} C_{ns} C_{sn}^+ = \sum_{n,s} C_{ns} C_{ns}^* = \sum_{n,s} |C_{ns}|^2. \quad (\text{Д.40})$$

Поэтому равенство (Д.39) возможно лишь в том случае, когда все элементы  $\widehat{C}_{ns} = 0$ . Для непрерывного спектра доказательство получается, если заметить в (Д.40) суммы на интегралы.

Таким образом, из (Д.40) следует  $\widehat{C} = \widehat{C}^+ = 0$ . Обратимся теперь к доказательству формул (5.10) и (5.11). Сравнение уравнений (5.8) и (5.10) показывает, что в уравнение (5.8) переменная  $q'$  входит как произвольный параметр — оператор  $\widehat{\mathcal{L}}$  не действует на эту переменную.

Поэтому зависимость  $\widehat{\rho}$  от переменной  $q$  в (5.10) совпадает с зависимостью от  $q$  функции  $\psi_\lambda(q)$  в (5.10). Отсюда следует, что матричный элемент  $\rho(q, q')$  пропорционален функции  $\psi_\lambda(q)$ . Сравнение уравнений (5.9) и (5.11) показывает, что  $\rho(q, q')$  пропорционально  $\psi_\lambda^*(q')$ . Следовательно,

$$\rho_\lambda(q, q') \approx \psi_\lambda(q) \psi_\lambda^*(q'). \quad (\text{Д.41})$$

Учитывая условие  $\widehat{\rho}^2 = \widehat{\rho}$ , найдем, что множитель пропорциональности в (Д.41) должен равняться единице. Это вытекает из условий нормировки собственных функций (см. (5.15), (5.16)). Действительно,

$$\begin{aligned} \rho_\lambda^2(q, q') &= \int \rho_\lambda(q, q'') \rho_\lambda(q'', q') dq'' = \\ &= \int \psi_\lambda(q) \psi_\lambda^*(q'') \psi_\lambda(q'') \psi_\lambda^*(q') dq'' = \psi_\lambda(q) \psi_\lambda^*(q') = \rho_\lambda(q, q'). \end{aligned} \quad (\text{Д.42})$$

Докажем теперь формулу (5.22). Имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\rho} \Phi(q) &\equiv \int \rho(q, q'') \Phi(q'') dq'' = \int \psi(q) \psi^*(q'') \Phi(q'') dq'' = \\ &= \psi(q) \int \psi^*(q'') \Phi(q'') dq'' = \psi(q) \langle \Phi, \psi \rangle. \end{aligned} \quad (\text{Д.43})$$

## 6. Соотношение неопределенностей для произвольных величин $A$ и $B$

Пусть  $\widehat{A}$  и  $\widehat{B}$  — два эрмитовых оператора, изображающих динамические величины  $A$  и  $B$ , а  $\rho$  — статистический оператор. Рассмотрим вспомогательную величину

$$I(\xi) = \text{Sp} \{ [\xi \widehat{A} \widehat{\rho} + i \widehat{B} \widehat{\rho}] [\xi (\widehat{A} \widehat{\rho})^+ - i (\widehat{B} \widehat{\rho})^+] \}, \quad (\text{Д.44})$$

где  $\xi$  — вещественное число. Очевидно, что  $I(\xi) \geq 0$ . Раскрывая это выражение, получаем

$$a\xi^2 + b\xi + c \geq 0, \quad (\text{Д.45})$$

где

$$a = \text{Sp} \{ (\widehat{A} \widehat{\rho}) (\widehat{A} \widehat{\rho})^+ \} = \text{Sp} (\widehat{\rho}^2 \widehat{A}^2) = \text{Sp} (\widehat{\rho} \widehat{A}^2) = \overline{\widehat{A}^2}; \quad (\text{Д.46})$$

$$\begin{aligned} b &= i \text{Sp} \{ \widehat{B} \widehat{\rho} (A \rho)^+ + A \rho (B \rho)^+ \} = i \text{Sp} [\widehat{\rho} (\widehat{B} \widehat{A} - \widehat{A} \widehat{B})] = \\ &= \hbar \text{Sp} \{ [\widehat{B}, \widehat{A}] \widehat{\rho} \} = \hbar \overline{[\widehat{B}, \widehat{A}]}; \end{aligned} \quad (\text{Д.47})$$

$$c = \text{Sp}[(\widehat{B}\widehat{p})(\widehat{B}\widehat{p})^+] = \overline{\widehat{B}^2}. \quad (\text{Д.48})$$

При выводе (Д.46)–(Д.48) мы воспользовались эрмитовостью операторов  $\widehat{A}$  и  $\widehat{B}$  и возможностью циклической перестановки множителей под знаком  $\text{Sp}$ . Из условия (Д.45) следует, что

$$4ac \geq b^2. \quad (\text{Д.49})$$

Подставляя сюда значения  $a, c, b$ , получаем

$$\overline{\widehat{A}^2} \overline{\widehat{B}^2} \geq \frac{\hbar^2}{4} |\overline{[\widehat{B}, \widehat{A}]}|^2. \quad (\text{Д.50})$$

В частности, если  $A = \widehat{p} - \bar{p}$ ,  $B = \widehat{q} - \bar{q}$ , где  $\bar{p}, \bar{q}$  — средние значения операторов  $\widehat{p}$  и  $\widehat{q}$ , то  $[\widehat{A}, \widehat{B}] = [\widehat{p}, \widehat{q}] = 1$  и мы получаем соотношение Гейзенберга:

$$\overline{\Delta \widehat{p}^2 \Delta \widehat{q}^2} \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (\text{Д.51})$$

## 7. Вычисления с матрицей $R(q, p)$

Для вывода формул (8.14), (8.20) и некоторых других необходимо вычислить матричный элемент произведения двух операторов  $\widehat{A}$  и  $\widehat{B}$  в новом представлении в пространстве  $\mathcal{R}(q, p)$ . Обозначим это произведение  $\widehat{C} = \widehat{A}\widehat{B}$ . Согласно определению (8.10) и (8.11)

$$C(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int \widehat{C}(q, q'') \exp[ip(q'' - q)] dq'', \quad (\text{Д.52})$$

где  $\widehat{C}(q, q'')$  — матричный элемент оператора  $\widehat{C}$  в координатном представлении

$$\widehat{C}(q, q'') = \int \widehat{A}(q, p''') dq''' \widehat{B}(q''', q''). \quad (\text{Д.53})$$

Далее, согласно тому же определению:

$$\widehat{A}(q, p''') = \int A(q, p''') \exp[-ip'''(q'' - q)] dp'''; \quad (\text{Д.54})$$

$$\widehat{B}(q''', q'') = \int B(q''', q'') \exp[-ip'''(q'' - q''')] dp'''. \quad (\text{Д.55})$$

Подставляя эти выражения в (Д.53) и результат — в (Д.52), получаем после интегрирования по  $q''$ , которое приводит к появлению под интегралом функции  $\delta(p'' - p)$ , что позволяет выполнить интегрирование и по  $p''$ , следующее выражение:

$$C(q, p) = \int A(q, p + \eta) B(q + \xi, p) \exp(-i\xi\eta) d\xi d\eta, \quad (\text{Д.56})$$

где

$$\xi = q''' - q, \quad \eta = p''' - p. \quad (\text{Д.57})$$

Заметим, что во всех этих формулах мы временно положили  $\hbar = 1$ . Для вычисления  $\text{Sp}(\widehat{\mathcal{L}}\widehat{\rho})$  обозначаем  $\widehat{C} = \widehat{\mathcal{L}}\widehat{\rho}$ . Полагая в (Д.53) и (Д.55)  $q'' = q$ , подставляя (Д.54) и (Д.55) в (Д.53) и интегрируя  $\widehat{C}(q, q)$  по  $q$ , получаем

$$\begin{aligned} \overline{L} = \text{Sp}(\widehat{\mathcal{L}}\widehat{\rho}) = \text{Sp}\widehat{C} &= \int \widehat{C}(q, q) dq = \int dq dq''' \int L(q_s, p''') \times \\ &\times \exp[-ip'''(q'' - q)] dp''' \int R(q''', p'') \times \\ &\times \exp[-ip''(q - q''')] dp''. \end{aligned} \quad (\text{Д.58})$$

Откуда

$$\overline{L} = \int \mathcal{L}(q, p) R(q + \xi, p + \eta) \exp(i\xi\eta) d\xi d\eta dq dp. \quad (\text{Д.59})$$

Пользуясь формулой, обратной (Д.54)

$$A(q, p''') = \int A(q, q''') \exp[i(p'''q''' - ip'''q)] dq''', \quad (\text{Д.60})$$

и эрмитовостью матричного элемента  $A(q, q''')$ , нетрудно показать, что для любого оператора имеет место соотношение

$$A^*(q, p) = \int A(q + \xi, p + \eta) \exp(i\xi\eta) d\xi d\eta. \quad (\text{Д.61})$$

Эта формула позволяет выразить в (Д.59)  $R(q + \xi, p + \eta)$  через  $R^*(q, p)$ . Поэтому из (Д.59) и (Д.61) получаем результат:

$$\overline{L} = \int R^*(q, p) L(q, p) dq dp, \quad (\text{Д.62})$$

приведенный в лекции 8 (см. (8.14)). Из формулы (Д.56) можно найти выражение для скобки Пуассона в пространстве  $\mathcal{R}(q, p)$ , для этого положим  $\widehat{C} = (\widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A})/i\hbar$  и воспользуемся законом умножения (Д.56). Тогда получается:

$$\begin{aligned} [A, B]_{q,p} &= \frac{1}{i\hbar} \int \exp(-i\xi\eta/\hbar) d\xi d\eta \{A(q, p + \eta)B(q + \xi, p) - \\ &- B(q, p + \eta)A(q + \xi, p)\}. \end{aligned} \quad (\text{Д.63})$$

Полагая здесь  $A(q, p) = H(q, p)$  и  $B(q, p) = R(q, p)$ , получаем формулу (8.20).

## 8. О сохранении симметрии матрицы плотности

Обратимся к уравнению

$$d\hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}]dt \equiv \frac{1}{i\hbar}(\hat{H}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{H})dt. \quad (\text{Д.64})$$

Здесь  $d\hat{\rho}$  — приращение матрицы  $\hat{\rho}$  за время  $dt$ . Пусть в момент времени  $t$  матрица  $\hat{\rho}$  симметрична или антисимметрична при перестановке любой пары частиц  $i, k$ , в строках или колонках. Действуя на колонки уравнения (Д.64) оператором этой перестановки  $\mathcal{P}_{ik}(q')$ , т.е. справа, рассматривая сначала поведение члена  $\hat{H}\hat{\rho}$ , имеем

$$\hat{H}\hat{\rho}\mathcal{P}_{ik}(q') = \pm\hat{H}\hat{\rho}. \quad (\text{Д.65})$$

Действуя теперь этим же оператором на член  $\hat{\rho}\hat{H}$ , получаем

$$\hat{\rho}\hat{H}\mathcal{P}_{ik}(q') = \hat{\rho}\mathcal{P}_{ik}(q'')\mathcal{P}_{ik}(q'')\hat{H}\mathcal{P}_{ik}(q'). \quad (\text{Д.66})$$

Так как по внутренним переменным  $q''$  при перемножении матриц  $\hat{\rho}$  и  $\hat{H}$  идет интегрирование, то вставленные между  $\hat{\rho}$  и  $\hat{H}$  операторы  $\mathcal{P}_{ik}(q'')$  не меняют результата. В силу симметрии оператора  $\hat{H}$  при перестановке частиц

$$\mathcal{P}_{ik}(q'')\hat{H}\mathcal{P}_{ik}(q') = \hat{H}.$$

Поэтому

$$\hat{\rho}\hat{H}\mathcal{P}_{ik}(q') = \hat{\rho}\mathcal{P}_{ik}(q'')\hat{H} = \pm\hat{\rho}\hat{H}. \quad (\text{Д.67})$$

Отсюда следует, что скобка Пуассона в (Д.64) обладает симметрией оператора  $\hat{\rho}$  при перестановке аргументов  $(q'_i, q'_k)$  в колонках скобки. Таким же путем доказывается симметрия или антисимметрия при перестановке аргументов  $(q_i, q_k)$  в строках скобки.

В силу этого приращение  $d\hat{\rho}$  оператора  $\hat{\rho}(t)$  за время  $dt$  имеет симметрию оператора  $\hat{\rho}(t)$ . Таким образом, свойство симметрии или антисимметрии при перестановках частиц в строках и в колонках статистического оператора  $\hat{\rho}$  сохраняется при движении. Иными словами, операторы  $\mathcal{P}_{ik}(q)$  и  $\mathcal{P}_{ik}(q')$  являются интегралами движения.

## 9. Вычисление интеграла в формуле (2.17)

Интеграл по  $x$ , входящий в формулу (12.17), имеет вид

$$I^{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \exp[\theta(x')], \quad (\text{Д.68})$$

где

$$\theta(x') = \frac{i}{2\hbar\tau}[\mu(x-x')^2 + M(q-x')^2 \pm ikx'] - \frac{x'^2}{a^2}. \quad (\text{Д.69})$$

Представим эту фазу в виде

$$\theta(x') = -[Ax' + iB]^2 - B^2 + iC \equiv -Z^2 - B^2 + iC, \quad (\text{Д.70})$$

где

$$A = 1/a^2 - i(\mu + M)/2\hbar\tau, \quad (\text{Д.71})$$

$$B^\pm = (1/\hbar\tau)[(\mu x + MQ) \mp k]/2A, \quad (\text{Д.72})$$

$$C = i(\mu x^2 + MQ^2)/2\hbar\tau. \quad (\text{Д.73})$$

Произведенная замена переменных  $x'$  на  $z$ ,  $dz = Adx'$ , позволяет выполнить интегрирование в (Д. 68). Результат следующий:

$$I^\pm = \sqrt{\pi} \exp [-(B^\pm)^2 + iC]/A. \quad (\text{Д.74})$$

Пользуясь (Д.72), представим  $(B^\pm)^2$  в виде  $\text{Re}(B^\pm)^2 + i\text{Im}(B^\pm)^2$  и мнимую часть добавим к фазе  $iC$ . Тогда

$$I^\pm = \sqrt{\pi} \exp [-\text{Re}(B^\pm)^2 + iC']/A. \quad (\text{Д.75})$$

Из (Д.72) получаем при  $\mu \ll M$  выражение для

$$\text{Re}(B^\pm)^2 = (Q \mp v\tau)^2/a^2, \quad (\text{Д.76})$$

где  $v = \hbar k/\mu$  — скорость шарика после рассеяния. Заметим, что более точный знаменатель в (Д.76) есть  $a^2 + 4\hbar^2\tau^2/a^2 M^2$ , который учитывает расплывание волнового пакета. Это расплывание при большой массе шарика  $M$  несущественно. Из (Д.76) видно, что функция  $\text{Re}(B^\pm)^2$  сосредоточивается в области  $Q = \pm v\tau$ , что отображает движение шарика направо или налево.

## 10. Матрица плотности для осциллятора, находящегося в тепловом равновесии

Уравнения для величины  $Z(x, x')$ , пропорциональной матрице плотности, в раскрытом виде гласят:

$$\partial Z(x, x')/\partial\beta + [-(1/2)(\partial^2/\partial x^2) + x^2/2]Z(x, x') = 0. \quad (\text{Д.77})$$

Полагая

$$Z(x, x') = \exp [-A - \Phi(x, x')]/\sqrt{\pi}, \quad (\text{Д.78})$$

$$\Phi(x, x') = (Bx^2 - 2Cxx' + Bx'^2)/2 \quad (\text{Д.79})$$

и подставляя (Д.79) в (Д.78), а (Д.78) в (Д.77), получаем

$$\begin{aligned} -\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial\beta}x^2 + \frac{\partial C}{\partial\beta}xx' - \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial\beta}x'^2 - \\ - \frac{1}{2}(Bx^2 + C^2x'^2 - 2BCxx' - B - x^2) = 0. \end{aligned} \quad (\text{Д.80})$$

Откуда, сравнивая коэффициенты при  $x^2$ ,  $xx'$  и  $x'^2$ , находим систему уравнений

$$\begin{aligned} \text{а) } \partial A / \partial \beta - B/2 &= 0; \\ \text{б) } \partial C / \partial \beta + BC &= 0; \\ \text{в) } \partial B / \partial \beta + B^2 - 1 &= 0; \\ \text{г) } \partial B / \partial \beta + C^2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{Д.81})$$

Уравнение в) интегрируется элементарно и приводит к решению  $B = \text{cth } \beta$ . Из уравнения г) определяем коэффициент  $C = \pm 1/\text{sh } \beta$ , и наконец, из уравнения а) находим квадратурой  $A = \ln(\text{sh } \beta)/2 + \text{const}$ . Граничное условие (13.12) определяет выбор знака у коэффициента  $C$  (следует брать знак «+»), а также константу для  $A$ :  $\text{const} = \ln 2/2$ . Таким образом,

$$A = \ln(\text{sh } \beta)/2 + \ln 2/2, \quad B = \text{cth } \beta, \quad C = \text{csch } \beta. \quad (\text{Д.82})$$

Отсюда

$$a^2 = B - C = \text{th } (\beta/2). \quad (\text{Д.83})$$

## 11. Вычисление средних значений $\langle x^2 \rangle$ и $\langle y^2 \rangle$

Вычисление этих средних сводится к вычислению интегралов (13.26) и (13.27). Удобно перейти к полярной системе координат  $r, \varphi$  и вместо  $r$  взять переменную  $z = r^2/2$ . Типичные интегралы, которые при этом появятся в (13.26) и (13.27), с учетом (13.28)–(13.30) имеют вид

$$I_1(M, N) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \exp[-z(M + N \cos \psi)] dz, \quad (\text{Д.84})$$

$$I_2(M, N) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \exp[-z(M + N \cos \psi)] z dz, \quad (\text{Д.85})$$

$$I_3(M, N) = \int_0^{2\pi} \cos \psi d\varphi \int_0^\infty \exp[-z(M + N \cos \psi)] z dz, \quad (\text{Д.86})$$

$$I_4(M, N) = \int_0^{2\pi} \sin \psi d\varphi \int_0^\infty \exp[-z(M + N \cos \psi)] z dz = 0. \quad (\text{Д.87})$$

Первый интеграл  $I_1(M, N)$  после интегрирования по  $z$  сводится к интегралу



$$I_1(M, N) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{M + N \cos \psi} = \frac{1}{2M} \int_{\delta}^{4\pi+\delta} \frac{d\psi}{1 + \varepsilon \cos \psi} =$$

$$= \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{1 + \varepsilon \cos \psi} = \frac{2}{M} \frac{\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \quad (\text{Д.88})$$

Напомним, что угол<sup>1</sup>  $\delta = 2\omega t$  и  $\varepsilon = |N/M| < 1$ . Таким образом,

$$I_1(M, N) = 2\pi/(M^2 - N^2)^{1/2}. \quad (\text{Д.89})$$

Далее, интеграл

$$I_2(M, N) = -\partial I_1(M, N)/\partial M = 2\pi M/(M^2 - N^2)^{3/2}. \quad (\text{Д.90})$$

Наконец, интеграл

$$I_3(M, N) = -\partial I_1(M, N)/\partial N = -2\pi N/(M^2 - N^2)^{3/2}. \quad (\text{Д.91})$$

Согласно (13.26), (13.27) и (13.29), (13.30) имеем

$$\langle x^2(t)/2 \rangle = ab\{I_2(M, N) + I_3(M, N) \cos 2\omega t\}/2\pi. \quad (\text{Д.92})$$

Окончательно, полагая  $M^2 = a^2 + b^2$ ,  $N^2 = a^2 - b^2$ , получаем

$$\langle x^2(t)/2 \rangle = (1/a^2 + 1/b^2)/8 + (1/a^2 - 1/b^2) \cos 2\omega t/8, \quad (\text{Д.93})$$

$$\langle y^2(t)/2 \rangle = (1/a^2 + 1/b^2)/8 - (1/a^2 - 1/b^2) \cos 2\omega t/8. \quad (\text{Д.94})$$

Эти формулы и приведены в лекции 13.

### Список литературы

1. Блохинцев Д. И. Принципиальные вопросы квантовой механики. М.: Наука, 1966. — Статья № 67 в наст. изд. — *Прим. ред.*
2. Уиттекер Т. Аналитическая динамика. Пер. с англ. М.: ОНТИ, 1937.
3. Гиббс Дж. Основные принципы статистической механики. Пер. с англ. М.: Гостехиздат, 1946.
4. Ландау Л., Лифшиц Е. Статистическая физика. М.: Гостехиздат, 1951, гл. 1.
5. Блохинцев Д. И., Брискина Ч. М. // Вестник МГУ. 1948. № 10. С. 115. — Статья № 66 в наст. изд. — *Прим. ред.*
6. Блохинцев Д. И. // УФН. 1977. Т. 122, вып. 4. С. 745.
7. Гейзенберг В. Физические основы квантовой механики. Пер. с англ. М.: Гостехтеориздат, 1932.
8. фон Нейман И. Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.

<sup>1</sup> См. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. С. 380, формула (3.613).

9. *Никольский К. В.* Квантовые процессы. М.: Гостехиздат, 1940.
10. *Blochintsev D. I.* // J. Phys. USSR. 1940. V. 2. P. 71. — Статья № 61 в наст. изд. — *Прим. ред.*
11. *Блохинцев Д. И., Немировский П. Э.* // ЖЭТФ. 1940. Т. 10. С. 1263. — Статья № 62 в наст. изд. — *Прим. ред.*
12. *Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.* Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969. С. 358.
13. *Яглом А. М., Яглом И.* Вероятность и информация. М.: Физматгиз, 1960.
14. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. Киев: Изд-во АН УССР, 1945.
15. *Bogolubov N. N.* On the stochastic processes in the dynamical systems. Dubna, E17-10514, 1977.
16. *Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М.: Гостехиздат, 1946.
17. *Шелест А. В.* Препринт ИТФ 67-11. Киев, 1967.
18. *Davies E. B.* Quantum theory of open systems. London: Acad. Press, 1976.
19. *Uhlmann A.* Zur Beschreibung der irreversibler quantum Prozesse. Sitz. Bericht d. Ak. d. Wiss. d. DDR 14N, Akademie Verlag, 1976.
20. *Ingarden R. S., Kossakowski A.* On Quantum Mechanics of Open Systems // Ann. Phys. 1975. V. 29. № 2.
21. *Блохинцев Д. И.* Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976.
22. *Петров Ю. В.* Естественный реактор // УФН. 1977. Т. 123. С. 473.

Комментарий. Данная работа Блохинцева является сжатым изложением основных проблем квантовой механики, которые интересовали его в разные годы. Книга является переработанным курсом лекций для молодых ученых, прочитанном в ОИЯИ, г. Дубна. Поэтому в ней сочетается мастерская педагогическая манера изложения с обсуждением трудных вопросов квантовой теории, таких как проблемы измерения в квантовой механике. Блохинцев подчеркивает, что «для понимания всей ситуации в квантовой теории измерений решающим оказывается влияние микросистемы на состояние измерительного прибора, который должен быть макроскопически нестабильной системой». Нужно отметить, что круг обсуждаемых проблем близок к тем вопросам, которые продолжают интенсивно исследоваться и в настоящее время [1–17]. Отчасти затрагиваемые в этих обсуждениях проблемы пересекаются с теми, над которыми размышлял Блохинцев в своих лекциях и работах более общего характера [18]. Большое разнообразие мнений по вопросам обоснования квантовой механики и жаркие дискуссии о ее интерпретации не случайны. Как заметил Р. Фейнман [19], «было время, когда газеты писали, что теорию относительности понимают только 12 человек. Мне лично не верится, что это правда... Но, мне кажется, я смело могу сказать, что квантовой механики никто не понимает». Споры и обсуждения интерпретации квантовой механики и ее фундаментальных основ продолжаются с неослабевающей интенсивностью [1–17]. По-видимому, это связано с тем обстоятельством, что

на самом глубинном уровне язык природы — это язык квантовой механики; этим и обуславливается ее «непостижимость» и «невыразимость» в рамках языка обычного повседневного опыта. Язык квантовой физики следует не обычной логике человеческого сознания, а особой, *квантовой логике* [20, 21]. Это обстоятельство объясняет, почему Блохинцев снова и снова возвращался к проблемам интерпретации и обоснования квантовой механики. Несмотря на остающиеся разногласия, состояние проблемы в целом нашло удачное выражение в следующих словах Гелл-Манна: «Квантовая механика — это не только (и не просто) теория; скорее это есть система взглядов и остов, которым должна соответствовать вся современная физика» [22]. Мысли, высказанные Блохинцевым, в точности соответствуют этому пониманию квантовой физики.

1. *Wigner E.P.* Review of the Quantum-Mechanical Measurement Problem // Quantum Optics, Experimental Gravity and Measurement Theory / Eds. P. Meystre, M. G. Scully. New York: Plenum Press, 1983. P.63.
2. *Dieks D.* The Formalism of Quantum Theory: An Objective Description of Reality? // Ann. Physik (Leipzig). 1988. V.45. Ser. 7. P. 174.
3. *Busch P., Shimony A.* Insolubility of the Quantum Measurement Problem for Unsharp Observables // Stud. Hist. Phil. Mod. Phys. 1996. V. 27. P. 397.
4. *Zeilinger A.* Experiment and the Foundations of Quantum Physics // Rev. Mod. Phys. 1999. V.71. P. S288.
5. *Aerts D.* Foundations of Quantum Physics: A General Realistic and Operational Approach // Int. J. Theor. Phys. 1999. V. 38. P. 289.
6. *Leggett A. J.* Some Thought-Experiments Involving Macrosystems as Illustrations of Various Interpretations of Quantum Mechanics // Foundat. Phys. 1999. V. 29. P. 445.
7. *Laloë F.* Do We Really Understand Quantum Mechanics? Strange Correlations, Paradoxes, and Theorems // Am. J. Phys. 2001. V. 69. P. 655.
8. *Bohr A., Mottelson B.R., Ulfbeck O.* The Principle Underlying Quantum Mechanics // Foundat. Phys. 2004. V. 34. P. 405.
9. *Adler S.L.* Quantum Theory as an Emergent Phenomenon: The Statistical Mechanics of Matrix Models as the Precursor of Quantum Field Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
10. *Ghirardi G.C.* Sneaking a Look at God's Cards: Unraveling the Mysteries of Quantum Mechanics. Princeton: Princeton UP, 2005.
11. *Khrennikov A. Y.* Analysis of Explicit and Implicit Assumptions in the Theorems of J. von Neumann and J. Bell // J. Russ. Laser Res. 2007. V. 28. P. 244.
12. Quo Vadis Quantum Mechanics? / Eds. A. Elitzur, S. Dolev, N. Kolenda. Berlin: Springer, 2005.
13. Quantum Mechanics at the Crossroads / Eds. J. Evans, A. S. Thorndike. Berlin: Springer, 2007.
14. *Held C.* Axiomatic Quantum Mechanics and Completeness // Foundat. Phys. 2008. V. 38. P. 707.
15. *Schlosshauer M.* Classicality, the Ensemble Interpretation, and Decoherence: Resolving the Hyperion Dispute // Foundat. Phys. 2008. V. 38. P. 796.

16. Quantum Reality, Relativistic Causality and Closing the Epistemic Circle. Essays in Honor of Abner Shimony / Eds. W.C. Myrvold, J. Christian. Berlin: Springer, 2009.
17. *Zwolak M., Quan H.T., Zurek W.H.* Quantum Darwinism in a Hazy Environment// 2009. arXiv:0904.0418.
18. *Блохинцев Д.И.* Труды по методологическим проблемам физики. М.: Изд-во МГУ, 1993.
19. *Фейнман Р.* Характер физических законов. М.: Мир, 1968. С. 139.
20. *Gibbins P.F.* Quantum Logic and Ensembles // Space, Time and Causality / Ed. R. Swinburne. D. Reidel. Dordrech, 1983. P. 191.
21. *Home D., Whitaker A.* Einstein's Struggles with Quantum Theory. A Reappraisal. Berlin: Springer, 2007.
22. *Gell-Mann M.* The Quark and the Jaguar. New York: W.H. Freeman and Co., 1994.

*А. Л. Куземский*

**ПЕРЕЧИТЫВАЯ Д. И. БЛОХИНЦЕВА:  
РАЗМЫШЛЕНИЯ НАД ОСНОВАНИЯМИ  
НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ\***

*А. Д. Суханов, О. Н. Голубева*

*Открытие Планка разрушило осто  
в классической механики и электродина  
мики и поставило задачу: найти новую  
познавательную основу для всей физики.*

А. Эйнштейн [1]

Изучая данное Собрание трудов Д. И. Блохинцева, можно сделать естественный вывод о многогранности его личности и научного творчества. Вместе с тем его научная деятельность отличалась исключительной цельностью, ибо она следовала нескольким важнейшим идеям, которые он сформулировал в своих работах и исповедовал всю жизнь.

Одна из них состоит в понимании целостности природы и необходимости стремиться к столь же целостному ее описанию. На первый взгляд, имя Блохинцева неразрывно связано с развитием и истолкованием квантовой теории. Однако по сути это — поверхностное суждение. Дело в том, что те выводы, к которым он пришел в процессе размышления над смыслом основополагающих понятий квантовой механики, выходят далеко за ее пределы. А именно, они позволяют нам сегодня опираться на них при установлении взаимосвязи между различными физическими теориями, относящимися к микро- и макрофизике. Исторически сложилось так, что их принято рассматривать раздельно на основе использования различных концептуально-понятийных и математических аппаратов.

Однако из многих, разбросанных по разным работам высказываний Блохинцева бесспорно следует, что данная точка зрения его не удовлетворяла. Более того, он стремился противопоставить ей абсолютно иной подход. К его окончательной формулировке он шел долго и трудно, постепенно углубляя свои аргументы и преодолевая сопротивление оппонентов по многим принципиальным проблемам. В результате он, быть может, так и не изложил его последовательно в законченной форме, хотя и был очень близок к этому.

Именно поэтому, с нашей точки зрения, необходимо новое, свежее прочтение его мыслей, чтобы выкристаллизовать в явном виде его методологические позиции, значимые для дальнейшего развития физики как единой науки, частью которой является и квантовая теория.

Данный текст — это исследование наиболее важного в этом отношении вклада Блохинцева в осмысление роли понятия ансамбля как статистического коллектива особого рода, ибо оно является ключевым при поисках объединенного подхода к макро- и микрофизике. Изложение требует привлечения широкого исторического контекста, проясняющего борьбу идей в истории этого направления эволюции физики. В нем фигурируют имена великих физиков и мыслителей XX века, идейным продолжателем которых был Блохинцев.

## **1. Московская школа и ее роль в поисках оснований неклассической физики**

В истории цивилизации встречаются события, определяющие ее развитие на столетия вперед. К числу таких событий, бесспорно, относится открытие М. Планка, ставшее в тот момент основой теории теплового излучения. На фоне других открытий в физике столетней давности оно прошло достаточно незаметно. Но сегодня мы понимаем, что Планку выпала высокая миссия первопроходца — открыть Новый Свет в науке, который сегодня принято называть неклассической физикой. В этом качестве среди естествоиспытателей Планка можно поставить в один ряд только с Коперником, с которого началось познание Старого Света, или иначе, классической физики.

Масштабность этих событий определяется тем, что каждый раз это были перевороты в самом мышлении, коренные изменения взглядов на природу в целом и способов ее познания. Подобные перевороты в позиции научного сообщества, а тем более, в массовом сознании не могли происходить слишком быстро. Прошло более двухсот лет, прежде чем классическая физика Коперника–Ньютона заняла место доклассической физики Аристотеля.

Сегодня развитие общества несколько ускорилось. Хотя от открытия Планка до наших дней прошло немногим более ста лет, ныне можно с большой долей уверенности утверждать, что неклассическая физика уже заняла достойное место рядом с классической физикой, сохранив для последней свою область применимости. Вместе с тем можно надеяться, что дальнейшее распространение неклассических взглядов и не только на природу все еще предстоит.

В условиях, когда освоение нового мировоззрения идет медленно и противоречиво, огромную роль наряду с его родоначальниками играют ученые, активно способствовавшие распространению и адекватному истолкованию новых идей. В этой связи достаточно напомнить, какой вклад в окончательное утверждение теорий Ньютона и Максвелла внесли Эйлер и Герц соответственно. Мы хотим продемонстрировать, что имя Блохинцева столь же правомерно вписано в историю осмысления квантовой теории и всей неклассической физики в целом.

Среди ряда теорий неклассической физики квантовая теория была и до сих пор остается наиболее трудной для понимания. В ней изощренность математического аппарата сочетается с удивительной успешностью экспериментальных предсказаний и с непрерывно расширяющимися практическими приложениями, меняющими повседневную жизнь общества. В этих условиях то обстоятельство, что за столетний срок так и не удалось найти адекватную трактовку данной теории, приемлемую для большинства исследователей и широкой аудитории, требует специального объяснения.

По-видимому, наука здесь столкнулась с очередной тупиковой ситуацией. Способ выхода из таких ситуаций, однако, можно почерпнуть из методологических следствий теоремы Гёделя. Если нельзя найти согласованное объяснение соответствующей теории в рамках имеющихся постулатов, необходимо попытаться рассмотреть ее как часть более общей теории, расширив набор исходных принципов.

Именно по этому пути интуитивно следовали представители московской школы в квантовой теории, родоначальником которой стал академик Л. И. Мандельштам [2]. Ее отличительной чертой было рассмотрение данной теории в тесной идейной связи с другими теориями неклассической физики и выяснение оснований, объединяющих все теории такого рода [3, 4].

Ярким представителем московской школы, идеи которого оказали большое влияние на раннего Блохинцева, был К. В. Никольский. Уже в середине 30-х годов он опубликовал первые работы [5, 6], вызвавшие резкую критику В. А. Фока как сторонника исходных взглядов копенгагенской школы с ее преувеличенной ролью наблюдателя. Самобытные идеи московской школы были впервые последовательно изложены Никольским в книге «Квантовые процессы» [7], которую автор писал, одновременно редактируя перевод книги Дж. Гиббса «Основные принципы статистической механики» [8]. И это, по-видимому, оказалось неслучайно. В этом факте нашло отражение кредо московской школы — совместное рассмотрение оснований разных теорий неклассической физики.

Начиная с середины 40-х годов признанным лидером московской школы стал Блохинцев. Еще в 1944 г. им был создан учебник по квантовой механике [9, 10], выдержавший к сегодняшнему дню 22 издания на девяти языках и считающийся до сих пор одним из лучших в мире. Более того, он неоднократно излагал свои взгляды в статьях, посвященных методологическим проблемам квантовой теории. Они нашли концентрированное изложение в его известной монографии «Принципиальные вопросы квантовой механики» [11] и в «Лекциях по квантовой механике. Избранные вопросы» [12]. Эти две книги совместно были изданы 10 раз на разных языках. Популярность этих книг Блохинцева показывает, что избранное московской школой направление поиска оснований неклассической физики получило значительное признание. Однако это признание относилось, в основном, к его интерпретации квантовой механики. По нашему мнению, этим позиция Блохинцева не исчерпывается. Поэтому новое осмысление концептуального ядра взглядов Блохинцева позволяет распространить его на основания всей неклассической физики в целом, что представляется исключительно актуальным.

## 2. XIX век: иллюзия эффективности детерминизма и ее крушение

Как известно, к концу XVIII столетия версия описания природы на основе уравнений классической механики Ньютона окончательно восторжествовала. При этом сам Ньютон обращал внимание на то, что начальные и граничные условия часто оказываются не менее важны, чем сами уравнения, ибо именно они предопределяют дальнейшее поведение системы. В наиболее прямолинейной форме эта точка зрения свелась к иллюзии однозначного детерминизма, воплощенной в словах Лапласа: «Дайте мне начальные данные частиц всего мира, и я предскажу вам будущее всего мира». Последующее развитие науки показало, что все обстоит не так идеально (см. простейший пример с разбросом начальных данных в разд. 1 книги Блохинцева [11]).

Поскольку эти данные извлекаются, как правило, из эксперимента, для их математической обработки неизбежно приходится обращаться к статистическим идеям. Их первое существенное приложение в физике принадлежало Гауссу. В 1809 г., применяя метод наименьших квадратов к анализу наблюдений движения астероидов, он получил знаменитое нормальное распределение. С современной точки зрения [13], это распределение характеризует *бесконечную* совокупность испытаний, проводимых над одним и тем же целостным объектом в одних и тех же внешних условиях.

Следующим существенным приложением теории вероятности в физике можно считать использование в классической механике фазового пространства, координатами которого служат обобщенные координаты и импульсы частиц. В этом случае динамика системы может быть описана изменением со временем распределения Лиувилля (1851 г.). Это распределение относится к совокупности *конечного* числа точек фазового пространства, сопоставляемой системе из  $N$  частиц. Эти точки можно трактовать как своеобразный идеальный газ из конечного числа объектов<sup>1</sup>, напоминающий также совокупность  $N$  одинаковых независимых монет.

К середине XIX века идеи теории вероятностей нашли применение в физике также и при описании идеального газа. Однако по-прежнему считалось, что движение частиц газа на микроуровне следует идеям детерминизма. На этом основании можно утверждать, что использование статистических идей в кинетической теории газов Больцмана, фактически основанной на коллективе Лиувилля с *конечным* числом частиц, носит лишь вторичный, вспомогательный характер. При этом то обстоятельство, что статистические коллективы Гаусса и Лиувилля, к которым применялись законы теории вероятностей, имеют совершенно различный физический смысл, вообще не принималось во внимание.

Тем не менее, постепенно накапливались факты, показывающие, что детерминированное описание природы, если его и можно использовать, то только как чересчур идеализированный вариант. В итоге к концу XIX века сложилась такая картина: макроописание природы в рамках классической

---

<sup>1</sup> С современной точки зрения, выводы из такого распределения являются обоснованными в так называемом термодинамическом пределе, когда  $N$  стремится к бесконечности.



физики носило статистический характер вследствие огромного числа частиц, составляющих реальные объекты, и невозможности точно задать их начальные (и граничные — для полей) данные. В то же время микроописание в определенных условиях сохраняло детерминистский характер и рассматривалось как первичное, фундаментальное по отношению ко вторичному, вспомогательному макроописанию. В этом отношении определенная доля иллюзии об эффективности детерминизма при описании всей природы в целом все еще сохранялась.

Вместе с тем со времен Эпикура в науке существовала точка зрения, что и на микроуровне описание движения объектов также должно включать неустранимые элементы случайности. Множество фактов, подтверждающих ее, постепенно нарастало. Среди них особенно выделялись таинственное броуновское движение и открытая в 1895 г. спонтанная радиоактивность. Однако, по мнению В. А. Фока [14], «настоящее крушение детерминизма произошло вместе с развитием квантовой механики начиная с работы А. Эйнштейна по теории излучения (1916 г.) [15], где он впервые ввел в физику априорные вероятности». Речь здесь идет о спонтанном излучении атомов, подчиняющемся только законам случайности.

В итоге такого развития пришлось признать, что, по существу, вся физика и на макро- и на микроуровне является статистической, а детерминистское описание возможно лишь в идеализированных вырожденных случаях. После этого необходимость нахождения адекватного статистического описания природы на микроуровне стала остро насущной.

### **3. Прологомены неклассического описания природы. Историческая справка**

Образцом такой теории долгие годы всем казалась статистическая механика Гиббса (1902 г.), обобщившая кинетическую теорию газов Больцмана. Однако, как отмечал в своей знаменитой монографии Н. Н. Боголюбов (1946 г.) [16], «...в этом подходе имеются внутренние противоречия. С одной стороны, движение молекул трактуется как некий случайный процесс и в рассмотрение вводится определенный статистический механизм — механизм бинарных соударений. С другой стороны, входящие в уравнение случайного процесса эффективные сечения рассчитываются из уравнений классической механики». Это означает, что, несмотря на ее эффективность, статистическую механику нельзя было использовать для последовательного статистического описания, которое требовалось для объяснения новых экспериментальных фактов, открытых как на микро-, так и на макроуровнях.

В связи с этим отметим, что сегодня ассоциировать зарождение неклассического описания природы исключительно с появлением квантовой гипотезы Планка (1900 г.) не вполне обоснованно. В этом случае внимание невольно концентрируется исключительно на идее дискретности физических величин, встречающихся при микроописании. Такой подход нельзя признать удовлетворительным, поскольку дискретные величины (частоты стоячих волн) встречаются и в классической физике. Кроме того, к началу XX века были обнаружены физические эффекты и на макро- и на микроуровнях, не объяснимые

с детерминистской точки зрения. Все это побуждало к поиску общей основы для их описания, отличной от того, на чем базировалась классическая физика.

Иными словами, формирование концепции неклассической физики в целом никоим образом не сводилось к квантовой гипотезе. Эта концепция родилась практически одновременно (1899–1906 гг.) в работах трех великих физиков — Планка, Гиббса и Эйнштейна. При этом основополагающие элементы этой концепции на макроуровне были сформулированы Гиббсом и Эйнштейном, а на микроуровне — прямо или косвенно Планком и Эйнштейном. Поскольку Гиббс и Планк, формулируя новые идеи, преодолевали свои классические воззрения, роль Эйнштейна как одного из провозвестников качественно новых взглядов на природу на всех уровнях ее описания оказалась особенно значительной. Как в связи с этим писал М. Борн в 1949 г., «Эйнштейн видел яснее, чем кто-либо до него, статистическую основу всех законов физики... Создается впечатление, что для него вероятностные законы являются центральными и наиболее важными в сравнении с другими законами» [17].

Первый существенный вклад в основания неклассической физики сделал Планк в докладе 18 мая 1899 г. [18], т. е. за полтора года до выдвижения своей знаменитой гипотезы. В нем он сумел извлечь из закона Стефана–Больцмана и закона смещения Вина две константы, которым изначально придал статус универсальных и фундаментальных [19].

Сегодня мы их называем постоянными Планка и Больцмана и рассматриваем как характеристики квантового и теплового стохастических воздействий, определяющие соответствующие отклики на них всех физических величин в виде флуктуаций и корреляций их характеристик. Фундаментальный и универсальный характер введенных констант вскоре получил подтверждение в работах Эйнштейна. Он показал, что постоянная Планка играет равноправную роль в описании как электромагнитного излучения (1905 г.) [20], так и вещества (на примере кристаллической решетки) [21]. Одновременно он дал универсальное определение постоянной Больцмана через измеримые макропараметры любой системы [22]. Он же разработал теорию броуновского движения [23] на основе представления о тепловых флуктуациях, величина которых определяется постоянной Больцмана.

В дальнейшем Эйнштейн применил разработанную им общую теорию флуктуаций [24, 25] к описанию теплового излучения, кристаллической решетки, а затем и одноатомного идеального газа в термостате. Во всех этих случаях флуктуации энергии оказались связанными одновременно со стохастическими воздействиями квантового и теплового типов, так как выражались через постоянные Планка и Больцмана.

В свою очередь, Планк ввел представление об энергии нулевых колебаний квантового осциллятора. Эту величину в дальнейшем удалось связать с флуктуациями его координаты и импульса в наинизшем стационарном состоянии (т. е. при нулевой температуре). Эти флуктуации зависят только от постоянной Планка, так что впервые объектом исследования в физике стали чисто квантовые флуктуации. Развитие этих идей в конце концов

привело к революционному перевороту в описании природы на микроуровне, что спустя 20 лет получило воплощение в квантовой механике.

Кардинальные изменения в описании природы на макроуровне оказались связанными с совокупностью идей, которые сегодня можно было бы называть неклассической версией статистической термодинамики [26]. Традиционно эти идеи соотносят с работами Эйнштейна [22, 27] и его непосредственных последователей — Фюрта, Лауэ, Сцилларда. Однако не всеми было замечено, что несколько раньше Эйнштейна аналогичные идеи были высказаны еще Гиббсом в главе 9 его знаменитой книги, в основном, посвященной статистической механике [28].

Необходимо подчеркнуть, что этот важнейший вклад Гиббса в неклассическую физику в течение почти ста лет не был замечен исследователями, занимающимися специфическими проблемами статистической механики и термодинамики. Однако он был, хотя, быть может, интуитивно, использован представителями московской школы — Никольским и Блохинцевым — при формулировке ими адекватной физической интерпретации квантовой механики [7, 11]. Это обстоятельство позже сыграло значительную роль в формировании концепции неклассической физики в целом.

Иными словами, развитие физики и интерпретация ее результатов в первые десятилетия XX века подтвердили статистическую основу всей физики — как на макро-, так и на микроуровне. Тем самым, эксперимент, теория и методология совместно противоречили высказыванию позднего Эйнштейна о том, что Бог не играет в кости. Будущим исследователям предстояло выяснить, как именно происходит эта игра.

#### **4. «Как Бог играет в кости?» Ensemble versus assembly**

Вопрос, вынесенный в название данного пункта, поставил ребром в 2005 г. нобелевский лауреат т'Хоофт [30]. Потребность в четком ответе на него возникла давно. Однако она обострилась к началу XXI века в связи с необходимостью истолкования новых экспериментов и недостаточностью для этих целей многих статистических теорий, которые фактически оказались квазиклассическими. Тем самым, назрела задача в рамках общего статистического описания природы установить качественный критерий, позволяющий различать концепции классической и неклассической физики.

Дело в том, что как статус теории вероятностей в математике, так и понимание ее основ физиками долгое время были недостаточными. Это приводило к тому, что не только не уделялось должного внимания выбору конкретного статистического коллектива как совокупности элементарных событий, к которой при определенных условиях применима теория вероятностей. Доходило даже до того, как например, в исходной позиции копенгагенской школы, что считалось возможным относить понятия теории вероятностей к описанию одиночной микрочастицы.

Следует, однако, подчеркнуть, что в этом вопросе московская школа благодаря тесному знакомству в 20-е годы Мандельштама и Р. фон Мизеса сразу заняла принципиальную позицию. Она сводится к тезису, сформулированному в книге [31]: «Сначала должен быть налицо коллектив, только

тогда можно говорить о вероятностях». Важно отметить, что Мандельштам инициировал перевод книги фон Мизеса на русский язык и тем самым существенно повлиял на мировоззрение Блохинцева, которое в дальнейшем воплотилось в его концепцию квантового ансамбля.

Все это заставляет вернуться к трактовке исходного понятия «неклассическая физика» с учетом развития физики и ее методологии за последние сто с лишним лет [32, 33]. Согласно взглядам Фейнмана, в качестве наиболее общего объекта исследования в физике принято выбирать модель «система плюс макросообщество». Макросообщество Фейнман называл *the rest of Universe* [34]. Интересующая исследователя система испытывает со стороны макросообщества воздействия, которые можно отнести к двум типам — регулярные (контролируемые) и стохастические (неконтролируемые). В классической физике имеют дело только с регулярными воздействиями, которым можно сопоставить силу или потенциальную энергию. При необходимости эти воздействия можно исключить из рассмотрения, присоединяя источник этих воздействий к исходной исследуемой системе и переходя тем самым к модели изолированной системы.

Качественное отличие неклассической физики состоит в том, что в ней, наряду с регулярными воздействиями, имеют место и стохастические (квантовые и тепловые) воздействия. Эти воздействия в принципе нельзя исключить из рассмотрения, ибо в природе, как справедливо отмечал Планк, истинно изолированные системы отсутствуют. Возможность пренебречь стохастическими воздействиями можно использовать только как приближение, соответствующее переходу от неклассического описания природы к классическому. Однако это существенно изменяет саму стратегию мышления исследователя.

Наличие в природе стохастических воздействий проявляется в том, что для описания объекта оказывается недостаточно характеристик системы самой по себе, принятых в классической физике, или наблюдаемых (по терминологии Дирака). Наряду с ними столь же существенную роль играют характеристики ее макросообщества, которые, согласно Дираку, независимо фиксируют другую сторону реальности — состояние целостной системы «объект плюс окружение». Благодаря стохастическим воздействиям все характеристики такой системы являются случайными величинами как на микро-, так и на макроуровнях и подчиняются вероятностным закономерностям, носящим фундаментальный, первичный характер. В этом случае наряду со средними величинами используются дисперсии и корреляции соответствующих характеристик, отражающие наличие в природе флуктуаций любых величин.

Отсюда следует, что всякая физическая теория, в которой присутствуют либо квантовые флуктуации, зависящие от постоянной Планка, либо тепловые флуктуации, зависящие от постоянной Больцмана, либо те и другие совместно, является неклассической.

Необходимость описания объектов природы при наличии неустраняемых стохастических воздействий требует адекватного выбора статистического коллектива. В этом качестве непригоден коллектив, традиционно используемый в статистической механике, который не учитывает наличия существенных флуктуаций, порождаемых стохастическим воздействием окружения. К сожа-

лению, долгое время отсутствовало понимание того, что для этой цели наиболее подходит статистический коллектив, использованный в теории ошибок еще Гауссом. Авторитет Гиббса и успешность его статистической механики, основанной фактически на идее статистического коллектива Лиувилля, надолго отвлекли внимание исследователей от того типа статистического коллектива, который адекватен концепции неклассической физики.

Хотя представление об использовании в статистической физике двух качественно различных типов коллективов уже содержалось в книге Гиббса, оно многие десятилетия оставалось вне внимания исследователей. Последнее невольно размывало границу между классической и неклассической физикой. Только в 1989 г. на симпозиуме, посвященном 150-летию со дня рождения Гиббса, в докладе Оппенгейма [35] впервые прозвучало указание на принципиальное различие двух статистических коллективов, названных соответственно *assembly* (восходящий к коллективу Лиувилля) и *ensemble* (восходящий к коллективу Гаусса). Последующий более глубокий анализ показал [28], что в большей части книги Гиббса, посвященной статистической механике, используется именно *assembly*, который мы называем классическим ансамблем Больцмана. В то же время, в главе 9, посвященной статистической термодинамике, используется *ensemble*, или неклассический ансамбль Гиббса.

Напомним, что господствовавшее в течение XVII–XIX веков представление о примате детерминистского описания привело к тому, что вероятностное описание допускалось лишь как вспомогательное, вторичное. Такому варианту вероятностного описания соответствовал выбор статистического ансамбля, наиболее последовательно использовавшегося Больцманом в кинетической теории газов. Этот вариант ансамбля, или *assembly*, представляет собой совокупность большого, но *конечного* числа слабо взаимодействующих между собой объектов, прообразом которой может служить идеальный газ атомов в сосуде заданного объема. При использовании такого ансамбля предполагается, что каждый из атомов подчиняется детерминистским закономерностям, а необходимость вероятностного описания возникает только вследствие неполноты сведений о начальных данных и наличия огромного числа атомов в сосуде.

Наиболее полную реализацию подобный подход к описанию природы на микроуровне нашел в той части монографии Гиббса, которая была посвящена статистической механике. Статистическая механика позволяет рассчитывать средние значения и отклонения от них любых экстенсивных характеристик макроскопической системы, состоящей из конечного числа частиц. Однако при этом интенсивные характеристики системы предполагаются заданными изначально и совпадающими с характеристиками термостата, так что они не флуктуируют по определению. Более того, при предельном переходе к ансамблю, содержащему бесконечное число объектов, что является необходимым условием применения теории вероятности, относительные флуктуации экстенсивных величин также исчезают.

Это означает, что статистическая механика вовсе не выходит за рамки концепции классической физики. Ее принципиальные особенности не меняются и тогда, когда в духе фон Неймана и Дирака при динамическом опи-

сании на микроуровне классическую механику заменяют на квантовую. При этом зависимость от постоянной Планка приобретают только экстенсивные характеристики системы. Однако это обстоятельство не требует изменения концепции описания природы и вполне может быть истолковано в рамках квазиклассического приближения Бора–Зоммерфельда, в котором представление о квантовых флуктуациях вовсе не используется.

Принципиальное отличие варианта вероятностного описания, используемого как в неквантовой версии статистической термодинамики, так и в квантовой механике, связано с иным выбором статистического ансамбля. На это обстоятельство впервые (на 50 лет раньше Оппенгейма!) обратил внимание Д. И. Блохинцев, и в этом его бесспорно историческая заслуга. Подводя итоги своей научной работы [36], он, в частности, писал: «Концепция квантового ансамбля чрезвычайно близка к концепции классического ансамбля Гиббса. Поэтому мы вправе назвать ансамбль, с которым мы имеем дело в квантовой механике, квантовым ансамблем Гиббса. Этот ансамбль определяется макроскопической обстановкой  $\mathcal{M}$ , которая диктует микрочастице  $\mu$  образ ее жизни — ее состояние. Ансамбль состоит из бесконечного и независимого друг от друга повторения ситуаций  $\mathcal{M} + \mu$ ».

Перечитывая тексты Блохинцева сегодня, мы чувствуем, что к этой цитате необходимо добавить некоторый терминологический комментарий, контекст всех высказываний Блохинцева на эту тему убеждает нас в том, что, называя ансамбль Гиббса классическим, он тем самым подчеркивал его значимость как всеми признанного в статистической механике образца, и вовсе не придавал этому слову того смысла, который закрепился за ним сегодня. Содержание блохинцевского понимания ансамбля в действительности соответствует ансамблю в неквантовой версии статистической термодинамики, т. е. ensemble из главы 9 книги Гиббса. На самом деле, с современной точки зрения, — это неклассический ансамбль Гиббса!

Подчеркнем еще раз, что в неклассических теориях в роли ансамбля, или ensemble, выступает *бесконечная* совокупность копий одной и той же системы, находящейся в одном и том же макроокружении, что можно трактовать как бесконечное число «касаний» системы и макроокружения. Именно такой выбор ансамбля наиболее адекватен фундаментальной фейнмановой модели исследования природы «система плюс макроокружение».

Блохинцев впервые обратил внимание на то, что в ансамбле Гиббса микросистема рассматривается во взаимодействии с макроскопическим термостатом, имеющим фиксированную температуру (достаточно вспомнить его образную иллюстрацию с самоварами из книги [11]). Как подчеркивал Блохинцев [11], «практически необязательно иметь много термостатов  $\mathcal{M}$  — достаточно иметь один, при условии, что системы, взаимодействующие с ним, не должны влиять друг на друга и на макроскопическое состояние термостата». Бесконечное число мысленных повторений исходной ситуации  $\mathcal{M} + \mu$  в наибольшей степени отвечает этим требованиям.

Заметим, что аналогичный подход Блохинцев использовал и в квантовой механике (при нулевой температуре). Он писал, что «некоторую совокупность макроскопических тел в дальнейшем будем называть макрообстановкой  $\mathcal{M}$ ».

Эта макрообстановка тем или иным образом определяет поведение микросистемы  $\mu$ ... Представим теперь себе, что такая макрообстановка  $\mathcal{M}$  вместе с микросистемой  $\mu$  повторяется бесконечное число раз, совершенно так же, как повторяется термостат и микросистемы в ансамбле Гиббса... Такой ансамбль мы будем называть квантовым ансамблем» [11].

Таким образом, Блохинцев исходил из того, что в двух неклассических теориях (статистической термодинамике и квантовой механике) используется один и тот же тип статистического ансамбля — ensemble. В данном случае Блохинцев опирался на взгляды, которые в течение нескольких десятилетий прямо или косвенно излагал Эйнштейн. Напомним, что он еще до становления квантовой механики рассматривал на равных явления, в которых проявлялось либо чисто тепловое, либо чисто квантовое, либо оба эти типа стохастического воздействия одновременно.

Подчеркнем еще раз, что самое главное отличие двух типов статистического ансамбля — ensemble и assembly — состоит в том, что ансамбль Гиббса в отличие от ансамбля Больцмана — это бесконечная совокупность ситуаций взаимодействий с термостатом целостной системы  $\mu$ , для которой заранее не предполагается наличие какой-либо внутренней структуры, т. е. скрытых параметров. В то же время ансамбль Больцмана — совокупность конечного числа одинаковых объектов наподобие идеального газа, динамические характеристики которых имеют смысл скрытых параметров.

Возвращаясь к вопросу, поставленному т'Хоофтом [30], можно сказать, что для полного описания природы сегодня используются оба статистических подхода: классический, основанный на assembly Больцмана, и неклассический, основанный на ensemble Гиббса. Первый из них позволяет дать лишь вторичное статистическое макроописание, которое может удовлетворить нас в целом ряде задач, но исключает сущностный учет флуктуаций. При этом использование классического ансамбля Больцмана выступает в роли технического математического приема.

В то же время использование неклассического ансамбля Гиббса наиболее адекватно модели Фейнмана. Оно позволяет органично учесть наличие неустранимых стохастических воздействий квантового и теплового типов на объект со стороны макроокружения, порождающих сущностные флуктуации. При этом структура и размеры объекта не принимаются во внимание. Ансамбль Гиббса соответствует первичному статистическому описанию как на микро-, так и на макроуровнях, фактически открывая нам правила игры, которую демонстрирует Природа как Бог Спинозы и Эйнштейна.

## **5. Гиббс–Эйнштейн–Боголюбов: тепловое стохастическое воздействие как источник неклассического макроописания**

Как уже говорилось, впервые идея применения неклассического ансамбля Гиббса вошла в физику в рамках неквантовой версии статистической термодинамики. Главное отличие статистической термодинамики от классической термодинамики состоит в том, что в ней кардинально меняется представление о тепловом равновесии, фиксируемом нулевым началом. В этой неклассической теории предполагается, что температура системы только в среднем опре-

деляется температурой термостата как объекта с бесконечной теплоемкостью. Поэтому она способна флуктуировать. Это приводит к нетривиальным флуктуациям экстенсивных характеристик системы, включая энергию, которые определяются постоянной Больцмана. Таким образом, в этой теории принципиально учитывается тепловое стохастическое воздействие, для которого постоянная Больцмана является родовой фундаментальной характеристикой.

Как отмечалось выше, миссия дальнейшего развития и применения концепции неклассической физики выпала, главным образом, на долю Эйнштейна. Признание научной общественностью его лидирующей роли в этих вопросах отразилось в том, что Эйнштейн был выдвинут докладчиком на заключительном пленарном заседании первого Сольвеевского конгресса (1911 г.) [37].

В своем докладе он уделил центральное место не каким-либо частным вопросам, а концептуальным проблемам. Говоря современным языком, он, прежде всего, подчеркнул качественное различие между двумя вариантами статистических ансамблей Больцмана и Гиббса, используемых в классической и неклассической физике соответственно. Доклад Эйнштейна вызвал оживленную дискуссию, в ходе которой Лоренц, Планк, Нернст и другие участники конгресса проявили понимание позиции Эйнштейна. Развитые им к тому времени теории теплового излучения и кристаллической решетки отличались тем, что в них микросистема (гармоническая мода излучения или гармонический осциллятор, моделирующий узел кристаллической решетки) проявляла квантовые свойства, находясь в макроокружении, создаваемом термостатом с ненулевой температурой.

Главным инструментом Эйнштейна в исследовании проблем неклассической физики на макроуровне была его теория флуктуаций, объединяющая анализ флуктуаций квантового и теплового типа. Эффективным приложением теории флуктуаций и, тем самым, доказательством реальности теплового стохастического воздействия была теория броуновского движения, позволившая впервые доказать реальность атомов и извлечь из результатов опытов с атомами число Авогадро.

В середине XX века в дальнейшее развитие статистического описания природы существенный вклад внес Боголюбов. В работе 1939 г. им (совместно с Н. М. Крыловым) [38] было показано, что роль окружения в статистической термодинамике играет классический термостат, который моделируется совокупностью слабо связанных классических осцилляторов. В монографии 1945 г. [39] Боголюбов строго доказал, что любой объект, описываемый детерминистскими законами, в результате бесконечного числа контактов с термостатом становится его частью с той же температурой и в итоге подчиняется каноническому распределению Гиббса. В работе 1975 г. [40] Боголюбовым было установлено, что кинетическое уравнение Больцмана–Энскога для системы твердых шаров, испытывающих упругие столкновения только между собой, имеет детерминистское решение. Тем самым, еще раз был подтвержден фундаментальный принцип, согласно которому стохастизация системы возможна только за счет стохастического воздействия термостата.



## 6. Планк–Эйнштейн–Блохинцев: квантовое стохастическое воздействие как источник неклассического микроописания

Очевидно, что самым введением постоянной Планка уже был сделан первый шаг к учету квантового стохастического воздействия на микроуровне. Однако комбинаторное вычисление Планком плотности энергии равновесного теплового излучения, казалось бы, соответствовало использованию ансамбля Больцмана, а не Гиббса и, тем самым, концепции классического описания природы.

В течение почти двадцати пяти лет предметом ожесточенной дискуссии был вопрос о том, как могло случиться, что применение Планком ансамбля Больцмана привело его к правильной формуле для закона теплового излучения. Недоумение сохранялось вплоть до появления работы Бозе. Его анализ теплового излучения и последующие расчеты Эйнштейна для одноатомного идеального газа окончательно показали, что Планк оказался абсолютно прав, выдвинув свою гипотезу. Фактически, он предложил вариант комбинаторного вычисления, учитывающий принципиальную неразличимость введенных им объектов — квантов энергии. Тем самым, он интуитивно пользовался ансамблем Гиббса, характерным для неклассической физики.

Однако вклад Планка в понимание роли стохастического воздействия этим не ограничился. Исходя из интуитивных соображений, задолго до Шредингера он показал, что у квантовых осцилляторов, моделирующих гармонические моды излучения, энергия колебаний не исчезает и при нулевой температуре, а ее величина определяется постоянной Планка. С современной точки зрения, это означает, что квантовое стохастическое воздействие сохраняется и при контакте с «холодным термостатом».

Что касается Эйнштейна, то квантовую теорию теплового излучения, а затем и теории кристаллической решетки и одноатомного идеального газа он исходно строил при отличной от нуля температуре, т. е. в «термодинамической оболочке». Иными словами, для описания квантовых явлений он неявно применял неклассический ensemble Гиббса, показавший свою эффективность в его работах по неквантовой версии статистической термодинамики. Повидимому, эти работы Эйнштейна послужили одним из источников уверенности Блохинцева в справедливости его подхода к квантовой механике.

Отметим, что Эйнштейн успешно вычислял квантово-тепловые флуктуации, что сыграло решающую роль в выдвижении им революционной идеи фотона и установления его необычных свойств, включая понятие о вероятностном смысле волновой функции фотона. В конечном итоге это привело Эйнштейна [29] к важнейшему тезису о необходимости обобщенного толкования теплового воздействия окружения, в которое, по его мнению, должны давать вклады совместно стохастические воздействия квантового и теплового типов, определяемые постоянными Планка и Больцмана соответственно.

На этом фоне и происходило становление фундаментальных идей московской школы об универсальном статистическом описании целостной неклассической физики. Они прошли определенную эволюцию и, в конце концов, в сжатой форме были сформулированы Д. И. Блохинцевым в следующем виде (1978 г.) [12]: «Основные споры сосредоточились вокруг понимания

волновой функции. Дает ли волновая функция объективное и полное описание физической реальности или она является только «записной книжкой» наблюдателя?... Описывает ли волновая функция состояние частицы или системы частиц?

...Мы ограничимся разъяснением поставленных выше вопросов, исходя из концепции квантовых ансамблей... Эта концепция... отличается от... концепции копенгагенской школы тем, что отводит более скромную роль наблюдателю и повсюду подчеркивает объективный характер квантовых ансамблей и управляющих ими закономерностей.

Концепция квантовых ансамблей очень близка к концепции классического ансамбля Гиббса... В ансамбле Гиббса микросистема рассматривается во взаимодействии с макроскопическим термостатом, имеющим температуру  $\Theta$ . Вероятность  $W_\Theta$  того или иного результата измерения динамических переменных микросистемы относится к ансамблю, образованному путем неограниченного повторения микросистем  $\mu$  в одной и той же макроскопической обстановке, заданной термостатом с температурой  $\Theta$ .

Квантовый ансамбль в полной аналогии с классическим ансамблем Гиббса образуется путем неограниченного повторения *ситуаций*, образованных одной и той же микросистемой  $\mu$ , погруженной в одну и ту же макроскопическую обстановку  $\mathcal{M}$ , которая диктует ей квантово-механическое *состояние*. Это состояние описывается амплитудой вероятности, т. е. волновой функцией  $\Psi_{\mathcal{M}}$ ... Макрообстановка может как искусственно создаваться в лаборатории, так и возникать сама по себе в *природных условиях*. В этом смысле волновая функция  $\Psi_{\mathcal{M}}$  ... является *объективной* характеристикой квантового ансамбля и в принципе может быть найдена из измерения».

Как это обычно бывает у первооткрывателей, не все свои прозрения Блохинцев высказывал в законченной форме. Между тем, можно уверенно говорить о том, что Блохинцев был по-видимому первым, кто отчетливо почувствовал эволюцию физического смысла понятия статистического коллектива, которая имела место в книге Гиббса при переходе изложения от первых восьми глав к девятой. Однако поскольку это было для него абсолютно органично, он даже не продекларировал свое открытие в явной форме.

Поэтому сегодня уже нетрудно понять, в связи с чем столь глубокие утверждения Блохинцева встречали долгие годы значительное сопротивление как сторонников классических взглядов на природу, так и столь правоверных «копенгагенцев» как Фок. Все было связано с многолетним недопониманием ими качественных различий между ансамблями Больцмана и Гиббса и отсутствием устоявшейся терминологии.

Между тем большинство его оппонентов не догадывалось о том, что в книге Гиббса одновременно используются оба ансамбля — *assembly* Больцмана и *ensemble* Гиббса, причем преимущественно *assembly*. Поэтому они считали, что Блохинцев методологически сводит квантовую механику к классической статистической механике, что явно не соответствовало экспериментальным данным, и тем самым поощряет поиск скрытых параметров в духе классической статистической механики.

Прояснению этих вопросов весьма способствовало то обстоятельство, что, в конце концов, удалось достичь существенного прогресса в понимании смысла вероятности в физике в целом, выйдя тем самым за рамки квантовой механики, к чему всегда стремился Блохинцев. Как он писал в 1977 г. [41], «вероятность есть числовая мера потенциальной возможности того или иного розыгрыша событий. Розыгрыш происходит в некотором статистическом ансамбле событий, который должен быть определен ясно сформулированными *материальными условиями*. ...Вероятность не есть характеристика индивидуальной механической системы самой по себе. Она постольку принадлежит такой системе, поскольку эта система является членом определенного статистического ансамбля». Заметим, что в квантовой механике под материальными условиями понимается макрообстановка, которая формирует *состояние* микрообъекта, а в статистической термодинамике ту же роль играет термостат, формирующий состояние макрообъекта. Тем самым, в понимании Блохинцева понятие квантового ансамбля Гиббса, т.е. *ensemble*, при его использовании в микроописании становится неотделимым от понятия состояния, описываемого волновой функцией.

Иными словами, характеристики статистического коллектива в случае использования ансамбля Гиббса формируются в ходе взаимодействия микрообъекта с естественным макроокружением, которое определяет его состояние. В частности, макроокружение может быть создано и искусственно в ходе постановки конкретного опыта. В результате вероятность имеет смысл характеристики отдельного объекта, но не *per se* (самого по себе), а только как члена соответствующего неклассического ансамбля, формируемого одинаковыми внешними условиями. В этом случае проявляется концептуальная близость между понятиями состояния в неклассической теории и неклассическим ансамблем.

Среди важных методологических проблем, которым уделял существенное внимание Блохинцев, особое место занимала проблема «вероятность и объективность познания». Она была тесно связана с трактовкой прибора и роли наблюдателя в квантовой механике. В начальный период ее развития эти вопросы были на первом плане, ибо именно при их решении можно было заметить существенные отличия квантовой механики от классических (детерминистских) теорий физики. Это невольно приводило к преувеличению роли прибора и самого наблюдателя, что породило различные субъективистские толкования вплоть до представления об определяющей роли сознания наблюдателя.

Между тем как прежде, так и теперь все выглядит достаточно просто. Как отмечал Фок (1957 г.) [14], «мы можем назвать “прибором” такое устройство, которое, с одной стороны, может взаимодействовать с микрообъектом и реагировать на его воздействия, а с другой стороны, допускает с точностью, достаточной для данной цели, классическое (детерминистское) описание... В этом определении прибора совершенно несущественно, сделан ли “прибор” человеческими руками или он представляет естественное... сочетание внешних условий, в которые помещен микрообъект. Важно лишь то, что эти условия должны описываться классически».

В этой же связи Блохинцев писал (1968 г.) [41]: «Наблюдатель не участвует в событиях..., поэтому должен быть исключен из игры... Парадоксы, свойственные пониманию волновой функции как сборника информации, как записной книжки наблюдателя, разъясняются, если подвергнуть анализу... действие микросистемы на прибор». Здесь речь идет о стохастическом квантовом взаимодействии макрообъекта и микросистемы, формирующем ее состояние. Минимальная величина этого взаимодействия определяется постоянной Планка. Отсюда иногда делается вывод о том, что ее численное значение демонстрирует пределы познания микросистемы, заданные самой Природой.

Однако следует подчеркнуть что неконтролируемость стохастического воздействия квантового (как, впрочем, и теплового) типа нельзя понимать как отражение произвольного («человеко-размерного») вмешательства экспериментатора в естественный ход событий. Неконтролируемое стохастическое воздействие объективно существует в Природе и отражает характер взаимодействия макрообстановки с микрообъектом, который «чувствителен» к этому воздействию.

С учетом этого в квантовой механике рассматриваются два качественно различных способа изменения состояния. Первый из них — это формирование начального состояния  $\psi(0)$  и редукция конечного состояния вследствие изменения макрообстановки. В этих процессах определяющим фактором является стохастическое (неконтролируемое) воздействие. Второй способ — это эволюция состояния  $\psi(t)$  согласно уравнению Шредингера, которое само по себе является вполне детерминистским, ибо в него входит гамильтониан системы как отражение регулярного (контролируемого) воздействия на систему со стороны окружения.

Возвращаясь к вопросу о познаваемости Природы, заметим, что минимальное стохастическое воздействие квантового типа состоит в обмене элементарным квантом действия. Это обстоятельство и тем самым наличие универсальной постоянной Планка (также как и наличие постоянной Больцмана в статистической термодинамике) ограничивает познаваемость Природы, по мнению Блохинцева, не больше, чем существование предельной скорости движения, равной скорости света в вакууме. Просто такова природа вещей.

Другое дело, что существование предельной скорости не ограничивает точность характеристик объекта, в то время как существование постоянных Планка и Больцмана является фактором, регулирующим «точность» отклика характеристик системы на воздействие. Как известно, в этом случае следует, вообще говоря, учитывать флуктуации (часто не совсем точно называемые неопределенностями) характеристик системы и соответствующие корреляции между ними. Как весьма недвусмысленно высказался в связи с этим Блохинцев, «...открытая в квантовой области конечность взаимодействий... не ставит каких-либо границ познанию» [10].

К этому следует только добавить, что «стиль» познания при этом, конечно, становится иным, т. е. неклассическим, причем общим и для квантовых, и для тепловых явлений. По поводу неопределенностей характеристик, присущих квантовому описанию объекта, Блохинцев писал: «...представление о “неопре-

деленности" возникает лишь при неправомерном применении *классических* величин к *новым по своей природе* объектам» [10].

С методологической точки зрения, флуктуации характеристик и корреляции между ними являются не ограничителями пределов познания, а новыми объективными качествами поведения объекта, которые должны быть приняты во внимание исследователем Природы. Это означает, что стохастическое поведение объекта, обусловленное в квантовой механике существованием постоянной Планка, а в неквантовой версии статистической термодинамики — постоянной Больцмана, принимается, согласно Блохинцеву, как изначальная *данность*, а вероятностный язык его описания становится объективно *первичным* средством его *адекватного* рассмотрения и на микро-, и на макроуровнях. Тем не менее, дальнейшее раскрытие физического смысла стохастического воздействия обоих типов и органичное включение его характеристик в целостную теорию неклассической физики, остается задачей для будущих исследователей [43, 44].

## **7. Сто лет спустя: роль идей Блохинцева в формировании оснований целостной неклассической физики**

О методологических идеях Блохинцева об основаниях квантовой механики, адресованных научному сообществу, за многие годы было написано немало как им самим, так и его последователями и комментаторами. Поэтому уже давно сложилось мнение о том, что его подход является одной из признанных интерпретаций квантовой механики. Вместе с тем, к сожалению, можно констатировать, что современные адепты копенгагенской школы до сих пор отвергают его позицию. Они по-прежнему считают, что квадрат модуля волновой функции имеет смысл плотности вероятности, но характеризует при этом одиночный микрообъект. Заметим кстати, что в этом случае приоритет имеет амплитуда волновой функции, но ее фаза полностью игнорируется.

Одновременно оппоненты Блохинцева выступают за полное исключение ансамблевого подхода как излишнего, ссылаясь при этом на аксиоматическую теорию вероятностей, предложенную А. Н. Колмогоровым. Однако сам автор этой теории в своих автобиографических заметках прямо подчеркивал, что она нужна, прежде всего, для строгого математического обоснования понятия вероятности. Он утверждал, что для использования этого понятия в естествознании вполне достаточно частотной интерпретации данного понятия фон Мизеса. Обращаем внимание на то, что именно точка зрения фон Мизеса лежит в основе ансамблевого подхода Блохинцева.

Тонким местом в имеющихся разногласиях оказывается проблема равновероятности элементарных событий, образующих ансамбль. Не вдаваясь в обсуждение математических аспектов этой проблемы, скажем, что для естествознания она решается достаточно очевидно. Само собой разумеется, что повторные измерения имеют смысл только при воспроизведении одинаковых внешних условий. Разумеется, термин «измерение» при этом трактуется, согласно Блохинцеву и даже Фоку, в том смысле, что в качестве прибора может выступать природное сочетание внешних условий, в которое помещен

микрообъект (например, таковым является кристаллическая решетка для электрона в кристалле).

Оппоненты ансамблевого подхода в подтверждение своей точки зрения ссылаются на высказывания признанных авторитетов в математике и теоретической физике, таких как фон Нейман, Фаддеев и другие. Между тем, ознакомление с текстами тех же авторов позволяет сделать прямо противоположные выводы. Для примера приведем несколько высказываний, которые никак не могут трактоваться как отрицание ими ансамблевого подхода.

Так, И. фон Нейман [45]: «Исследование физических величин на одной-единственной системе не является единственным, что мы можем делать — особенно тогда, когда возникает сомнение относительно одновременной измеримости различных величин. В таких случаях можно рассматривать и большие статистические ансамбли, состоящие из многих систем (т. е. из  $N$  экземпляров исходной системы,  $N$  велико)... Такие ансамбли, называемые коллективами, вообще необходимы, чтобы можно было обосновать теорию вероятности как науку о частотностях. Они были введены фон Мизесом, который осознал их значение для теории вероятности и осуществил их надлежащее построение (ср., например [31])».

Л. Д. Фаддеев [46]: «Мы будем считать, что условия эксперимента определяют состояние системы, если при многократных повторениях опыта при этих условиях для всех наблюдаемых возникает вероятностное распределение их возможных значений».

Все эти соображения вполне согласуются с выводом Блохинцева [11]: «Суть дела заключается в том, что какой бы результат наблюдения ни осуществился, в одном-единственном измерении он меняет лишь наше субъективное отношение к обнаруженному факту... Объективное значение имеет лишь распределение результатов измерения, возникающее при проведении большого числа измерений в ансамбле».

С сожалением отметим, что все эти проблемы, хотя иногда и обсуждаются сегодня, на самом деле принадлежат далекому прошлому. Поэтому нельзя согласиться с тем, что многие исследователи творчества Блохинцева рассматривают его лишь в историческом контексте, уделяя по-прежнему главное внимание анализу его методологического вклада в завершение дискуссий 1920–1950 гг., посвященных интерпретации квантовой механики.

Вместе с тем, по нашему мнению, его необходимо рассматривать на более широком фоне современных проблем теоретической физики, а именно — стремления к целостному описанию природы не только средствами формальной математики, но и к установлению взаимосвязи между различными физическими теориями через проникновение в физическую сущность объектов и явлений природы. Здесь мы видим, что идеи Блохинцева очень современны.

Кредо Блохинцева было в полном согласии с изначальными взглядами Планка и Эйнштейна на переворот в физике, произошедший на грани XIX–XX веков и связанный с переходом от классического к неклассическому описанию природы. Блохинцев был убежден в принципиальной роли стохастических воздействий окружения на объект и концептуальной близости квантового и теплового типов этих воздействий. Воплощением этой близости

является его уверенность в том, что вся неклассическая физика описывается одним и тем же статистическим ансамблем — ensemble Гиббса. В частности, он писал [11]: «Ансамбль Гиббса по мере приближения к абсолютному нулю сам собой переходит в квантовый ансамбль». В связи с современной трактовкой принципа соответствия [46] подобное возможно только в том случае, если тип ансамбля принципиально не меняется.

Смелость Блохинцева состояла в том, что в критической для квантовой механики ситуации он рискнул выйти за ее пределы, как это и предписывается теоремой Геделя. В награду за это он увидел новые горизонты развития физики. Последующие исследования Боголюбова, Фейнмана, Умэдзавы [47] и ряда других теоретиков во второй половине XX века показали, что создание целостной теории неклассической физики на основе ensemble Гиббса, т. е. универсальное описание квантовых и тепловых явлений — это один из возможных путей реализации мечты о целостной картине мира.

В заключение благодарно отметим, что учебник и книги Блохинцева по квантовой механике во многом сформировали наше научное мировоззрение, а изучение его творческого наследия придало импульс собственным размышлениям над взаимосвязями различных физических теорий и путях достижения их единства:

### Список литературы

1. *Эйнштейн А.* Мои последние годы // Собр. науч. тр.: В 4-х т. Т. 4. М.: Наука, 1967. С. 217.
2. *Мандельштам Л. И.* Лекции по квантовой механике // Собр. соч. Т. 5. М.: Изд-во АН СССР, 1950.
3. *Голубева О. Н., Суханов А. Д.* Д. И. Блохинцев и взгляды московской школы на фундаментальные основания квантовой механики. Исследования по истории физики и механики. М.: Наука, 2006. С. 54.
4. *Golubjeva O. N., Sukhanov A. D.* Development of the Ensemble Approach in Non-classical Physics (from M. Planck to D. Blokhintsev) // Proc. of the XIII Intern. Conf. on Selected Problems of Math. Phys. Dubna: JINR, 2009.
5. *Никольский К. В.* Принципы квантовой механики. I // УФН. 1936. Т. 16. С. 537.
6. *Никольский К. В.* Квантовая механика молекул. М.–Л.: ГТТИ, 1934.
7. *Никольский К. В.* Квантовые процессы. М.: ГТТИ, 1940.
8. *Гиббс Дж.* Основные принципы статистической механики / Пер. с предисл. К. В. Никольского. М.–Л.: ОГИЗ, 1946.
9. *Блохинцев Д. И.* Введение в квантовую механику. М.–Л.: Гостехиздат, 1944.
10. *Блохинцев Д. И.* Основы квантовой механики. 7-е изд. СПб.: Лань, 2004.
11. *Блохинцев Д. И.* Принципиальные вопросы квантовой механики. М.: Наука, 1966.
12. *Блохинцев Д. И.* Квантовая механика. Лекции по избранным вопросам. Дубна: ОИЯИ, 1978.
13. *Horne D., Whitaker M. A.* Ensemble Interpretation of Quantum Mechanics: A Modern Perspective // Phys. Rep. 1992. V. 210, № 4. P. 225.
14. *Фок В. А.* Об интерпретации квантовой механики // УФН. 1957. Т. 62, № 4. С. 461.

15. *Эйнштейн А.* К квантовой теории излучения // Собр. науч. тр. Т. 3. М.: Наука, 1966. С. 393.
16. *Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М.–Л.: ГТТИ, 1946; Собр. науч. тр.: В 12 т./Ред.-сост. А. Д. Суханов. Т. 5. М.: Наука, 2006. С. 138.
17. *Борн М.* Статистические теории Эйнштейна // Физика в жизни моего поколения. М.: Мир, 1963. С. 172.
18. *Планк М.* Избр. тр. М.: Наука, 1975. С. 270.
19. *Суханов А. Д.* Столетие неклассической физики // Тр. Междунар. конф. «Сто лет квантовой физики. История. Физика. Философия». М.: НИА Природа, 2002. С. 39.
20. *Эйнштейн А.* Об одной эвристической точке зрения, касающейся возникновения и превращения света // Собр. науч. тр. Т. 3. М.: Наука, 1966. С. 92.
21. *Эйнштейн А.* Теория излучения планка и теория удельной теплоемкости // Собр. науч. тр. Т. 3. М.: Наука, 1966. С. 134.
22. *Эйнштейн А.* К общей молекулярной теории теплоты // Собр. науч. тр. Т. 3. М.: Наука, 1966. С. 67.
23. *Эйнштейн А.* О движении взвешенных в покоящейся жидкости частиц, требуемом молекулярно-кинетической теорией теплоты // Собр. науч. тр. Т. 3. М.: Наука, 1966. С. 108.
24. *Эйнштейн А.* О границе применимости теоремы о термодинамическом равновесии и возможности нового определения элементарных квантов // Собр. науч. тр. Т. 3. М.: Наука, 1966. С. 145.
25. *Эйнштейн А.* Теория опалесценции в однородных жидкостях и жидких смесях вблизи критического состояния // Собр. науч. тр. Т. 3. М.: Наука, 1966. С. 216.
26. *Суханов А. Д.* Статистико-термодинамические идеи Эйнштейна в современной физической картине мира // ЭЧАЯ. 2005. Т. 36, № 6. С. 1281.
27. *Эйнштейн А.* Теория основ термодинамики // Собр. науч. тр. Т. 3. М.: Наука, 1966. С. 50.
28. *Суханов А. Д., Рудой Ю. Г.* Об одной незамеченной идее Гиббса // УФН. 2006. Т. 176, № 5. С. 551.
29. *Эйнштейн А.* К квантовой теории // Собр. науч. тр. Т. 3. М.: Наука, 1966. С. 328.
30. *t'Hooft G.* Final talk on the conference «Albert Einstein Century», Paris, France, 2005. AIP Conf. Proc. V. 861/Eds. J.-M. Alimi, R. Fusfa. N.-Y.: Melville, 2006. P. 251.
31. *von Mises R.* Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Berlin: Springer, 1928. S. 373 (Пер.: Вероятность и статистика. М.: Комкнига, 2007).
32. *Голубева О. Н., Суханов А. Д.* К вопросу о принципах структурирования физического знания // Тр. XI Междунар. конф. по логике, методологии и философии науки. Т. 8. Обнинск: ОГУ, 1995. С. 160.
33. *Голубева О. Н., Суханов А. Д.* Структура физического знания и определение границ классической физики. Наука. Возможности и границы. М.: Наука, 2003. С. 266.
34. *Фейнман Р.* Статистическая механика. М.: Мир, 1978.
35. *Oppenheim I.* Ensembles Versus Assemblies and the Approach to Equilibrium // Proc. of Gibbs' Symposium. Yale. AMS AIP, 1989. P. 143.
36. *Блохинцев Д. И.* Мой путь в науке (автореферат работ, 1977 г.) // Дмитрий Иванович Блохинцев: К столетию со дня рождения. Дубна: ОИЯИ, 2007. С. 7.



37. *Эйнштейн А.* К современному состоянию проблемы удельной теплоемкости // Собр. науч. тр. Т. 3. М.: Наука, 1966. С. 277.
38. *Боголюбов Н. Н., Крылов Н. М.* Об уравнениях Фоккера–Планка (применение к классической и квантовой механике) // Собр. науч. тр.: В 12 т./Ред.-сост. А. Д. Суханов. Т. 5. М.: Наука, 2006. С. 60.
39. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике // Собр. науч. тр.: В 12 т./Ред.-сост. А. Д. Суханов. Т. 4. М.: Наука, 2006. С. 9.
40. *Боголюбов Н. Н.* Микроскопические решения уравнения Больцмана–Энскога в кинетической теории для упругих шаров // Собр. науч. тр.: В 12 т./Ред.-сост. А. Д. Суханов. Т. 5. М.: Наука, 2006. С. 608.
41. *Блохинцев Д. И.* Классическая статистическая физика и квантовая механика // УФН. 1977. Т. 122, № 4. С. 745.
42. *Блохинцев Д. И.* О взаимодействии микрочастицы с измерительным прибором // УФН. 1968. Т. 95, № 1. С. 75.
43. *Суханов А. Д.* Квантовое обобщение статистической термодинамики. Эффективные макропараметры // ТМФ. 2008. Т. 154, № 1. С. 183.
44. *Суханов А. Д., Голубева О. Н.* К квантовому обобщению статистической термодинамики.  $(\hbar, k)$ -динамика // ТМФ. 2009. Т. 160, № 2. С. 1177.
45. *фон Нейман И.* Математические основы квантовой механики / Ред. Н. Н. Боголюбов. М.: Наука, 1964.
46. *Л. Д. Фаддеев, О. А. Якубовский* Лекции по квантовой механике. Л.–Д.: ЛГУ, 1980.
47. *Umezawa H.* Advanced Field Theory. Micro, Macro and Thermal Physics. N.Y.: AIP, 1993.

# Часть VII

## КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ И ТЕОРИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

72

### СМЕЩЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ, ВЫЗВАННОЕ ОБРАТНЫМ ДЕЙСТВИЕМ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ\*

В § 1 работы рассматривается, согласно квантовой теории излучения, смещение спектральных линий, вызванное обратным действием поля излучения. В § 2 показано, что это смещение может быть получено и из классической теории поля при условии распределения заряда электрона таким образом, как он распределен в атоме согласно законам квантовой механики. В заключение обращается внимание на то обстоятельство, что лучшие измерения тонкой структуры у  $\text{He}^+$  (произведенные Пашеном) указывают на наличие смещения по порядку величины, совпадающего с вычисленным.

#### § 1. Квантовый расчет

Задача, рассматриваемая в этой работе, уже неоднократно изучалась рядом авторов<sup>1</sup>. Речь идет о вычислении спонтанного излучения возбужденного атома, согласно принципам квантовой электродинамики. Отличие от предыдущих работ заключается в последовательном проведении решения соответствующих уравнений. Благодаря этому отпадают всякие двусмысленности, связанные с расчетом смещения, приводившие некоторых авторов к заключению о неопределенности этого смещения, так что в этом пункте даже усматривали принципиальную трудность квантовой теории излучения.

Квантово-механически интересующая нас задача ставится следующим образом. Пусть в момент времени  $t = 0$  атом находится в возбужденном состоянии  $m$ . Амплитуда этого состояния пусть будет  $a$ . Благодаря взаимодействию с электромагнитным полем, рассматриваемым как совокупность осцилляторов, отличающихся друг от друга частотой  $\omega_s$ , поляризацией колебаний  $\mathbf{e}_s$  и направлением их распространения  $\mathbf{K}_s$  ( $\mathbf{K}_s$  — волновой вектор), атом может перейти в низшее состояние  $n$  и испустить при этом квант света сорта  $s$ .

\* Доклад на семинаре ФИАН. 1938 г.

<sup>1</sup> Основная работа: *Weisskopf V., Wigner E.* // *Zs. für Phys.* 1930. Bd. 63. S. 54; *Ibid.* 1930. Bd. 65. S. 18. Ср. также изложение этого вопроса в книгах: *Heitler W.* *Quantum Theory of Radiation.* Oxford, 1936. P. 110; *Wentzel G.* // *Hnd. B. d. Phys.* 1933. Bd. XXIV. Th. 1; *Френкель Я. И.* *Волновая механика.* Ч. II. ОНТИ, 1934.

Амплитуду такого конечного состояния обозначим через  $a_s$ . Тогда величина  $|a_s|^2$  для  $t \rightarrow \infty$  дает нам вероятность того, что при спонтанном переходе  $m \rightarrow n$  будет излучен квант сорта  $s$ . То есть  $|a_s|^2$  дает нам спектральное распределение излучения для перехода  $m \rightarrow n$  («форму линии»).

В первом приближении система уравнений, из которой определяются величины  $a$  и  $a_s$  может быть записана следующим образом<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{da}{dt} &= \sum_s (0|H|\omega_s) e^{i(\omega_s - \omega_0)t} a_s, \\ i\hbar \frac{da_s}{dt} &= (\omega_s|H|0) e^{i(\omega_0 - \omega_s)t} a \end{aligned} \quad (1)$$

при начальных условиях:  $a(0) = 1$ ,  $a_s(0) = 0$ .

Здесь  $(0|H|\omega_s) = (\omega_s|H|0)^*$  — матричный элемент энергии взаимодействия электрона с электромагнитным осциллятором сорта  $s$ ,  $\omega_s$  — частота этого осциллятора, а  $\omega_0 = \frac{E_m - E_n}{\hbar}$  есть резонансная частота для перехода  $m \rightarrow n$ ,  $E_m$  — энергия начального, а  $E_n$  — конечного состояния.

Для решения системы (1) мы сведем ее к интегральному уравнению для амплитуды  $a$ . Для этой цели выразим  $a_s$  через  $a$ :

$$a_s = \frac{1}{i\hbar} (\omega_s|H|0) \int_0^t e^{i(\omega_0 - \omega_s)\tau} a(\tau) d\tau \quad (2)$$

и, подставляя в первое из уравнений (1), получим:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_s |(\omega_s|H|0)|^2 e^{i(\omega_s - \omega_0)t} \int_0^t e^{i(\omega_0 - \omega_s)\tau} a(\tau) d\tau. \quad (3')$$

Заменяя здесь  $t$  на  $t'$  и интегрируя по  $t'$  от 0 до  $t$ , причем справа по частям, находим

$$\begin{aligned} a(t) - 1 &= -\frac{1}{\hbar^2} \sum_s |(\omega_s|H|0)|^2 \frac{e^{i(\omega_s - \omega_0)t}}{i(\omega_s - \omega_0)} \int_0^t e^{i(\omega_0 - \omega_s)\tau} a(\tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{\hbar^2} \sum_s |(\omega_s|H|0)|^2 \int_0^t \frac{a(\tau) d\tau}{i(\omega_s - \omega_0)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Это и есть искомое интегральное уравнение для  $a$ . Суммы здесь могут быть заменены интегралами. Для этого заметим, что

$$(0|H|\omega_s) = \frac{e}{\mu c} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_s}} (m|\mathbf{e}_s e^{i\mathbf{K}_s \cdot \mathbf{r}}|n), \quad (4)$$

<sup>1</sup> См. Heitler W. loc. cit. С. 111 формулы (3a) и (3b).

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор электрона, а  $\mathbf{p}$  его импульс<sup>1</sup>. Полагая

$$\left( m | e^{i\mathbf{K}_s \cdot \mathbf{r}} \mathbf{p} | n \right) = \mathbf{P}_{mn}, \quad (5)$$

получаем

$$\sum_{\omega_s, \omega_s + d\omega_s} \frac{1}{\hbar^2} |(\omega_s | H | 0)|^2 = F(\omega) d\omega, \quad (6)$$

где

$$F(\omega) = \rho(\omega) \frac{2\pi e^2}{\hbar \omega \mu^2} \int_{\Omega} |\mathbf{e} \mathbf{P}_{mn}|^2 d\Omega. \quad (7)$$

Причем здесь  $\rho(\omega)$  есть плотность числа световых колебаний на интервале частот  $d\omega$  и в телесном угле  $d\Omega$ .  $\int \dots d\Omega$  обозначает интегрирование по всем направлениям распространения и суммирование по двум независимым поляризациям  $\mathbf{e}_s$ . Известно, что<sup>2</sup>

$$F(\omega_0) = \frac{W}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\tau_0}, \quad (8)$$

где  $W$  — полная вероятность перехода из состояния  $m$  в  $n$  за 1 с, а  $\tau_0$  — время жизни атома в возбужденном состоянии.

С помощью (6) уравнение (3) может быть переписано в виде:

$$a(t) - 1 = - \int_0^t a(\tau) d\tau \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{F(\omega) e^{i(\omega - \omega_0)(t - \tau)}}{i(\omega - \omega_0)} d\omega + \int_0^t a(\tau) d\tau \mathcal{P} \int_0^t \frac{F(\omega) d\omega}{i(\omega - \omega_0)}. \quad (9)$$

Здесь знак  $\mathcal{P}$  означает главное значение интеграла.

Для решения этого уравнения заметим, что первый интеграл по  $\tau$  может быть разбит на два интеграла:

$$\int_0^t \dots d\tau = \int_0^{t-T} a(\tau) d\tau \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{F(\omega) e^{i(\omega - \omega_0)(t - \tau)}}{i(\omega - \omega_0)} d\omega + \int_{t-T}^t a(\tau) d\tau \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{F(\omega) e^{i(\omega - \omega_0)(t - \tau)}}{i(\omega - \omega_0)} d\omega.$$

Если теперь рассматривать такие  $t$ , что  $t \gg T \gg 1/\omega_0$ , то первый из этих интегралов будет равен:

$$\int_0^\infty \frac{F(\omega) e^{i(\omega - \omega_0)(t - \tau)}}{\omega - \omega_0} d\omega = i\pi F(\omega_0). \quad (10)$$

<sup>1</sup> См. Heitler W. loc. cit. С. 104, формулы (3) и (3').

<sup>2</sup> Heitler W. loc. cit. С. 113 формула (11).

Во втором же интеграле можно заменить  $e^{i(\omega-\omega_0)(t-\tau)}$  на 1 и тогда, обозначая

$$\mathcal{P} \int_0^\infty \frac{F(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega = \delta\omega_0, \quad (11)$$

получим, что второй интеграл мал по сравнению с первым для всех  $t \gg 1/\omega_0$ . Таким образом для времени  $t$ , значительно превышающем период собственных колебаний  $1/\omega_0$ , имеем<sup>1</sup>

$$a(t) - 1 = -[\pi F(\omega_0) + i\delta\omega_0] \int_0^\tau a(\tau) d\tau. \quad (12)$$

Отсюда находим

$$a(t) = \exp[-\pi F(\omega_0)t - i\delta\omega_0 t]. \quad (13)$$

Подставляя (13) во (2), вычисляя  $|a_s|^2$  и суммируя по  $s$  в интервале частот  $d\omega$  и интегрируя по всем направлениям  $d\Omega$ , получим следующую формулу для распределения интенсивности в пределах линии:

$$I(\omega) d\omega = \text{const} \frac{F(\omega) d\omega}{(\omega_0 - \delta\omega_0 - \omega)^2 + \Delta^2}. \quad (14)$$

Таким образом мы имеем явные формулы для ширины линии

$$\Delta = \pi F(\omega_0) = \frac{1}{2} W \quad (15)$$

и смещения относительно  $\omega_0$ <sup>2</sup>

$$\delta\omega_0 = \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{F(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0}. \quad (16)$$

В следующем параграфе мы сопоставим эти формулы с результатами классической теории.

<sup>1</sup> При явно заданном виде  $F(\omega)$  интегралы, фигурирующие в (9), могут быть непосредственно вычислены. Такое прямое вычисление было сделано для первой линии серии Лаймана ( $2p \rightarrow 1s$ ). Это вычисление, ввиду его громоздкости, мы не приводим в данной статье и ограничиваемся лишь указанием на то, что оно сводится к уравнению (12) с некоторыми дополнительными членами, исчезающими для  $t \gg 1/\omega_0$ . Сравни также классический расчет в § 2.

<sup>2</sup> Сравни с результатом Дирака: Дирак П. А. М. Основы квантовой механики. § 55. Формула (50).

## § 2. Классический расчет

Чтобы провести классический расчет как можно ближе к квантовому, мы рассмотрим методом Гамильтона задачу об обратном действии поля излучения на колеблющийся электрон. При этом заряд электрона мы будем считать распределенным в пространстве с некоторой плотностью  $e\rho$  и это распределение будем считать недеформируемым. Масса электрона пусть будет  $\mu$ , частота собственных колебаний  $\omega_0$ . Направление колебаний пусть совпадает с осью  $OX$ .

Обозначая радиус-вектор центра тяжести электрона через  $\mathbf{r}(x, 0, 0)$  и радиус-вектор произвольной точки пространства через  $\mathbf{R}$ , получим следующее уравнение движения электрона:

$$\mu \ddot{x} + \mu \omega_0^2 x = e \int \rho(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \mathcal{E}_x(\mathbf{R}) dV_{\mathbf{R}}, \quad (17)$$

где  $\mathcal{E}_x$  — компонента электрического поля по оси  $OX$ , а  $\int \dots dV_{\mathbf{R}}$  обозначает интегрирование по всему пространству. При этом мы имеем в виду электрическое волновое поле, излучаемое рассматриваемым электроном. Это поле мы будем описывать вектором-потенциалом  $\mathbf{A}$ . Разлагая его по плоским волнам

$$\mathbf{A} = \sum_s q_s \mathbf{A}_s + \text{сопряж.}, \quad \mathbf{A}_s = \mathbf{e}_s \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} e^{i\mathbf{K}_s \mathbf{R}}, \quad (18)$$

(здесь  $V$  — объем некоторого основного параллелепипеда) получим известным образом<sup>1</sup> для координат  $q_s$ , вместо уравнения Деламбера, следующие уравнения движения:

$$\ddot{q}_s + \omega_s^2 q_s = \frac{e}{c} \int \rho(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \dot{x} \mathbf{A}_{sx}^* dV_{\mathbf{R}} \quad (19)$$

или

$$\ddot{q}_s + \omega_s^2 q_s = \frac{e}{c} \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} \dot{x} e_{sx} \int \rho(\mathbf{R} - \mathbf{r}) e^{i\mathbf{K}_s \mathbf{R}} dV_{\mathbf{R}} \quad (19')$$

и

$$\mu \ddot{x} + \mu \omega_0^2 x = -\frac{e}{c} \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} \sum_s \dot{q}_s e_{sx} \int \rho(\mathbf{R} - \mathbf{r}) e^{i\mathbf{K}_s \mathbf{R}} dV_{\mathbf{R}} + \text{сопряж.} \quad (17')$$

<sup>1</sup> Heitler W. loc. cit. Гл. 1, § 6.

Вводя здесь вместо  $\mathbf{R} - \mathbf{r}$  вектор  $\mathbf{R}'$  и обозначая  $\int \rho(\mathbf{R}') e^{i\mathbf{K}_s \mathbf{R}'} dV_{\mathbf{R}'} = \rho(K_s)$ , получим:

$$\ddot{q}_s + \omega_s^2 q_s = \frac{e}{c} \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} \dot{x} e_{sx} e^{iK_{sx}x} \rho^*(K_s), \quad (19'')$$

$$\mu \ddot{x}_s + \mu \omega_0^2 x = -\frac{e}{c} \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} \sum_s \dot{q}_s e_{sx} e^{iK_{sx}x} \rho^*(K_s) + \text{сопряж.}$$

Из первого уравнения в (19'') мы можем выразить  $\dot{q}_s$  через правую часть:

$$\dot{q}_s = \frac{1}{\omega_s} \frac{e}{c} \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} e_{sx} \rho(K_s) \int_0^t \dot{x}(\tau) \cos \omega_s(t - \tau) e^{-iK_{sx}x(\tau)} d\tau.$$

Подставляя это в (17') и переходя от суммы по  $s$  к интегралу, получим

$$\begin{aligned} \mu \ddot{x} + \mu \omega_0^2 x = & -\frac{e^2}{c^3} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \omega^2 \left| \rho\left(\frac{\omega}{c}\right) \right|^2 d\omega \int_\Omega e_x^2 d\Omega \times \\ & \times \int_0^t \dot{x}(\tau) \cos \omega(t - \tau) e^{iK_x[x(t) - x(\tau)]} d\tau + \text{сопряж.} \end{aligned} \quad (20)$$

Если  $\left| \rho\left(\frac{\omega}{c}\right) \right|^2$  быстро убывает с ростом  $\omega$  и амплитуда колебаний центра тяжести электрона невелика, то можно пренебречь фазой волн в пределах амплитуды и опустить фазовый множитель под интегралом по  $\tau$ . Интегрирование по углам и суммирование по поляризациям дает  $4\pi/3$ . Так что уравнение (20) может быть записано в виде:

$$\mu \ddot{x} + \mu \omega_0^2 x = -\frac{e^2}{c^3} \frac{4}{3\pi} \int_0^\infty \omega^2 \left| \rho\left(\frac{\omega}{c}\right) \right|^2 d\omega \int_0^t \dot{x}(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau. \quad (20')$$

Будем искать решение этого уравнения в виде:

$$x = a e^{-(i\omega' + \gamma)t}. \quad (21)$$

Подставляя это в (20') и интегрируя по  $d\tau$  найдем:

$$\begin{aligned} \mu \ddot{x} + \mu \omega_0^2 x = & -\frac{e^2}{c^3} \frac{2a}{3\pi} (i\omega' + \gamma) \left\{ e^{-i\omega't - \gamma t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2 \left| \rho\left(\frac{\omega}{c}\right) \right|^2 d\omega}{i(\omega' - \omega) + \gamma} - \right. \\ & \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2 \left| \rho\left(\frac{\omega}{c}\right) \right|^2 e^{-i\omega't} d\omega}{i(\omega' - \omega) + \gamma} \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

В первом из этих интегралов можно пренебречь величиной  $\gamma$  в знаменателе. Обозначим

$$b = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2 \left| \rho\left(\frac{\omega}{c}\right) \right|^2 d\omega}{\omega - \omega'}. \quad (23)$$

Второй интеграл в предположении, что  $\left| \rho\left(\frac{\omega}{c}\right) \right|^2$  регулярна на бесконечном полукруге, дает:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2 \left| \rho\left(\frac{\omega}{c}\right) \right|^2 e^{-i\omega t} d\omega}{(\omega' - \omega) - i\gamma} = 2\pi i (\omega' - i\gamma)^2 \left| \rho\left(\frac{\omega' - i\gamma}{c}\right) \right|^2 e^{-i\omega' t - \gamma t} + \varphi(t), \quad (23')$$

где  $\varphi(t)$  — некоторая функция, получающаяся за счет вклада полюсов функции  $\left| \rho\left(\frac{\omega}{c}\right) \right|^2$ . Ниже мы покажем, что  $\varphi(t) e^{i\omega' t + \gamma t} \rightarrow 0$  при  $t \gg 1/\omega_0$ . Поэтому, ограничиваясь достаточно большими  $t$ , мы можем сократить уравнение (22) на  $x$  и получить:

$$(i\omega' + \gamma)^2 + \omega_0^2 = -\frac{e^2}{\mu c^3} \frac{2}{3\pi} (i\omega' + \gamma) \left[ ib + 2\pi (\omega' - i\gamma)^2 \left| \rho\left(\frac{\omega' - i\gamma}{c}\right) \right|^2 \right]. \quad (22')$$

В этом уравнении справа можно положить  $\gamma = 0$  и  $\omega' = \omega_0$ . Кроме того, для длинных волн  $\left| \rho\left(\frac{\omega' - i\gamma}{c}\right) \right|^2 = 1$ . Сравнивая правую и левую части, найдем коэффициент трения  $\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2}{\mu c^3} \omega_0^2$ , ширину линии  $\Delta = \gamma/2$ , смещение частоты

$$\delta\omega_0 = \omega_0 - \omega' = \frac{e^2}{3\pi\mu c^3} b. \quad (24)$$

Таким образом, распределенный, колеблющийся как целое электрон, благодаря обратному действию поля излучения не только испытывает радиационное трение, но и колеблется со смещенной (для  $b > 0$  в красную сторону) частотой.

Заметим, что член с  $b$  в уравнении (22) пропорциональный  $x$ , в том же приближении, может считаться пропорциональным  $\ddot{x}$ , так как  $\ddot{x} = -x/\omega_0^2$ . При таком рассмотрении изменение частоты колебаний может быть истолковано как результат изменения электромагнитной массы электрона из-за взаимодействия с излучением (при заданном коэффициенте упругости  $\kappa_0^2 = \mu\omega_0^2$ ). Действительно, уравнение (22) для  $x$  с помощью (23), (23') и (24) может быть записано в виде:

$$\mu \ddot{x} + \kappa_0^2 x = -\frac{e^2}{c^3} \frac{2}{3\pi} b \frac{\ddot{x}}{\omega_0} - \omega \gamma \ddot{x}.$$



Отсюда находим изменение массы:  $\delta\mu = +\frac{e^2}{c^3} \frac{2}{3\pi} \frac{b}{\omega_0}$ ; происходящее благодаря этому изменение частоты, как легко видеть, выражается формулой (24).

В квантовой теории это изменение частоты может рассматриваться как результат изменения массы виртуального осциллятора.

Рассмотрим теперь распределение плотности заряда электрона, которое совпадает с распределением плотности заряда электрона в нижнем состоянии атома водорода, предписываемым квантовой механикой. Это будет

$$\rho(r) = \frac{1}{8\pi a^3} e^{-r/a},$$

где  $a$  — радиус первой боровской орбиты. Тогда имеем:

$$\rho(K) = \frac{1}{[1 + a^2\omega^2/c^2]^2}, \quad \frac{\omega}{c} = K.$$

Заметим, что другие более сложные распределения будут получаться путем дифференцирования  $\rho(K)$  по  $K_x, K_y, K_z$ ; таким образом полюса функций  $\left|\rho\left(\frac{\omega}{c}\right)\right|$  всегда определяются точками  $\omega = \pm i\frac{c}{a} = \pm iq$ . Поэтому функция  $\varphi(t)$  в (23) будет полиномом от  $t$ , умноженным на  $e^{-qt}$ . Так как  $q > \omega_0 \gg \gamma$ , то наше утверждение о стремлении к нулю  $\varphi e^{+\gamma t}$  в этом случае оправдано. Вычисляя для этого распределения  $\rho(K)$ , находим функцию  $b$  (23):

$$\begin{aligned} b &= \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2 d\omega}{(\omega - \omega') \left(1 + \frac{\omega^2}{q^2}\right)^4} = \\ &= \omega' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\left(1 + \frac{\omega^2}{q^2}\right)^4} + \omega'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{(\omega - \omega') \left(1 + \frac{\omega^2}{q^2}\right)^4} = \frac{5\pi}{16} \omega' q. \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда на основании (24) получим для отношения смещения к ширине линии

$$\frac{\delta\omega_0}{\Delta} = \frac{5}{16} \frac{q}{\omega_0} = \frac{5}{16} \frac{c}{a\omega_0}. \quad (26)$$

Этот результат только численным фактором отличается от того, который вытекает из квантовой механики. Действительно, приводимый ниже расчет для смещения линии Лаймана  $2p \rightarrow 1s$  дает результат, отличающийся от (26) множителем  $3/4$ .

Таким образом, рассмотренное в §1 смещение частоты может быть получено и из классической теории поля. Однако распределение плотности электрического заряда электрона приходится заимствовать из квантовой механики. В этом смысле смещение частоты является квантовым эффектом.

<sup>1</sup> Первый член формулы (25) получается из первого интеграла предшествующей формулы. Второй интеграл также может быть вычислен и если  $\omega/q \ll 1$ , то, как нетрудно убедиться, он мал.

### § 3. Расчет смещения частоты для первой линии Лаймана $2p \rightarrow 1s$

В этом параграфе мы рассчитаем смещение частоты  $\delta\omega_0$  для линии Лаймана  $2p \rightarrow 1s$ . Для этого оптического перехода имеем следующие волновые функции<sup>1</sup>:

$$\psi_{2p} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-1/2\rho} \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \\ \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}, \end{cases}$$

$\psi_{1s} = \frac{2}{\sqrt{4\pi}} e^{-\rho}$ ,  $\rho = r/a$  и  $a$  — радиус первой орбиты Бора. Вводя вектор  $\mathbf{K}$ ,  $|\mathbf{K}| = a(\omega/c)$ , получим из (5) путем несложного интегрирования:

$$P_x = -\sqrt{2} \frac{i\hbar}{a} \frac{\partial}{\partial K_x} \frac{K_x}{(9/4 + K^2)^2}$$

и аналогично для  $P_y$ ,  $P_z$ . Таким образом

$$\mathbf{eP} = -\sqrt{2} \frac{i\hbar}{2a} \frac{e_z}{(9/4 + K^2)^2}$$

и, наконец, согласно (7)

$$F(\omega) = \frac{1}{6\pi} \frac{\hbar e^2 c}{\mu^2 a^6} \frac{\omega}{(q^2 + \omega^2)^4}, \quad \text{где } q = \frac{3c}{2a}. \quad (27)$$

Заметим, что  $\alpha = \frac{\omega_0}{q} = \frac{1}{4} \frac{Ze^2}{\hbar c} \ll 1$ . Обозначая  $F(\omega) = N \frac{\omega}{(q^2 + \omega^2)^4}$  и подставляя это в (16), получим для смещения первой линии Лаймана:

$$\delta\omega_0 = N \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\omega d\omega}{(q^2 + \omega^2)^4 (\omega - \omega_0)}. \quad (28)$$

Эту формулу можно написать еще так:

$$\delta\omega_0 = N \int_0^\infty \frac{d\omega}{(q^2 + \omega^2)^4} + N\omega_0 \left\{ Q \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega - \omega_0} + \int_0^\infty \frac{A\omega^7 + B\omega^6 + \dots + H}{(q^2 + \omega^2)^4} d\omega \right\}.$$

При этом коэффициенты  $Q, A, B, \dots, H$  определяются из сравнения коэффициентов при соответствующих степенях  $\omega$ . Легко видеть, что  $Q = -A$

<sup>1</sup> См. Бете Г. Квантовая механика простейших систем. ОНТИ, 1935. §§ 1 и 3.

и поэтому интегралы сходятся. Вычисление их элементарно и приводит к следующему результату:

$$\delta\omega_0 = F(\omega_0) \ln \frac{1}{\alpha} \quad (29)$$

(при этом высшие степени  $\alpha^n$ , начиная с  $\alpha^0$ , встречающиеся в выражении  $\delta\omega_0$ , опущены ввиду малости  $\alpha$ ). На основании (8) имеем:

$$\delta\omega_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\tau_0} \ln \frac{1}{\alpha}, \quad (29)$$

поэтому

$$\frac{\delta\omega_0}{\Delta} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{\alpha}. \quad (30)$$

Относительное смещение равно

$$\frac{\delta\omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\omega_0 \tau_0} \cdot \ln \frac{1}{\alpha}.$$

Для первой линии серии Лаймана это дает  $\delta\omega_0/\omega_0 = 2,8 \cdot 10^{-8}$ , что соответствует  $\delta\lambda_0 = +3,5 \cdot 10^{-5} \text{ \AA}$ . К сожалению, достаточно точных измерений этой линии нет. Опыты Пашена<sup>1</sup> для тонкой структуры линий  $4685 \text{ \AA}$  ( $\text{He}^+$ ) дают смещение по сравнению с теоретическим расчетом по Дираку  $\delta\omega/\omega = 10^{-7}-10^{-6}$ . Таким образом вычисленное смещение по порядку величины согласуется с наблюдением Пашена, равным образом и направление смещения соответствует сдвигу в красную сторону.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Комментарий. Расчет сдвига атомных уровней, вызванного обратным действием поля излучения, был фактически первой существенно квантово-полевой задачей, где возникали явные расходимости. Без устранения тем или иным способом этих расходящихся выражений нельзя было прийти к конечному ответу. На современном языке данной задаче можно сопоставить три однопетлевых диаграммы Фейнмана 3-го порядка с одной электронной линией и двумя фотонными, одна из которых описывает виртуальный фотон, а вторая — кулоновское поле ядра<sup>2</sup>. Кроме расходимостей, здесь был еще один усложняющий элемент, а именно, электрон был не свободным, а находился в связанном состоянии в атоме.

<sup>1</sup> *Paschen* // Ann. d. Phys. 1927. Bd. 387. S. 689. См. также *Бете*. loc cit. С. 71–72.

© Б. М. Барбашов, В. В. Нестеренко (Комментарий), 2009.

<sup>2</sup> Простое, но строгое обсуждение всей техники расчета лэмбовского сдвига можно найти, например, в книге: *Бете Г., Солпитер Э.* Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. М: Физматгиз, 1960. § 19.

Даже в настоящее время нет универсальных методов решения таких задач. Техника устранения расходимостей (процедура перенормировок) разработана только для процессов рассеяния, когда в начальном и конечном состояниях присутствуют только свободные частицы. Для связанных состояний такой универсальной процедуры нет, и на практике приходится комбинировать релятивистские и нерелятивистские расчеты. Поэтому неудивительно, что первые попытки вычисления смещения атомных уровней, о которых говорит Д. И. Блохинцев в начале своей работы, были неудачными.

В этой ситуации расчет, выполненный Дмитрием Ивановичем, следует признать принципиально важным, так как он был доведен до конкретного численного ответа. Тем самым было продемонстрировано, что сдвиг атомных уровней, обусловленный взаимодействием электрона с излучением, есть реальный эффект, имеющий конечную величину.

Несомненно, плодотворной оказалась и идея Дмитрия Ивановича связать возникающую в данной задаче расходимость с изменением (перенормировкой) массы электрона за счет его взаимодействия с излучением (или точнее, с виртуальным электромагнитным полем). Эту идею он высказал в контексте предложенной им классической модели рассматриваемой задачи. Спустя почти 10 лет аналогичную идею перенормировки массы электрона в рамках классической электродинамики выдвинул Х. А. Крамерс (1947), а к расчету лэмбовского сдвига ее применил Г. Бете<sup>1</sup>.

Д. И. Блохинцев рассчитывает смещение частоты  $\delta\omega$  для фиксированной линии в спектре атома водорода (численное значение  $\delta\omega$  найдено для первой линии в серии Лаймана, переход  $2p \rightarrow 1s$ ). Очевидно, что  $\delta\omega$  определяется *разностью смещений каждого из этих уровней в отдельности*. В этом месте подход Д. И. Блохинцева существенно отличается от всех последующих работ по данной проблеме, в которых вычислялся радиационный сдвиг энергии *отдельного уровня*. Благодаря такой схеме расчета Дмитрий Иванович не сталкивается с явными расходимостями при квантовом рассмотрении данной задачи. Радиационные поправки к массе электрона, находящегося на разных уровнях в атоме, взаимно сокращаются. Интересно отметить, что формула для смещения частоты перехода, полученная Дмитрием Ивановичем, совпадает с формулой, найденной Дираком для сдвига частоты поглощения при резонансном рассеянии.

В своей работе Д. И. Блохинцев использует теорию квантовых переходов или, согласно современной терминологии, временную теорию возмущений, в то время как Г. Бете и др. (спустя десять лет) использовали при расчете сдвига отдельного уровня метод стационарных состояний. Позднее<sup>2</sup> Дмитрий Иванович показал, что процессы испускания и поглощения света и, в частности, естественная ширина спектральных линий и *смещение частоты ради-*

---

<sup>1</sup> Обширную литературу по проблеме лэмбовского сдвига можно найти в сборниках оригинальных статей: Сдвиг уровней атомных электронов. М.: Изд-во иностр. лит., 1950; Новейшее развитие квантовой электродинамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.

<sup>2</sup> Блохинцев Д. И. Вычисление естественной ширины спектральных линий стационарным методом // ЖЭТФ. 1946. Т. 16, вып. 11. С. 965–966.

ационных переходов могут рассчитываться также и методом стационарных состояний.

В последующих исследованиях (см. подстрочное примечание 1 на предыдущей странице) было установлено, что при расчете радиационного сдвига нерелятивистское приближение дает основной вклад, сдвиг  $s$ -уровня происходит вверх, а  $p$ -уровня — вниз, причем по абсолютной величине первый сдвиг на два порядка превышает второй. Поэтому сдвиг  $\delta\omega$  для перехода  $2p \rightarrow 1s$  должен быть в красную сторону, как это и получено Д. И. Блохинцевым. Таким образом, Дмитрий Иванович рассчитал в 1938 г. фактически радиационный сдвиг  $s$ -уровня.

*Б. М. Барбашов, В. В. Нестеренко*

## ЗАМЕЧАНИЯ О ВОЗМОЖНОМ РЕЛЯТИВИСТСКИ-ИНВАРИАНТНОМ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ ПОЛЯ\*

Обсуждается возможность взаимодействий, распространяющихся со скоростью, превосходящей скорость света, и совместимых с требованием лоренцевской инвариантности.

### 1. Введение

В связи с известными трудностями в теории взаимодействия элементарных частиц, неоднократно высказывалась мысль о возможности иных, отличных от известных в макроскопическом мире, пространственно-временных отношений [1–3]. Эти отличия могут заключаться либо в особенностях метрики малых пространственно-временных интервалов, либо в иных законах связи физических явлений. Мы намерены обсудить лишь вторую возможность, так как основные требования теории относительности к ковариантности пространства и времени, по всей видимости, соблюдается для сколь угодно малых отрезков длины и времени.

В современной теории связи между явлениями осуществляются на основе принципа причинности, согласно которому состояние физической реальности в момент времени  $t$  (или же история, предшествующая моменту  $t$ ) определяет ее состояние в момент  $t + dt$ . При этом генетически связанными оказываются лишь такие физические события, которые лежат внутри светового конуса (или на его поверхности):  $s^2 = t^2 - \rho^2 \geq 0$ .

В противном случае последовательность причины и следствия не будет релятивистски-инвариантной. С другой стороны, условие  $s^2 \geq 0$  означает конечную скорость распространения взаимодействий (сигналов)  $v$ , не превосходящую скорости света  $c = 1$ .

Таким образом известное условие  $v \leq c$  связано не столько с преобразованиями Лоренца, выражающими независимость протекания физических явлений от точки зрения равноправных наблюдателей, сколько с формой принципа причинности, принятого теперь в физике.

Изложенная концепция полностью сохраняется и в современных статистических теориях (в статистической механике, в квантовой механике), в которых она фигурирует не только применительно к статистическим понятиям

(вероятность, волновая функция), но и применительно к взаимодействиям элементарных частиц. Между тем предположение о такой кальвинистической предопределенности в поведении элементарных частиц может оказаться необязательным и стеснительным (в отличие от макроскопической физики, где нет никаких оснований сомневаться в инвариантности порядка причины и следствия).

В недавней работе Гейзенберга [4] высказывалась мысль, согласно которой несостоятельность современных теорий элементарных частиц может быть обусловлена применением метода Гамильтона, согласно которому состояние микросистем в момент времени  $t + dt$  определяется их состоянием в предшествующий момент времени  $t$ .

Обращаясь к явлениям, в которых существенную роль играют малые пространственно-временные интервалы, и предполагая, что непосредственно измеряемыми величинами являются величины, относящиеся к большим пространственно-временным интервалам, мы можем рассчитывать на построение такой теории, в которой отказ от инвариантности причинной связи для малых масштабов пространства-времени не ведет к противоречиям в области тех больших масштабов, где уже возможны прямые измерения.

## § 2. Обобщение понятия поля

В связи с изложенным становится разумным такой подход к теории поля, который бы содержал возможно меньшее число допущений и опирался исключительно на самые общие свойства пространства-времени. Рассмотрим некоторое поле  $A$  и его источники  $Q$ . Ограничиваясь линейными теориями, мы можем написать наиболее общее линейное соотношение между  $A$  и  $Q$  в виде

$$A(P) = \int K(P, P') Q(P') d\Omega', \quad (1)$$

где  $P$  есть точка  $(\mathbf{x}, t)$ ,  $P' — точка  $(\mathbf{x}', t')$ ,  $d\Omega' = dt' d\mathbf{x}'$ .$

Интервал между мировыми точками  $P$  и  $P'$  обозначим через  $s$ : ( $s^2 = \tau^2 - \rho^2$ ,  $\tau = t' - t$ ,  $\rho = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ ). В силу однородности и изотропности пространства-времени  $K$  должно быть функцией только от  $s^2$ . Мы можем еще потребовать, чтобы по оси времени было выделено направление, указывающее на различие прошедшего и будущего. Это может быть сделано, например, с помощью параметра  $\gamma$ , принимающего значение  $+1$  для абсолютного будущего (верхняя часть светового конуса) и значение  $-1$  для абсолютного прошедшего (нижняя часть светового конуса). Тогда  $K = K(s^2\gamma)$  и, следовательно, общий вид  $K$  будет<sup>1</sup>:

$$K = M(s^2) + \gamma N(s^2). \quad (2)$$

<sup>1</sup> Мы рассматриваем скалярные поля и, соответственно, скалярное ядро. Возможно любое другое предположение, совместимое с требованиями ковариантности. Заметим, что форма ядра  $K$  (2) включает в себя все известные в современной физике скалярные взаимодействия (ядро  $K$  следует тогда рассматривать как функцию Грина инвариантного дифференциального уравнения).

Величины  $M$ ,  $N$  будем рассматривать как функции параметра  $s_0^2$  — универсальной меры интервала  $s^2$ .

Пусть при  $s_0^2 \rightarrow 0$ ,  $M$  и  $N$  стремятся к  $\delta$ -функциям от  $s^2$  с коэффициентами  $a$  и  $b$  так, что предельное значение  $K$  равно  $\delta(s^2)(a + \gamma b)$ . Тогда для предельного ядра  $K$  получаем из (1):

$$A(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(a + b) \int \frac{Q(\mathbf{x} + \boldsymbol{\rho}, t + \rho)}{\rho} d\boldsymbol{\rho} + \frac{1}{2}(a - b) \int \frac{Q(\mathbf{x} + \boldsymbol{\rho}, t - \rho)}{\rho} d\boldsymbol{\rho}. \quad (3)$$

При  $b = -a$  получается запаздывающий потенциал для сигнала, распространяющегося со скоростью света; при  $b = a$  — опережающий потенциал; при  $b = 0$ ,  $a = 1$  — симметричный; наконец, при  $b = 1$ ,  $a = 0$  — антисимметричный, соответствующий предельному переходу  $\lambda$  (см. [5]).

Если при  $s_0^2 \neq 0$   $M$  и  $N$  быстро исчезают с ростом  $|s^2|$ , то взаимодействие на больших расстояниях или для больших интервалов времени будет передаваться по мировым линиям, тем более близким к образуемому светового конуса, чем больше пространственный или временный промежуток, отделяющий источник от точки наблюдения (так как взаимодействия вне светового конуса становятся малыми). Тем не менее подобное взаимодействие совместимо лишь со статистическим описанием явлений. В духе соответствия с квантовой механикой мы можем считать, что малость взаимодействия соответствует малости вероятности любого эффекта, связанного с малым взаимодействием (вероятности перехода пропорциональны квадратам матричных элементов энергии взаимодействия).

Поэтому, если мы имеем две системы  $A$  и  $B$ , то вероятность передачи взаимодействия от  $A$  к  $B$  по линии, лежащей вне светового конуса ( $s^2 \neq 0$ ), будет мала, вероятность констатировать скорость сигнала  $v > c$  тем меньше, чем больше временный или пространственный промежуток, отделяющий «момент» отправления сигнала от момента его «приема».

Если для  $|s^2| \gg s_0^2$ ,  $M(s^2)$  и  $N(s^2)$  уже очень малы, то фактически мы всегда будем получать скорость сигнала  $v = c$ , если  $\tau = |t' - t|$  или  $\rho = |\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \gg s_0^2$ .

Заметим, что предположение о существовании взаимодействий вида (1)<sup>1</sup> не может быть совмещено с принципами современной квантовой механики, так как взаимодействие (1) противоречит любой теории, основанной на предположении, что состояние в момент времени  $t$  определяет состояние в момент  $t + dt$ , в частности, противоречит методу Гамильтона и уравнению Шредингера. Однако это взаимодействие вполне совместимо с новой схемой (вернее, с программой) Гейзенберга, в которой нет уравнений движения, а рассматриваются лишь переходы от одного измерения (начальное состоя-

<sup>1</sup> Поскольку  $K(s^2, \gamma)$  не являются функцией Грина, отмеченная далее несовместимость поля (1) с уравнением Шредингера вполне аналогична показанной М. А. Марковым несовместимости теории релятивистски-инвариантно протяженного электрона с предположением о существовании волновой функции. См. его интересную работу [6].



ние) ко второму, последующему измерению (конечному состоянию), которые отделены друг от друга макроскопическим промежутком времени.

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступила  
12 июня 1945 г.

### Список литературы

1. *March A.* // ZS. f. Phys. 1934. Bd. 104. S. 93; 161.
2. *Wataghin G.* // ZS. f. Phys. 1934. Bd. 88. S. 92.
3. *Heisenberg W.* // Ann. d. Phys. 1938. Bd. 32. S. 20.
4. *Heisenberg W.* // ZS. f. Phys. 1942. Bd. 120. P. 513.
5. *Dirac P. A. M.* // Comm. oi Dublin Inst. for Adv. Stud. 1943.
6. *Марков М. А.* // ЖЭТФ. 1940. Т. 10. С. 1311.

## УРАВНЕНИЕ ДЛЯ РАССЕЯНИЯ ЧАСТИЦ С УЧЕТОМ РЕАКЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ\*

*Представлено академиком С. И. Вавиловым 25.05.1946*

Дается вывод интегрального уравнения для рассеяния частиц с учетом реакции рассеянных волн. Этот вывод является иллюстрацией общего метода, изложенного нами в предшествующей работе [1].

Уравнение для рассеяния частиц с учетом реакции рассеянных волн обычно выводят нестационарным методом. При этом приходится применять искусственные приемы для определения начальных данных промежуточных состояний [2, 3]. К тому же обычно исходят из дискретного спектра, что не соответствует существу дела и заставляет опять-таки прибегать к специальным приемам, чтобы согласовать расчет с законом сохранения импульса (см., например, [4]).

В дальнейшем мы намерены дать вывод интегрального уравнения для рассеяния частиц, свободный от этих привходящих затруднений. Этот вывод должен также послужить иллюстрацией метода «элементарной матрицы рассеяния», развитого нами в работе [1]. Мы будем исходить из метода стационарных состояний и с самого начала предполагаем непрерывный спектр.

Пусть  $(W(\mathbf{K}), \mathbf{K})$  есть вектор энергии-импульса для рассеивающей частицы («тяжелой»), а  $(\varepsilon(\mathbf{k}), \mathbf{k})$  — такой же вектор для рассеиваемой («легкой») частицы (фотон, мезон и т. п.). Уравнение для волновой функции нашей системы в импульсном представлении записывается так

$$\left[ E - W(\mathbf{K}) - \sum_1^n \varepsilon(\mathbf{k}) \right] \Psi(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \\ = \int \Omega(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n | \mathbf{K}', \mathbf{k}'_1, \dots, \mathbf{k}'_{n'}) \Psi(\mathbf{K}', \mathbf{k}'_1, \dots, \mathbf{k}'_{n'}) d\mathbf{K}' d\mathbf{k}'_1 \dots d\mathbf{k}'_{n'}, \quad (1)$$

где  $\Psi(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)$  — волновая функция состояния, в котором имеется одна тяжелая частица и  $n$  легких частиц;  $E$  — полная энергия системы,  $\Omega(\mathbf{k}, \dots | \mathbf{k}', \dots)$  — матричный элемент оператора, меняющего число легких частиц.

Для линейного взаимодействия оператор  $\Omega$  таков, что при каждом элементарном акте рассеяния испускается или поглощается только одна легкая частица. Поэтому матричные элементы  $\Omega$  имеют в этом случае вид:

$$\Omega(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_\alpha, \dots, \mathbf{k}_n | \mathbf{K}', \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_\alpha, \dots, \mathbf{k}'_{n+1}) = \\ = \delta(\mathfrak{K} - \mathfrak{K}') \delta(\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}_1) \dots \delta(\mathbf{k}'_n - \mathbf{k}_n) V(\mathbf{K} | \mathbf{K}', \mathbf{k}'_{n+1}), \quad (2)$$

$$\Omega(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_\alpha, \dots, \mathbf{k}_n | \mathbf{K}', \mathbf{k}'_1, \dots, \mathbf{k}'_\alpha, \dots, \mathbf{k}'_{n-1}) = \\ = \delta(\mathfrak{K} - \mathfrak{K}') \sum_{\alpha} \delta(\mathbf{k}_I - \mathbf{k}_1) \dots \delta(\mathbf{k}'_{\alpha-1} - \mathbf{k}_{\alpha-1}) \delta(\mathbf{k}'_{\alpha+1} - \\ - \mathbf{k}_{\alpha+1}) \dots \delta(\mathbf{k}'_{n-1} - \mathbf{k}_{n-1}) V(\mathbf{K}, \mathbf{k}_\alpha | \mathbf{K}'), \quad (2')$$

где  $\mathfrak{K} = \mathbf{K} + \sum_1^n \mathbf{k}_\alpha$  есть полный импульс системы, а  $V(\mathbf{K} | \mathbf{K}', \mathbf{k}')$  уже не содержит  $\delta$ -функций. В работе [1] дан общий вид операторов  $\Omega$ .

Волновую функцию  $\Psi$  мы должны искать в виде суммы первичной волны  $\Psi_i$  и рассеянной  $\Psi_s$ . Так как первичная волна является произведением  $\delta$ -функций:

$$\Psi(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \delta(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_{10}) \dots \delta(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_{n0}), \quad (3)$$

то она пропорциональна  $\delta(E - E_0)$  и при умножении на  $E - E_0$  даст нуль ( $E_0 = W(\mathbf{K}) + \sum_1^{n_0} \varepsilon(\mathbf{k}_{\sigma_0})$ ). В силу этого первичная волна не фигурирует в левой части (1).

Разделим теперь уравнение (1) на разность  $(E - W - \sum \varepsilon)$ . При этом делении, чтобы обеспечить расходящиеся рассеянные волны, мы должны воспользоваться  $\delta^+$ -функциями, определяемыми формулой:  $\delta^+(x) = \frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$ <sup>1</sup>. Мы выполним это деление путем введения оператора, представляющего акт элементарного рассеяния («элементарная матрица рассеяния»):

$$r(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n | \mathbf{K}', \mathbf{k}'_1, \dots, \mathbf{k}'_{n'}) = \\ = \delta^+ \left( E - W(\mathbf{K}) - \sum_1^n \varepsilon(\mathbf{k}_\alpha) \right) \Omega(\mathbf{K}, \mathbf{k}, \dots, \mathbf{k}_n | \mathbf{K}', \mathbf{k}'_1, \dots, \mathbf{k}'_{n'}). \quad (4)$$

С помощью этого оператора уравнение (1) переписывается теперь в виде:

$$\Psi_s = r\Psi_i + r\Psi_s. \quad (5)$$

<sup>1</sup> В работе [1] мы применяли определение  $\delta^+(x)$ , отличающееся от данного множителем  $-2\pi i$ .

В уравнении (5) те состояния, для которых выполняется закон сохранения энергии (закон сохранения импульса выполняется всегда в силу вида оператора  $\Omega$ ), будут автоматически представляться в бесконечности расходящимися волнами, а те, для которых он не соблюдается, — экспоненциально убывающими.

Прежде чем переходить к выводу интересующего нас уравнения, попробуем найти «точное» решение системы уравнений (5) в виде ряда по степеням параметра взаимодействия, иными словами — по степеням  $r$ .

Мы берем слово «точное» в кавычки, так как мы будем в дальнейшем поступать таким образом, как если бы эта система не содержала никаких расходящихся интегралов (можно считать, что мы вводим надлежащие «обрывающие факторы»). Тогда итерация системы (5) дает:

$$\Psi_s = (r + r^2 + r^3 + \dots + r^k + \dots) \Psi_i. \quad (6)$$

Пусть нас интересует процесс рассеяния, при котором число легких частиц меняется с  $i$  на  $s$ . Пусть, далее, наименьшее значение показателя степени  $r$ , при котором для такого процесса выполняется закон сохранения энергии, есть  $k$  (рассеяние  $(k-1)$ -го порядка,  $k = |s-i| + 2$ ). Возьмем из поля  $\Psi_s$  часть  $\Psi_s^{(k)}$ :

$$\Psi_s^{(k)} = (r_k + r^{k+2} + r^{k+4} + \dots) \Psi_i = \frac{r^k}{1 - r^2} \Psi_i. \quad (7)$$

Компонента  $\Phi_s^{(k)}$  поля  $\Psi_s^{(k)}$ , удовлетворяющая закону сохранения энергии, и будет представлять интересующую нас рассеянную волну. Из (17) получаем

$$\Psi_s^{(k)} = r^k \Psi_i + r^2 \Psi_s^{(k)}. \quad (8)$$

В этом уравнении, благодаря наличию справа члена  $r^2$ , содержится не только компонента  $\Phi_s^{(k)}$  с  $s$  легкими частицами, но и компоненты  $\Phi_{s+2}^{(k)}$  (не удовлетворяющая закону сохранения энергии) и  $\Phi_{s-2}^{(k)}$  (могущая удовлетворять этому закону; для  $k \leq 3$  она, однако, вообще отсутствует)<sup>1</sup>. Если отбросить в уравнении для  $\Phi_s^{(k)}$  недиагональные члены  $\Phi_{s\pm 2}^{(k)}$ , то мы получим из (8) уравнение, выведенное нами в работе [1] на основе идей соответствия. Это укороченное уравнение содержит только субматрицы  $(r^k)_{si}$  и  $(r^2)_{ss}$ , элементы которых относятся к переходам, при которых заведомо соблюдается закон сохранения энергии. При этом же условии для однократного рассеяния ( $k=2$ ) одной легкой частицы на одной тяжелой из (8) получается уравнение Heitler-Wilson'a в форме, исправленной S. T. Ma и C. F. Hsüen [4]. Это уравнение в наших обозначениях гласит

$$\Phi_1^{(1)} = (r^2)_{11} \Psi_1 + (r^2)_{11} \Phi_1^{(1)}. \quad (9)$$

<sup>1</sup> Уравнение (8) применимо также к замкнутым состояниям (дискретный спектр). Достаточно положить в (8)  $\Psi_i = 0$ . Отбрасывая недиагональные члены, которые могут быть малыми, получим, в качестве частного случая, уравнение И. Е. Тамма [5].

Вычисляя теперь  $(r^2)_{11}$  по формуле умножения матриц и подставляя значение матричных элементов  $r$  из (4), (2) и (2'), найдем:

$$r^2(\mathbf{K}, \mathbf{k} | \mathbf{K}''', \mathbf{k}''') = \delta^+(E - W(\mathbf{K}) - \varepsilon(\mathbf{k})) \delta(\mathbf{K} + \mathbf{k} - \mathbf{K}''' - \mathbf{k}''') \times \\ \times \{S(\mathbf{K}, \mathbf{k} | \mathbf{K}''', \mathbf{k}''') + \delta(\mathbf{k}''' - \mathbf{k}) Q(\mathbf{K}, \mathbf{k} | \mathbf{K}''', \mathbf{k}''')\}, \quad (10)$$

где

$$S(\mathbf{K}, \mathbf{k} | \mathbf{K}''', \mathbf{k}') = \frac{V(\mathbf{K}, \mathbf{k} | \mathbf{K} + \mathbf{k}) V(\mathbf{K} + \mathbf{k} | \mathbf{K}''', \mathbf{k}''')}{E - W(\mathbf{K} + \mathbf{k})} + \\ + \frac{V(\mathbf{K}, \mathbf{k} | \mathbf{K} - \mathbf{k}''', \mathbf{k}, \mathbf{k}''') V(\mathbf{K} - \mathbf{k}''', \mathbf{k}, \mathbf{k}'' | \mathbf{K}''', \mathbf{k}''')}{E - W(\mathbf{K} - \mathbf{k}''') - \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{k}''')}, \quad (11)$$

$$Q(\mathbf{K}, \mathbf{k} | \mathbf{K}''', \mathbf{k}''') = \int \frac{V(\mathbf{K}, \mathbf{k} | \mathbf{K} - \mathbf{k}'', \mathbf{k}, \mathbf{k}'') V(\mathbf{K} - \mathbf{k}'', \mathbf{k}, \mathbf{k}'' | \mathbf{K}''', \mathbf{k}''')}{E - W(\mathbf{K} - \mathbf{k}'') - \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{k}'')} d\mathbf{k}'' \quad (12)$$

Величина  $S(\mathbf{K}, \mathbf{k} | \mathbf{K}''', \mathbf{k}''')$  есть как раз тот матричный элемент, который обычно фигурирует в теории однократного рассеяния, а величина  $Q(\mathbf{K}, \mathbf{k} | \mathbf{K}''', \mathbf{k}''')$  при  $\mathbf{K}''' = \mathbf{K}$ ,  $\mathbf{k}''' = \mathbf{k}$  есть не что иное, как интеграл собственной энергии.

Подставляя значение  $r^2$  (10) в уравнение (9) и полагая  $\mathfrak{K}_0 = \mathbf{K}_0 + \mathbf{k}_0$ , где  $\mathbf{K}_0$  — импульс тяжелой частицы в начальном состоянии, а  $\mathbf{k}_0$  — импульс легкой частицы в этом же состоянии, мы получим:

$$\Phi_1^{(1)}(\mathbf{K}, \mathbf{k}) = \delta^+(E - W(\mathbf{K}) - \varepsilon(\mathbf{k})) \delta(\mathfrak{K} - \mathfrak{K}_0) \left\{ S(\mathbf{K}, \mathbf{k}_0 | \mathbf{K}_0, \mathbf{k}) + \right. \\ \left. + \int S(\mathbf{K} | \mathbf{K}''', \mathbf{k}''') \Phi_1^{(k)}(\mathbf{K}''', \mathbf{k}''') d\mathbf{K}''' d\mathbf{k}''' \right\} + \\ + \delta^+(E - W(\mathbf{K}) - \varepsilon(\mathbf{k})) \left\{ Q(\mathbf{K}_0, \mathbf{k}_0 | \mathbf{K}_0, \mathbf{k}_0) \delta(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + \right. \\ \left. + Q(\mathbf{K}, \mathbf{k} | \mathbf{K}, \mathbf{k}) \Phi_1^{(k)}(\mathbf{K}, \mathbf{k}) \right\}. \quad (13)$$

Если отбросить расходящиеся интегралы собственной энергии  $Q$ , которые здесь входят в уравнение аддитивно<sup>1</sup>, и положить

$$\Phi_1^{(k)}(\mathbf{K}, \mathbf{k}) = \delta^+(E - W(\mathbf{K}) - \varepsilon(\mathbf{k})) \delta(\mathfrak{K} - \mathfrak{K}_0) \varphi(\mathbf{K}, \mathbf{k}), \quad (14)$$

то из (13) получается уравнение для  $\varphi(\mathbf{K}, \mathbf{k})$ :

$$\varphi(\mathbf{K}, \mathbf{k}) = S(\mathbf{K}, \mathbf{k} | \mathbf{K}_0, \mathbf{k}_0) + \int S(\mathbf{K}, \mathbf{k} | \mathbf{K} + \mathbf{k} - \mathbf{k}', \mathbf{k}') \delta^+(E - W(\mathbf{K} + \mathbf{k} - \mathbf{k}') - \\ - \varepsilon(\mathbf{k}')) \varphi(\mathbf{K} + \mathbf{k} - \mathbf{k}', \mathbf{k}') d\mathbf{k}', \quad (15)$$

<sup>1</sup> В моей работе [1] уравнение (8) рассматривается само по себе, независимо от системы (5), как основа для негамильтонова метода. В таком новом аспекте становится физически допустимым рассматривать обрывающие факторы не как математическую фикцию, а как выражение протяженности частиц. Как было нами там показано, в этой новой схеме интегралы собственной энергии  $Q$  должны обращаться в нуль.

которое, в указанном выше смысле, является, вопреки обычному пониманию, точным. Уравнение (15) исследовалось разными авторами, в частности Ма и Hsüen [4], которые показали, что учет реакций при рассеянии мезонов на нуклонах ведет к падению эффективного сечения для больших энергий, в то время как без учета реакции это сечение растет как  $E^2$ .

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность В. А. Фоку за важное замечание, сделанное им при обсуждении этой работы.

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступила  
25 мая 1946 г.

### Список литературы

1. Блохинцев Д. И. // ЖЭТФ. 1947. Т. 17, вып. 3. С. 266. — Статья 76 в наст. издании. — *Прим. ред.*
2. Heitler W. // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1941. V. 37. P. 291.
3. Wilson W. // Ibid. V. 37. P. 301.
4. Ma S. T., Hsüen C. F. // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1943. V. 39. P. 168.
5. Tamm Ig. // J. of Phys. 1945. V. 9. P. 449.

## К ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ\*

Недавно Гейзенберг [1] отметил, что матрица рассеяния  $S = e^{2i\eta}$ , связывающая расходящиеся волны, рассеянные силовым центром, с падающими волнами, не теряет своего значения также и в случае таких малых значений энергии частицы, при которых волновой вектор  $k$  для волн  $e^{\pm ikr}/r$  становится мнимым и волны переходят в экспоненциальные функции с действительными показателями.

В этом случае матрица рассеяния  $e^{2i\eta}$  переводит экспоненциально убывающую функцию в экспоненциально растущую. Для стационарных состояний растущих волновых функций нет. Поэтому такие состояния характеризуются условием  $S = 0$  или  $\eta = i\infty$ .

Это обстоятельство позволяет нам найти возможные квантовые состояния частиц и соответствующую волновую функцию, если решена задача о рассеянии. Мы применяем данное рассуждение к движению частиц в кулоновском поле.

Волновые функции, описывающие рассеяние в кулоновском поле частицы с угловым моментом  $\hbar l$  ( $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ ), имеют вид

$$R_{\epsilon l}(\rho) = N e^{-i\rho\sqrt{2\epsilon}} (\rho\sqrt{8\epsilon})^l F\left(l + 1 + \frac{i}{\sqrt{2\epsilon}}, 2l + 2, i\rho\sqrt{8\epsilon}\right), \quad (1)$$

где  $N$  — нормировочный множитель,  $\rho = r/a$ ,  $r$  — радиус-вектор,  $a = \hbar^2/\mu e^2$ ,  $\epsilon = E/E_0$ ,  $E$  — энергия,  $E_0 = Z^2 e^4 \mu / \hbar^2$ ,  $F$  — обобщенная гипергеометрическая функция<sup>1</sup> [2]. При  $\rho \rightarrow \infty$   $R_{\epsilon l}(\rho)$  имеет следующую асимптотику:

$$R_{\epsilon l}(\rho) \simeq \frac{1}{\rho} \cos \left[ \rho\sqrt{8\epsilon} + \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \ln(\rho\sqrt{8\epsilon}) - \frac{\pi}{2}(l + 1) + \eta_l \right], \quad (2)$$

где фаза  $\eta_l$  определяется формулой (сравни с [2])

$$\eta_l = -\arg \Gamma\left(l + 1 + \frac{i}{\sqrt{2\epsilon}}\right), \quad (3)$$

\* J. of Phys. 1946. V. 10. P. 196.

© В. В. Нестеренко (Перевод), 2009.

<sup>1</sup> Функция  $F$  в решении (1) в современной литературе называется вырожденной гипергеометрической функцией. — Прим. ред.

причем

$$\arg \Gamma(z) = y\psi(x) + \sum_{n_r=0}^{\infty} \left( \frac{y}{x+n_r} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x+n_r} \right), \quad (4)$$

где  $z = x + iy$ ,  $x = l + 1$ ,  $y = 1/\sqrt{2\varepsilon}$ ,  $\psi(x)$  — логарифмическая производная гамма-функции (см. [3]).

Как было отмечено выше, мы должны положить  $\eta_l = i\infty$ . С помощью (4) находим корни этого уравнения:  $y = -i\infty$  и  $\operatorname{arctg}[y/(x+n_r)] = +i\infty$ , т. е.  $y/(x+n_r) = +i$ .

Подставляя эти значения  $x$  и  $y$  в аргумент  $\Gamma$ -функции в (3), получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} = +i(n_r + l + 1), \quad (5')$$

или

$$\varepsilon = -\frac{1}{2n^2}, \quad n = n_r + l + 1, \quad n_r = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Таким образом, мы нашли обычное выражение для энергетических уровней кулоновского поля<sup>1</sup>. Волновая функция непрерывного спектра (1) переходит в волновую функцию дискретного спектра при подстановке в (1)  $\varepsilon$  из формулы (5) (сравни с [2])

$$R_{\varepsilon l}(\rho) = N_{nl} e^{-\frac{1}{n}\rho} \left( \frac{2\rho}{n} \right)^l F\left(-n+l+1, 2l+2, \frac{2\rho}{n}\right). \quad (6)$$

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступила  
10 января 1946 г.

### Список литературы

1. Heizenberg W. // ZS. f. Phys. 1944. Bd. 123, Hf. 1-2. S. 93. См. также: Landau L., Smorodinsky J. // J. of Phys. 1944. V. 8. P. 154.
2. Фок В. А. Начала квантовой механики. Л., 1932.
3. Jahnke E., Emde F. Funktionentafeln. 4th ed. New York, 1945.

<sup>1</sup> Спектр атома водорода (5) непосредственно следует из требования  $S = e^{2i\eta_l} = 0$ , если использовать явное выражение для парциальной матрицы рассеяния  $S_l$ , которое фактически содержится в (3):

$$S_l = e^{2i\eta_l} = \frac{\Gamma\left(l+1 - \frac{i}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)}{\Gamma\left(l+1 + \frac{i}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)}.$$

Условию  $S_l = 0$  удовлетворяют те значения энергии  $\varepsilon$ , при которых гамма-функция, стоящая в знаменателе, имеет полюса

$$l+1 + \frac{i}{\sqrt{2\varepsilon}} = -n_r, \quad n_r = 0, 1, 2, \dots$$

И мы получаем формулы (5') и (5) без использования (4). — Прим. ред.



## О НЕГАМИЛЬТОНОВОМ МЕТОДЕ В ТЕОРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ\*

Вместо гейзенберговской схемы матрицы фазы рассматривается другая, более близкая к гамильтоновому методу трансформационная схема. С точки зрения этой схемы задача о нахождении собственной массы частиц сводится к решению некоторого трансцендентного уравнения.

### § 1. Два метода описания

Во всех современных физических теориях предполагается, что состояние физической реальности в момент времени  $t$  определяет состояние в последующий момент  $t + dt$ . Такой метод описания применительно к механике мы будем называть гамильтоновым.

Необходимое условие возможности такого метода заключается в распространении всех взаимодействий со скоростью, не превышающей скорости света в пустоте, так как только при таком условии деление на прошедшее и будущее релятивистски инвариантно (порядок «причины» и «следствия» одинаков во всех системах отсчета). По-видимому, это условие и достаточно. По крайней мере, если скорость распространения меньше скорости света, то нет никаких оснований для невозможности гамильтонового метода описания физической реальности.

Применение метода Гамильтона в теории точечных частиц ведет как в классической, так и в квантовой теориях к известным трудностям, связанным с расходимостью интегралов, выражающих собственную энергию таких частиц. Этих расходимостей можно избежать, если считать, что источники поля не являются точечными. Требование лоренцевой инвариантности ведет тогда к тому, что частица оказывается распределенной в некоторой четырехмерной области, масштабы которой определяются через  $s_0$  и  $s_0/c$  ( $s_0$  — величина порядка «радиуса» элементарной частицы,  $\sim 10^{-13}$  см). Взаимодействие между такими частицами будет распространяться со скоростью, большей скорости света<sup>1</sup>.

\* ЖЭТФ. 1947. Т. 17, вып. 3. С. 266–271. This paper by D. Blokhinzev «On a non-Hamiltonian method in the theory of elementary particle» is also published in English: J. Phys. 1947. V. 11, № 2. P. 179–183.

<sup>1</sup> Более строго можно говорить о протяженных частицах (см. М. А. Марков [2]) и можно говорить о точечных частицах, но считать, что взаимодействие распространяется не только внутри светового конуса, но и вблизи него, в пространственной области (ср. [1]). Это лишь два

Это, однако, не ведет к противоречию с макроскопической физикой, как могло бы показаться на первый взгляд. Нами было показано [1], что если в какой-либо системе отсчета «сигнал» приходит со скоростью, большей скорости света в пустоте, то с точки зрения наблюдателя этой системы он распространяется в областях  $|x' - x''| \sim s_0$ ,  $|t' - t''| \sim s_0/c$ , т.е. «внутри» частицы. Если же сигнал распространяется в больших пространственно-временных областях ( $|x' - x''| \gg s_0$  или  $|t' - t''| \gg s_0/c$ ), то он придет со скоростью, не превышающей скорости света.

Концепция протяженных частиц несовместима с гамильтоновыми методами, в какой бы форме они ни реализовались. По этой же причине подобная концепция невозможна в классических теориях, так как она несовместима с идеей движения по траектории (движение зависело бы не только от прошлого, но и от будущего).

Таким образом, идея протяженных частиц ведет в область *негамильтоновых* методов. В квантовой области возможно формулировать такой метод. В самом деле, вместо определения  $\psi_{t+dt}$  по  $\psi_t$  ( $\psi$  — волновая функция) мы можем ограничиться задачей об определении  $\psi_\infty$  по  $\psi_0$ . Так как в этом случае промежуток времени, разделяющий два состояния, неограниченно велик, то состояние  $\psi_t$  при  $t = \infty$  всегда лежит в абсолютном будущем по отношению к состоянию  $\psi_0$ . Тем самым дается деление на будущее и прошлое, не менее жесткое, чем деление, принятое в гамильтоновых методах описания. Иными словами, мы можем сказать, что в негамильтоновом методе мы должны ограничиться задачей определения рассеянных волн  $\psi_s$  по заданным первичным  $\psi_i$ . По всей видимости, это будет наиболее детальное описание физической реальности, возможное в рамках негамильтонового метода и в сущности вполне достаточное с точки зрения физического эксперимента.

Сходная формулировка негамильтонового метода была недавно предложена Гейзенбергом [3]<sup>1</sup>. Гейзенберг также предполагает существование некоторого универсального масштаба длины  $s_0$  и времени  $s_0/c$ , являющихся мерой тех малых пространственно-временных областей, внутри которых современная теория считается неприменимой.

Далее, он отказывается от волнового уравнения и вместо оператора Гамильтона вводит матрицу фазы  $\eta$ , которая определяет унитарную матрицу  $S = e^{i\eta}$ , показывающую согласно равенству

$$\psi_s = (e^{i\eta} - 1)\psi_i, \quad (1)$$

какие рассеянные волны  $\psi_s$  возникают в результате взаимодействия первичных волн  $\psi_i$ . Однако Гейзенберг не указывает никакой внутренней связи между предположением о существовании малого масштаба  $s_0$  и матрицей

аспекта одной и той же сущности. Поэтому в дальнейшем мы попросту говорим о протяженных частицах.

<sup>1</sup> Гейзенберг предлагает, однако, ограничиться рассмотрением  $\psi$ -волн на бесконечности. Таким образом, по Гейзенбергу, искомое волновое поле  $\psi_s$  не только отделено от первичного  $\psi_i$  бесконечно большим промежутком времени, но еще и определяется лишь для бесконечно больших расстояний от места столкновения частиц. Последнее ограничение не вытекает из приведенного выше определения негамильтонового метода.

фазы, призванной заменить понятие энергии взаимодействия. Гейзенбергу не удалось найти принципов, следуя которым можно определить матрицу фазы  $\eta$ . Эта последняя трудность, на наш взгляд, в значительной мере связана с отсутствием соответствия с современной теорией.

В релятивистской области взаимодействие частиц («тяжелых») рассматривается в современной теории как обусловленное поглощением и испусканием других частиц («легких»). Введем понятие «элементарной матрицы рассеяния», описывающей единичный акт рассеяния (поглощение или излучение легкой частицы). Элементы этой матрицы определим следующим образом:

$$r(k', k'') = -2\pi i \delta^+(W' - E) \Omega(k', k''), \quad (2)$$

где  $k'$  — совокупность импульсов частиц в конечном состоянии,  $k''$  — то же в начальном состоянии,  $W'$  — кинетическая энергия частиц в конечном состоянии,  $E$  — полная энергия системы, далее  $\delta^+(x) = \frac{1}{2\pi i x} + \frac{1}{2} \delta(x)$  (см. [4]),  $\Omega(k', k'')$  — оператор рождения или поглощения легких частиц. Релятивистская инвариантность требует, чтобы элементы матрицы  $\Omega$  имели вид:

$$\Omega(k', k'') = \delta(K' - K'') \frac{\text{Inv}(k', k'')}{\sqrt{W'_1 W'_2 \dots W'_{S'}} \sqrt{W''_1 W''_2 \dots W''_{S''}}} = \delta(K' - K'') \Omega^0(k', k''), \quad (3)$$

где  $K' = \sum_1^{S'} k'_\alpha$  — полный импульс в конечном состоянии,  $K'' = \sum_1^{S''} k''_\alpha$  — то же в начальном состоянии,  $W'_1, W'_2, \dots, W'_{S'}$  — кинетические энергии частиц в конечном, а  $W''_1, W''_2, \dots, W''_{S''}$  — то же в начальном состоянии.  $\text{Inv}(k', k'')$  есть инвариантная функция  $k', k''$ <sup>1</sup>. Нет необходимости добавлять, что все известные в современной теории операторы поглощения и излучения частиц имеют вид (3). Задание такого рода операторов в релятивистской теории аналогично заданию энергии взаимодействия в теории нерелятивистской.

Матрица рассеяния  $(e^{i\eta} - 1)$  может быть теперь выражена как функция матрицы  $r$ . Для этого вычислим высшие приближения теории возмущений. Тогда<sup>2</sup>

$$\psi_s = (r^k + r^{k+2} + r^{k+4} + \dots) \psi_i = \frac{r^k}{1 - r^2} \psi_i = R \psi_i \quad (4)$$

(разумеется, эта операция имеет только формальное значение ввиду известной расходимости собственной энергии точечных частиц). Здесь  $k \geq 2$

<sup>1</sup> Вообще величина, трансформирующаяся как  $a_{ik} \dots$ , имеет в  $k$ -представлении элементы:

$$(k' | a_{ik} \dots | k'') = \frac{Cv(a_{ik} \dots)}{\sqrt{W'_1 W'_2 \dots W'_{s'}} \sqrt{W''_1 W''_2 \dots W''_{s''}}},$$

где  $Cv(a_{ik} \dots)$  есть величина, ковариантная  $a_{ik} \dots$ , а  $W'_1, \dots, W'_{s'}, W''_1, \dots, W''_{s''}$  суть четвертые компоненты векторов  $k'_1, \dots, k'_{s'}, k''_1, \dots, k''_{s''}$  соответственно.

<sup>2</sup> Нас интересует та часть рассеянного поля, которая удовлетворяет закону сохранения энергии. Члены  $r^{k+1}, r^{k+3}, \dots$  ничего не добавляют к этой части. См. нашу работу [5].

есть наименьший показатель степени  $r$ , при котором состояние  $\psi_s$  связано с  $\psi_i$  с соблюдением закона сохранения энергии. Диагональные (в отношении полной энергии) элементы матрицы  $R = r^k / (1 - r^2)$  при  $k = 2, 3, \dots$  дают всю совокупность матричных элементов матрицы рассеяния  $(e^{i\eta} - 1)$ . Таким образом, задание гейзенберговской матрицы рассеяния должно быть приведено в соответствие с заданием всей совокупности решений гамильтоновой схемы, но не с заданием операторов  $r$ . В силу этого соотношение между схемой Гейзенберга и гамильтоновой схемой современной теории оказывается очень сложным. Простая связь получается лишь в борновском приближении, когда можно пренебречь величиной  $r^2$  в знаменателе (4). Тогда  $i\eta = r^k$ , но борновское приближение не представляет границы для современной теории. Отбрасывание члена  $r^2$  означает пренебрежение реакцией рассеянных волн, воздействием их на самих себя.

В гейзенберговой схеме эта реакция рассеянных волн, как мы видим, учитывается очень сложным образом; но его схема имеет то неоспоримое преимущество, что она оперирует лишь с реально наблюдаемыми состояниями  $\psi_s$ ,  $\psi_i$ , подчиняющимися законам сохранения энергии-импульса. Поэтому нам представляется разумным искать такое уравнение для реально наблюдаемых  $\psi_s$  и  $\psi_i$ , которое более простым образом учитывало бы реакцию рассеянных волн.

## § 2. Релятивистское уравнение

Мы можем получить такое уравнение, которое представляет некоторый компромисс между методом матрицы фазы и гамильтоновым методом современной теории, если вместо матрицы рассеяния  $R$  будем рассматривать две матрицы  $R_{si}$  и  $R_{ss}$ . Первая из них определяет связь рассеянной волны с первичной без учета реакции рассеянных волн, вторая же — эффект реакции. Соответствующее уравнение, связывающее  $\psi_s$  и  $\psi_i$ , будет:

$$\psi_s = R_{si} \psi_i + R_{ss} \psi_s. \quad (5)$$

Требование соответствия с гамильтоновой схемой (ср. [4]) подсказывает, что матрицы  $R_{si}$  и  $R_{ss}$  должны иметь вид:

$$R_{si} = (r^k)_{si}, \quad R_{ss} = (r^2)_{ss}, \quad (6)$$

где скобки означают, что берутся лишь те элементы  $r^k$  и  $r^2$ , которые связывают  $\psi_s$  и  $\psi_i$  с соблюдением закона сохранения энергии<sup>1</sup> (закон сохранения импульса соблюден автоматически в силу вида матриц  $r$ ) (ср. [2, 3]). Таким образом, наше уравнение может быть записано в виде:

$$\psi_s = (r^k)_{si} \psi_i + (r^2)_{ss} \psi_s. \quad (5')$$

Для замкнутых состояний, включая случай дискретного спектра, получим из (5), полагая  $\psi_i = 0$ :

$$\psi_s = (r^2)_{ss} \psi_s. \quad (5'')$$

<sup>1</sup> Это означает, что в уравнение (5) в отличие от уравнений гамильтоновой схемы входят только первичная волна  $\psi_i$  и только одна из рассеянных волн  $\psi_s$ .

Волна в этом случае преобразуется сама в себя.

Уравнения (5') и (5'') будут содержать расходимости, свойственные современной теории, при отбрасывании которых из (5) и (5') можно получить все разумные результаты современной теории частиц. В частности, уравнение (5') содержит в качестве специального случая уравнение для рассеяния частиц с учетом реакции, выведенное Ма и Сюэном [5, 6], а уравнение (5'') — релятивистское уравнение Тамма [7] для взаимодействия частиц. Чтобы получить это последнее уравнение, следует положить в (5'')  $r = r_A + r_B$ , где  $r_A$  — матрица рассеяния для частицы  $A$ , а  $r_B$  — то же для частицы  $B$ , тогда  $r^2 = r_A^2 + r_B^2 + r_A r_B + r_B r_A$ , и первые два члена дают собственную энергию частиц  $A$  и  $B$ , а последние два — их взаимодействие.

Однако наши уравнения (5') и (5''), не будучи связаны с гамильтоновой схемой, позволяют избежать расходимости путем введения релятивистски инвариантных обрывающих факторов. Тем самым в теорию вводится понятие протяженных частиц (точнее — универсальный параметр длины  $s_0$ ), которое несовместимо с гамильтоновой схемой. Эта возможность покоится на том, что мы можем модифицировать ядро ( $r_{ss}^2$ ) интегрального уравнения (5') и (5'') любым путем, лишь бы эти модификации сказывались только при больших изменениях энергии и импульса частиц и не нарушали эрмитовости ядра в целом (эрмитовость  $r$  может быть нарушена). Подобные модификации могут быть произведены различным образом, и вопрос о правильном выборе остается пока открытым. Одна из простейших возможностей введения обрывающего фактора заключается в изменении закона умножения матриц  $r$  таким образом, что дифференциал  $dk''$  изменяется на  $g(\Delta', \Delta''') dk''$ , где

$$\Delta' = s_0^2 \{ (W' - W'')^2 - (K' - K'')^2 \}, \quad (7)$$

$$\Delta''' = s_0^2 \{ (W'' - W''')^2 - (K'' - K''')^2 \}. \quad (7')$$

Здесь  $W$ ,  $K$  — энергия и импульс тяжелой частицы (ср. [8]).

Кроме того, мы требуем, чтобы  $g(\Delta', \Delta''') = g(\Delta''', \Delta')$ ,  $g(0, 0) = 1$ ,  $g(\infty, 0) = g(0, \infty) = g(\infty, \infty) = 0$ . Тогда закон умножения матриц  $r$  будет таков:

$$r^2(k', k''') = \int r(k', k'') g(\Delta', \Delta''') r(k'', k''') dk''. \quad (8)$$

Подобный обрывающий фактор замечателен тем, что если  $g$  становится заметно меньшим единицы только при  $|\Delta'|, |\Delta'''| \gg 1$ , то, как легко вычислить, его влияние будет сказываться лишь в тех случаях, когда длина волны  $\lambda$  излучаемой или поглощаемой («легкой») частицы будет  $\lambda < \frac{1}{2\pi} \frac{\hbar}{Mc} \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \left( \frac{M}{m} \right)^2$ , где  $M$  — масса тяжелой частицы,  $m$  — масса электрона, а  $s_0$  положено равным  $e^2/mc^2$ . Поэтому для электронов роль обрывающего фактора станет ощутимой лишь при  $\lambda \lesssim 10^{-16}$  см, а для тяжелых частиц она заметна при  $\lambda \lesssim 10^{-13}$  см.

Рассмотренное нами уравнение ведет к интересному выводу в отношении собственной массы частицы. В самом деле, применим уравнение (5'') к свободно движущейся частице. Тогда из (5'') следует

$$(K | (r^2)_{ss} | K') = \delta(K - K'). \quad (9)$$

Интегрируя по  $K'$ , пользуясь (2), (3) и переходя к системе покоя  $K = 0$ , получим:

$$(0|(r^2)_{ss}^0|0) = 1. \quad (9')$$

Умножая это уравнение на  $W(K) - E = W(K) - M$  и переходя к пределу  $W(K) = M$ , где  $M$  — энергия покоя нашей частицы, получим

$$\int \frac{\Omega^0(0, k) g(\Delta, \Delta) \Omega^0(k, 0) dk}{W(k) + \varepsilon(k) - M} = 0, \quad (9'')$$

где  $\varepsilon(k)$  — энергия частицы поля, имеющей импульс  $k$ , а  $W(k) = \sqrt{M^2 + k^2}$ . При  $s_0 = 0$ ,  $g = 1$ , и этот интеграл в точности совпадает с расходящимся интегралом собственной энергии обычной теории.

При  $s_0 \neq 0$  (10') представляет собой уравнение вида:

$$F(s_0, M) = 0, \quad (10)$$

определяющее массу частицы  $M$  через универсальный параметр  $s_0$ . Таким образом, масса покоя частицы определяется из условия обращения в нуль той массы, которая обусловлена взаимодействием частицы с полем.

В этом можно видеть некоторую аналогию принципу Лоренца классической электронной теории, согласно которому суммарная сила, действующая на свободный электрон со стороны его собственного поля, равна нулю.

Наша схема была бы полной, если бы мы могли указать вид обрывающего фактора. Для этого, видимо, нужны дополнительные физические соображения. Из (9'') видно, что уравнение (10) только в том случае будет иметь решения, если  $g(\Delta, \Delta)$  наряду с положительными значениями ( $g(0, 0) = +1$ ) принимает также и отрицательные. Поэтому введение  $g$  в какой-то мере эквивалентно допущению неэрмитовости операторов  $\Omega$ . В связи с этим любопытно напомнить, что в предельном  $\lambda$ -процессе, при  $\lambda \neq 0$ , операторы  $\Omega$  неэрмитовы. Однако мне не удалось включить множитель  $g$  в операторы  $\Omega$  так, чтобы сохранить обычный закон умножения матриц  $\tau$ .

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступила  
23 мая 1946 г.

### Список литературы

1. Blokhinzev D. I. // J. of Phys. 1946. V. 10. P. 167. — Статья 75 в наст. изд. — *Прим. ред.*
2. Markov M. A. // J. of Phys. 1940. V. 2. P. 453.
3. Heisenberg W. // ZS. f. Phys. 1943. Bd. 120. S. 513; 673.
4. Дирак П. Принципы квантовой механики. § 53. М., 1937.
5. Блохинцев Д. И. // ДАН СССР. 1946. Т. 53. С. 206. — Статья 74 в наст. изд. — *Прим. ред.*
6. Maa S. T., Hsüen S. // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1941. V. 40. P. 67.
7. Tamm Ig. // J. of Phys. 1945. V. 9. P. 449.
8. Wataghin G. // ZS. f. Phys. 1931. Bd. 88. S. 92.

## ТЕОРИЯ ПОЛЯ ПРОТЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ\*

В работе излагается релятивистски-инвариантная теория электромагнитного поля, основанная на допущении возможности распространения взаимодействия в малых пространственно-временных областях со скоростью, большей скорости света.

### 1. Постановка проблемы

В предыдущих моих работах была высказана мысль о возможном релятивистски-инвариантном обобщении законов взаимодействия частиц [1, 2]. Сущность этого обобщения заключается в том, что допускается распространение взаимодействия со скоростью, превышающей скорость света в пустоте, однако, без противоречия с лоренцевской инвариантностью. Было также показано [2], что такое нарушение известного принципа теории относительности практически ощутимо лишь в малых пространственно-временных областях. Математически эта идея была формулирована таким образом, что между источником поля  $Q(P')$ , находящимся в мировой точке  $P'(x', y', z', t')$ , и полем  $\varphi(P)$  в мировой точке  $P(x, y, z, t)$  была предположена линейная связь:

$$\varphi(P) = \int K(P - P') Q(P') d\Omega', \quad (1)$$

где  $d\Omega' = dx' dy' dz' dt' = dt'(dx')$ ,  $Q(P')$  — сингулярная плотность источников, имеющая  $\delta$ -образный характер, так что  $Q \neq 0$  только в той точке, где находится частица;  $K(P - P')$  есть функция влияния, в силу однородности пространства-времени зависящая лишь от разности координат точек  $P$  и  $P'$ . В отличие от обычной схемы мы считаем, что функция влияния  $K$  не равна функции Грина  $G = L^{-1}$  того дифференциального уравнения  $L\varphi = 0$ , которому подчиняется поле в отсутствии частиц (здесь  $L$  — некоторый линейный, дифференциальный оператор). Тем самым, мы допускаем распространение взаимодействия вне светового конуса, т. е. со скоростью, большей  $c = 1$ . Это предположение эквивалентно допущению протяженных, непрерывно распределенных зарядов<sup>1</sup>. Действительно, записывая (1) в символической форме

\* ЖЭТФ. 1948. Т. 18, вып. 6. С. 566–574.

<sup>1</sup> Р. Пайерлс (частное письмо, 1947) считает это допущение исходным пунктом своей новой теории поля, основная идея которой, насколько можно судить, совпадает по существу с моей [1, 2]. По-видимому, эти мои работы, а также более ранние работы М. А. Маркова [3, 4] остались ему неизвестными.

$\varphi = KQ$  и применяя к обеим частям этого равенства оператор  $L$ , найдем  $L\varphi = LKQ = 4\pi\rho$ . Так как по предположению  $K \neq G = L^{-1}$ , то  $LK \neq 1$  и  $\rho \neq Q$ . Обозначая оператор  $LK$  через  $D$ , получим

$$\rho(P) = \frac{1}{4\pi} \int D(P - P') Q(P') d\Omega'. \quad (2)$$

При подходящем выборе  $D$  плотность зарядов  $\rho$  будет непрерывной функцией точки  $P$ , несмотря на сингулярный характер источников поля  $Q$ . Таким образом в нашей схеме источники поля  $Q$ , как и в обычной теории, сингулярны, плотность же зарядов  $\rho$  непрерывна. В этом смысле мы и будем говорить о частицах, протяженных в пространстве-времени.

Оставаясь пока в рамках классической теории, мы сформулируем в дальнейшем теорию поля на основе поясненной идеи. При этом мы будем исходить из вариационного принципа.

## 2. Вариационный принцип

Мы будем рассматривать совокупность частиц с массами покоя  $m_s$  и зарядами  $e_s$  ( $s = 1, 2, \dots, f$ ), взаимодействующими посредством электромагнитного поля, которое будем описывать потенциалами  $A_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3, 4$ ). Действие  $S$  складывается из трех частей:  $S_1$  — действие частиц,  $S_2$  — действие поля и  $S_3$  — взаимодействие. Для  $S_1$  и  $S_2$  имеем обычные выражения (никаких модификаций в теорию свободных частиц и свободного поля не вносится):

$$S_1 = - \sum_s m_s \int d\sigma_s; \quad S_2 = - \frac{1}{16\pi} \int F_{\alpha\beta}^2 d\Omega, \quad (3)$$

где  $\sigma_s$  — собственное время  $s$ -й частицы, а  $F_{\alpha\beta}$  суть компоненты тензора поля:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}. \quad (4)$$

Взаимодействие  $S_3$  определим формулой

$$S_3 = \int d\Omega \int d\Omega' A_\alpha(P) D(P - P') J_\alpha(P'), \quad (5)$$

где  $J_\alpha$  — компоненты четырехмерного вектора плотности тока. Все интегралы в (3) и (5) взяты по всему пространству и времени. Имея в виду, что

$$J_\alpha(P) = \sum_s e_s \int d\sigma'_s \delta(P - P_s) U_{s\alpha}, \quad (6)$$

где  $U_{s\alpha}$  есть компонента четырехмерной скорости  $s$ -й частицы, а  $P_s = t_s(\sigma_s)$ ,  $x_s(\sigma_s)$  — ее четырехмерные координаты (индекс  $s$  у  $t_s(\sigma_s)$  поставлен лишь для симметрии, у нас все  $t_s$  равны между собою), получим для  $S_3$ :

$$S_3 = \sum_s e_s \int d\sigma_s \int d\Omega A_\alpha(P) D(P - P_s) U_{s\alpha}. \quad (5')$$



Вычислим теперь вариации  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ , получающиеся при варьировании  $A_\alpha$  и  $\mathbf{x}_s$ . Из (3) находим:

$$\delta S_1 = \sum_s e_s \int d\sigma_s \left[ \frac{d}{d\sigma_s} (m_s U_{s\alpha} \delta x_{s\alpha}) - \frac{d}{d\sigma_s} (m_s U_{s\alpha}) \delta x_{s\alpha} \right], \quad (7)$$

$$\delta S_2 = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \delta A_\alpha d\Omega - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial}{\partial x_\beta} (F_{\alpha\beta} \delta A_\alpha). \quad (7')$$

Далее, из (5') получаем

$$\begin{aligned} \delta S_3 = \sum_s e_s \int d\sigma_s \int d\Omega \delta A_\alpha D(P - P_s) U_{s\alpha} + \\ + \sum_s e_s \int d\sigma_s \int d\Omega \left\{ F_{\alpha\beta} U_{s\beta} \delta x_{s\alpha} + \frac{d}{d\sigma_s} [A_\alpha D(P - P_s) \delta x_{s\alpha}] \right\}. \end{aligned} \quad (7'')$$

Из вариационного принципа

$$\delta S = \delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3 = 0 \quad (8)$$

следуют уравнения движения частиц

$$m_s \frac{dU_{s\alpha}}{d\sigma_s} + e_s \int d\Omega D(P - P_s) U_{s\beta} F_{\beta\alpha} = 0 \quad (9)$$

и уравнения поля

$$\frac{\partial F_{\beta\alpha}}{\partial x_\beta} + 4\pi \sum_s e_s \int d\sigma_s D(P - P_s) U_{s\alpha} = 0. \quad (10)$$

При дополнительном условии  $\partial A_\alpha / \partial x_\alpha = 0$  получим уравнения Даламбера с источником:

$$\square A_\alpha = -4\pi \sum_s e_s \int d\sigma_s D(P - P_s) U_{s\alpha}. \quad (11)$$

Эти уравнения можно проинтегрировать с помощью функции Грина  $G(P - P')$ , которую, как обычно, определяем из уравнения:

$$\square G(P - P') = -4\pi \delta(P - P'). \quad (12)$$

В результате получаем

$$A_\alpha = A_\alpha^0 + \sum_s e_s \int d\sigma_s \int d\Omega' G(P - P') D(P' - P_s) U_{s\alpha}. \quad (13)$$

Представим теперь  $D$  и  $G$  в виде интегралов Фурье:

$$D(P - P_s) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int D(\omega^2 - k^2) \exp [i\omega(t - t_s) - i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)] d\omega (dk), \quad (14)$$

$$G(P - P') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int G\left(\omega^2 - k^2, \frac{\omega}{|\omega|}\right) \exp[i\omega(t - t') - i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] d\omega (dk). \quad (14')$$

Используя (12), нетрудно убедиться в том, что для запаздывающего поля компонента  $G(\omega^2 - k^2, \omega/|\omega|)$  равна

$$G\left(\omega^2 - k^2, \frac{\omega}{|\omega|}\right) = \frac{4\pi}{k^2 - \omega^2} - 4\pi^2 i \frac{\omega}{|\omega|} \delta(\omega^2 - k^2). \quad (15)$$

Вычислим теперь интеграл в (9), равный силе  $K_{s\alpha}$ , действующей на  $s$ -ю частицу. Для этого подставим в (9)  $A_\alpha$  из (13). Обратимся сперва к той части силы  $K_{s\alpha}^0$ , которая обусловлена внешним полем  $A_\alpha^0$ . Разложим поле  $F_{\beta\alpha}^0$  в интеграл Фурье:

$$F_{\beta\alpha}^0(P) = \int F_{\beta\alpha}^0(\omega, \mathbf{k}) e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\omega (dk). \quad (16)$$

Для свободного поля  $F_{\beta\alpha}^0(\omega, \mathbf{k}) = \delta(\omega^2 - k^2) f_{\beta\alpha}^0(\mathbf{k})$ . Подставляя теперь в интеграл (9)  $D(P - P_s)$  из (14) и  $F_{\beta\alpha}^0$  из (16), найдем

$$K_{s\alpha}^0 = e_s \int d\Omega D(P - P_s) U_{s\beta} F_{\beta\alpha}^0 = e_s D(0) U_{s\beta} F_{\beta\alpha}^0(P_s); \quad (17)$$

откуда следует, что  $D(0) = D(\omega^2 - k^2)_{\omega, k=0} = 1$ . Таким образом внешнее поле действует на частицу, как и в обычной теории.

Обратимся теперь к вычислению силы  $K'_{s\alpha}$ , обусловленной полем рассматриваемых частиц. Эта сила равна

$$\begin{aligned} K'_{s\alpha} = & e_s^2 U_{s\beta} \int d\sigma'_s \int d\Omega \int d\Omega' D(P - P_s) D(P' - P'_s) \times \\ & \times \left[ U'_{s\alpha} \frac{\partial G(P - P')}{\partial x_\beta} - U'_{s\beta} \frac{\partial G(P - P')}{\partial x_\alpha} \right] + \\ & + e_s U_{s\beta} \sum_{r \neq s} e_r \int d\sigma'_r \int d\Omega \int d\Omega' D(P - P_s) D(P' - P'_r) \times \\ & \times \left[ U'_{r\alpha} \frac{\partial G(P - P')}{\partial x_\beta} - U'_{r\beta} \frac{\partial G(P - P')}{\partial x_\alpha} \right] = K''_{s\alpha} + \sum_{r \neq s} K''_{sr\alpha}. \end{aligned} \quad (18)$$

Первая часть силы  $K''_{s\alpha}$  дает действие электрона на самого себя, а вторая часть  $\sum_{r \neq s} K''_{sr\alpha}$  обусловлена попарным взаимодействием частиц. Сила  $K''_{r\alpha}$  на достаточно больших расстояниях совпадает с силой, определяемой обычными потенциалами Лиенара-Вихерта; при малых же расстояниях между частицами она не обращается в бесконечность, а остается конечной. Для вычисления

силы самовоздействия  $K''_{s\alpha}$  подставим  $D$  и  $G$  из (14) и (14') в выражение  $K''_{s\alpha}$  и, выполняя интегрирование по  $d\Omega$  и  $d\Omega'$ , получим

$$K''_{s\alpha} = -ie_s^2 U_{s\beta} \int d\sigma'_s \int d\omega \int (dk) D^2(\omega^2 - k^2) G\left(\omega^2 - k^2, \frac{\omega}{|\omega|}\right) \times \\ \times (k_\beta U'_{s\alpha} - k_\alpha U'_{s\beta}) \exp \left[ i\omega(t_s - t'_s) - i\mathbf{k}(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}'_s) \right]. \quad (19)$$

Здесь  $k_4 = -\omega$  и штрихом сверху отмечены функции от  $\sigma'_s$ . Эту силу разобьем на две составляющих, соответственно двум членам в выражении  $G$  (14'):

$$I_{s\alpha} = -\frac{4\pi i e_s^2}{(2\pi)^4} U_{s\beta} \int d\sigma'_s \int d\omega \int (dk) \frac{D^2(\omega^2 - k^2)}{\omega^2 - k^2} \times \\ \times (k_\beta U'_{s\alpha} - k_\alpha U'_{s\beta}) \exp \left[ i\omega(t_s - t'_s) - i\mathbf{k}(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}'_s) \right] \quad (20)$$

и

$$R_{s\alpha} = -\frac{4\pi^2 e_s^2}{(2\pi)^4} U_{s\beta} \int d\sigma'_s \int d\omega \int (dk) \frac{\omega}{|\omega|} \delta \times \\ \times (\omega - k^2) (k_\beta U'_{s\alpha} - k_\alpha U'_{s\beta}) \exp \left[ i\omega(t_s - t'_s) - i\mathbf{k}(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}'_s) \right]. \quad (20')$$

Здесь (и везде ниже) интегралы по  $(dk)$  подразумеваются в смысле их главных значений. В последнем выражении учтено, что  $D^2(0) = l$ . Интегрируя в выражении (20') сначала по  $(dk)$ , а потом по  $d\omega$ , получим

$$R_{s\alpha} = e_s^2 U_{s\beta} \int d\sigma'_s \left( U'_{s\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} - U'_{s\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) \Delta(\tau, \rho), \quad (21)$$

где  $\tau = t_s - t'_s$  и  $\rho = |\mathbf{x}_s - \mathbf{x}'_s|$ ,  $\delta(\tau, \rho)$  — четырехмерная  $\delta$ -функция Паули-Йор-дана. Это выражение представляет собой силу, равную полуразности сил, определяемых запаздывающим и опережающим полями. Величина этой силы была вычислена Дираком [5] (ср. также [6]) и равна

$$R_{s\alpha} = \frac{2}{3} e_s^2 \left( \frac{d^2 U_{s\alpha}}{d\sigma_s^2} + U_{s\alpha} U_{s\beta} \frac{d^2 U_{s\beta}}{d\sigma_s^2} \right). \quad (22)$$

Это есть известное релятивистское выражение для силы радиационного трения. Сила  $I_{s\alpha}$  определяет инерционные эффекты, вызванные самодействием электрона. В силу фактора  $D^2(\omega^2 - k^2)$  она конечна, но не может быть вычислена без конкретных предположений о виде  $D(P - P_s)$ .

Таким образом уравнение движения частиц в нашей теории может быть представлено в виде:

$$m_s \frac{dU_{s\alpha}}{d\sigma_s} - I_{s\alpha} - \frac{2}{3} e_s^2 \left( \frac{d^2 U_{s\alpha}}{d\sigma_s^2} + U_{s\alpha} U_{s\beta} \frac{d^2 U_{s\beta}}{d\sigma_s^2} \right) = \sum_{r \neq s} K''_{sr\alpha}. \quad (23)$$

Это интегральное уравнение содержит (в членах  $I_{s\alpha}$  и  $K''_{sr\alpha}$ ) интегралы по времени от  $-\infty$  до  $+\infty$ . В силу этого движение *не определяется начальными данными*, и должны быть сформулированы особые требования, с помощью которых из всего возможного многообразия решений уравнений (23) выделялись бы решения, имеющие физический смысл. Эти требования должны выделить класс корректных, «собственных» решений. Они тем более необходимы, что среди решений уравнений (23), как указал Н. Н. Боголюбов, имеются заведомо не имеющие физического смысла «уродливые» решения<sup>1</sup>. Не претендуя сейчас на исчерпывающую формулировку этих требований, ограничимся лишь указанием на то, что рассмотрение задачи столкновения частиц показывает, что в этом случае достаточно задать асимптотическое поведение при  $t \rightarrow -\infty$  (т. е. задать  $\mathbf{x}_s(t)$  при  $t \rightarrow -\infty$ ) и потребовать, чтобы движение при  $t \rightarrow +\infty$  было свободным (т. е.  $d^n \mathbf{x}_s / dt^n \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ )<sup>2</sup>.

### 3. Обобщение теорем Э. Нётер. Законы сохранения

Законы сохранения могут быть получены в нашей теории также, как и в обычной, из инвариантности функции действия  $S$  относительно преобразования начала координат. Так как  $D$  зависит лишь от  $P - P'$ , то такая инвариантность имеет место. Как было показано Э. Нётер [7], из факта существования подобной инвариантности (однородность пространства и времени) вытекают законы сохранения энергии и импульса. Однако теорема Э. Нётер предполагает, что интегрирование по времени в действии однократное («точечное» взаимодействие). В нашем случае мы имеем дело с «неточечным» взаимодействием и вследствие этого с двукратным интегрированием по времени. Это обстоятельство приводит к необходимости обобщить теоремы Э. Нётер на наш случай. Вместе с тем, как будет видно из дальнейшего, законы сохранения получают существенно иную формулировку<sup>3</sup>. Обратимся теперь к преобразованию начала координат:

$$\tau = t + \Delta t, \quad \xi = \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, \quad (24)$$

где  $\tau$ ,  $\xi$  — новые координаты,  $\Delta t$  — бесконечно малый сдвиг отсчета времени, а  $\Delta \mathbf{x}$  — бесконечно малые смещения пространственных координат. Искомые функции  $A_\alpha$  и  $\mathbf{x}_s$  будем считать неизменными, так что

$$\Delta A_\alpha = \delta A_\alpha + \frac{\partial A_\alpha}{\partial t} \Delta t + \nabla A_\alpha \Delta \mathbf{x} = 0, \quad (25)$$

$$\Delta \mathbf{x}_s = \delta \mathbf{x}_s + \frac{d\mathbf{x}_s}{dt} \Delta t + \Delta \mathbf{x}. \quad (25')$$

<sup>1</sup> Пользуясь случаем, выражаю ему благодарность за это важное указание.

<sup>2</sup> В этой связи ср. также цитированные выше работы П. Дирака и А. А. Соколова. Кроме этих решений, определяемых асимптотическими требованиями, возможен отбор «собственных» решений требованием *периодичности*. Подобные решения должны представлять замкнутые состояния. Однако этот случай еще недостаточно исследован.

<sup>3</sup> Дело не изменится, если интегрирование по  $t$  будет любой кратности.

Рассмотрим теперь изменение  $\Delta S$  действия  $S$  при этом преобразовании. Обозначим подынтегральные выражения в  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  через  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  соответственно. Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \Delta S = & \int dt \left( \delta L_1 + \frac{dL_1}{dt} \Delta t \right) + \int d\Omega \left( \delta L_2 + \frac{\partial L_2}{\partial t} \Delta t + \nabla L_2 \Delta \mathbf{x} \right) + \\ & + \int dt' \int d\Omega \left( \delta L_3 + \frac{dL_3}{dt} \Delta t + \nabla L_3 \Delta \mathbf{x} + \sum_s \frac{\partial L_3}{\partial t'_s} \Delta t + \sum_s \nabla_s L_3 \Delta \mathbf{x} \right) = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $t'_s = t'$ . Отсюда находим

$$\begin{aligned} \Delta S = & \int dt \left( \delta L_1 + \frac{dL_1}{dt} \Delta t \right) + \int d\Omega \left( \delta L_2 + \frac{\partial L_2}{\partial t} \Delta t \right) + \\ & + \int dt' \int d\Omega \left( \delta L_3 + \frac{dL_3}{dt} \Delta t + \frac{dL_3}{dt'} \Delta t \right) = 0. \end{aligned} \quad (26')$$

Для дальнейших вычислений следует воспользоваться выражениями для вариаций  $\delta L_1$ ,  $\delta L_2$ ,  $\delta L_3$  из (7), (7'), (7''), и уравнениями движения частиц (9) и уравнениями поля (10).

Первые два интеграла в  $\Delta S$  дают, разумеется, обычные выражения точечной теории, а третий интеграл, содержащий неточечное взаимодействие, в силу того, что  $D(\pm\infty) = 0$ , ничего не меняет в законах сохранения. Несколько длинные вычисления приводят, в конце концов, к результату:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{d}{dt} \left[ \sum_s m_s U_{s\alpha} - \int (dx) T_{\alpha 4} \right] = 0, \quad (27)$$

где  $T_{\alpha\beta}$  есть обычный тензор энергии-импульса электромагнитного поля:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{\alpha\sigma} F_{\beta\sigma} - \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \cdot \delta_{\alpha\beta} \right). \quad (28)$$

Однако из равенства нулю интеграла (27) мы не имеем права сделать вывод о равенстве нулю подынтегрального выражения, так как при выводе (27) приходится пользоваться тем, что интегрирование в кратных по времени интегралах распространено от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Таким образом законы сохранения энергии и импульса приобретают асимптотический характер:

$$\left( \sum_s m_s U_{s4} + E \right)_{t=+\infty} = \left( \sum_s m_s U_{s4} + E \right)_{t=-\infty}, \quad (29)$$

$$\left( \sum_s m_s U_{sk} + G_k \right)_{t=+\infty} = \left( \sum_s m_s U_{sk} + G_k \right)_{t=-\infty}, \quad (29')$$

где  $E$  — полная энергия, а  $G_k$  — полный импульс поля. В справедливости этого существенного утверждения можно также убедиться непосредственно из уравнений движения (9) и уравнений поля (10). В самом деле, на основании (28) и (10) имеем

$$\frac{d}{dt} \int (dx) T_{\alpha 4} = - \sum_s e_s \int (1 - \beta_s^2)^{1/2} dt_s \int (dx) D(P - P_s) U_{s\beta}(t_s) F_{\beta\alpha}(P). \quad (30)$$

Пользуясь (9), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_s m_s U_{s\alpha} - \int (dx) T_{\alpha 4} \right\} = & - \sum_s e_s (1 - \beta_s^2)^{1/2} \int dt' (dx') D(P - P_s) \times \\ & \times U_{s\beta}(t_s) F_{\beta\alpha}(P') + \sum_s e_s \int (1 - \beta_s^2)^{1/2} dt_s \int (dx) D(P - P_s) U_{s\beta}(t_s) F_{\beta\alpha}(P). \end{aligned} \quad (31)$$

В случае точечного взаимодействия это выражение (так как  $D(P - P') = \delta(P - P')$ ) равнялось бы нулю. В нашей теории оно, как видно, не равно нулю. Но если проинтегрировать справа и слева по  $t = t_s$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то получается нуль, т. е. результат (29), (29').

#### 4. Движение с малыми скоростями и ускорениями

Вычислим инерционную силу самодействия электрона для случая малых скоростей и малых ускорений. Пренебрегая в этом случае нелинейными по скорости и ускорению членами, получим из (20)

$$I_1 = - \frac{4\pi e^2}{(2\pi)^4} \int d\tau \int d\omega \int (dk) \frac{D^2(k^2 - \omega^2)}{k^2 - \omega^2} e^{-i\omega\tau} (-i\omega x'_1 - ik_1) [1 - ik(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \dots], \quad (32)$$

где  $\tau = t' - t$ ,  $x' = x(t + \tau)$  и номер частицы  $s$  опущен. Обозначая

$$F_1(\omega^2) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty k^2 dk \frac{D^2(k^2 - \omega^2)}{k^2 - \omega^2}, \quad F_2(\omega^2) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty k^4 dk \frac{D^2(k^2 - \omega^2)}{k^2 - \omega^2} \quad (33)$$

(интегралы по  $dk$  — везде в смысле их главного значения!), найдем путем разложения  $\mathbf{x}(t)$  в интеграл Фурье:

$$I_1 = e^2 \left[ -F_1 \left( -\frac{d^2}{dt^2} \right) \frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{3} F_2(0) - \frac{1}{3} F_2 \left( -\frac{d^2}{dt^2} \right) \right] x_1(t). \quad (31')$$

Ограничиваясь здесь низшими производными, получим:

$$I_1 = -m_3 \ddot{x}_1, \quad (34)$$

где  $m_3$  — электромагнитная масса:

$$m_3 = e^2 \left[ F_1(0) - \frac{1}{3} F_2'(0) \right], \quad (35)$$

так как

$$F_1(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} D^2(k^2) dk \quad (36)$$

и

$$\begin{aligned} F_2'(0) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k^4 dk}{k^2 - \omega^2} \frac{dD^2(k^2 - \omega^2)}{d\omega^2} \Big|_{\omega=0} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k^4 dk}{(k^2 - \omega^2)^2} D^2(k^2 - \omega^2) \Big|_{\omega=0} = \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k^2 dk \frac{dD^2(k^2)}{dk^2} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} D^2(k^2) dk = \frac{3}{\pi} \int_0^{\infty} D^2(k^2) dk, \end{aligned} \quad (36')$$

то

$$m_3 = \frac{e^2}{\pi} \int_0^{\infty} D^2(k^2) dk. \quad (37)$$

Это выражение конечно и в точности равно  $E_0/c^2$ , где  $E_0$  — энергия электромагнитного поля для покоящегося заряда. Тем самым наша теория радикально отличается от нерелятивистских теорий протяженных частиц, в которых это равенство не осуществляется и приходится предполагать наличие дополнительных сил, сдерживающих заряды электрона, таких, чтобы к тому же осуществлялось равенство  $m_3 = E_0/c^2$ .

Уравнение (23) в рассмотренном крайнем нерелятивистском случае будет гласить:

$$M\ddot{x}_1 - \frac{2}{3}e^2\ddot{x}_1 = K_1, \quad (38)$$

где  $M = m_0 + m_3$ , а  $K_1$  — сторонняя сила. При  $K = 0$  уравнение (38) дает, помимо правильного ( $\ddot{x}_1 = 0$ ), еще и «уродливое» решение ( $\ddot{x}_1 \neq 0$ ). Однако сформулированные выше (§ 2) требования по отношению к исходному интегральному уравнению (23) исключают это решение ( $\ddot{x}_1 = 0$  при  $t = \pm\infty$ ).

## Заключение

Изложенная в этой работе теория поля ведет к парадоксальным, на первый взгляд, следствиям. В области малых пространственно-временных промежутков нарушается порядок причины—следствия, законы сохранения оказываются справедливыми лишь асимптотически, а задание начальных условий заменяется другими требованиями, относящимися как к прошлому, так и к будущему. Эти выводы теории теряют, однако, свою кажущуюся парадоксальность, если иметь в виду, что с точки зрения этой же теории синхронизация часов в различных точках пространства возможна только приближенно, для достаточно больших расстояний и с помощью не слишком коротких сигналов<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Синхронизация часов по Эйнштейну должна иметь приближенный характер также и в теории квантованного пространства Снайдера [8].

Несомненно также, что всякая классическая теория в применении к области столь малых масштабов, как «радиус» элементарных частиц  $s_0$ , должна пониматься *cum grano salis*. Ценность ее может определяться лишь тем, в какой мере она подсказывает путь построения квантовой теории элементарных частиц. Существует мнение, что всякая классическая теория может быть «проквантована». Это, действительно, верный взгляд при условии, что взаимодействия распространяются со скоростью, не большей скорости света. В этом случае имеется однозначное деление прошлого и будущего и события, относящиеся к прошедшему, однозначно определяют ближайшее будущее. Такая концепция необходимым образом ведет к схемам, оперирующим с  $q$  и  $p = \dot{q}$ , т. е. к схемам, допускающим применение метода Гамильтона, а вместе с тем допускающим и стандартное квантование ( $[p, q] = i\hbar$ ).

Теория поля протяженного электрона представляется любопытной прежде всего с той точки зрения, что она дает пример классической теории, которую нельзя непосредственно перевести на язык современной квантовой теории. Она существенно базируется на уравнениях Лагранжа и не может быть изложена в рамках гамильтонова метода.

Функция действия  $S(q, t; q_0, t_0)$  не существует в этой теории. Теория оперирует лишь с ее асимптотическим выражением  $S(q, +\infty; q_0, -\infty)$ . Отсюда следует ожидать, что в теории «неточечных» частиц не может существовать и волновая функция<sup>1</sup>. Существование в нашей схеме лишь асимптотической функции действия и асимптотический характер законов сохранения указывают на интересную параллель между идеями Гейзенберга о матрице рассеяния и нашей теорией. Более того, с изложенной здесь точки зрения схема матрицы рассеяния (или какая-либо иная схема, оперирующая лишь с волновыми функциями на бесконечности) представляется попросту необходимой<sup>2</sup>.

Но вряд ли можно механически перенести аппарат второго квантования в эту схему, подобному тому, как это без всяких оснований делает Гейзенберг применительно к своей матрице рассеяния. Напротив, несостоятельность метода Гамильтона в приложении к «неточечному» взаимодействию ставит под сомнение сам канонический формализм квантования. Необходимые модификации этого формализма должны быть предметом дальнейшего исследования.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступила  
5 декабря 1947 г.

<sup>1</sup> На это обстоятельство обращалось внимание уже ранее М. А. Марковым [3], который первым ввел понятие протяженного, релятивистски-инвариантного электрона [4]. Но возможность построения теории в рамках лагранжевского метода оставалась в тени. На самом деле, методы Лагранжа и Гамильтона в применении к неточечному взаимодействию совершенно не эквивалентны.

<sup>2</sup> Пользуясь случаем отметить, что Л. И. Мандельштам ранее Гейзенберга подчеркивал то обстоятельство, что в квантовой механике наблюдаемой величиной является волновая функция на бесконечности.



## Список литературы

1. Блохинцев Д. И. // Ученые записки МГУ. Вып. 77. Физика. 1945. Кн. 3. С. 101.
2. Блохинцев Д. И. // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 480. — Статья 73 в наст. изд.— Прим. ред.
3. Марков М. А. // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 790.
4. Марков М. А. // J. of Phys. 1940. V. 2. P. 453.
5. Dirac P. // Proc. Roy. Soc. A. 1938. V. 167. P. 480.
6. Соколов А. А. // Вестн. МГУ. 1947. № 2. P. 33.
7. Noether E. // Gött. Nachr. Math. Phys. Kl. 1918. Hf. 2. S. 235.
8. Snyder H. // Phys. Rev. 1947. V. 71. P. 38.

## ПРОХОЖДЕНИЕ НУКЛОНОВ ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО\*

Рассматривается торможение нуклонов с учетом перезарядки протон-нейтрон.

Эффективное поперечное сечение для столкновения двух нуклонов, в отнесенной системе координат, равно

$$d\sigma = \frac{2\pi}{\hbar v_0} \frac{p^2 (dp/dE)}{(2\pi\hbar)^3} |(\mathbf{p}_0|V|\mathbf{p})|^2 d\Omega, \quad (1)$$

где  $(\mathbf{p}_0|V|\mathbf{p})$  — матричный элемент энергии взаимодействия  $V$  двух нуклонов ( $\mathbf{p}_0$  — относительный импульс до столкновения, а  $\mathbf{p}$  — после столкновения),  $v_0$  — относительная скорость;  $d\Omega$  — элемент телесного угла, внутри которого происходит рассеяние.

Энергию взаимодействия мы принимаем в виде:

$$V = g^2 \frac{e^{-\kappa r}}{r} (a + bP). \quad (2)$$

Здесь первый множитель — мезонный потенциал,  $P$  — оператор обмена зарядом протона и нейтрона,  $a$  и  $b$  — амплитуды обычного и обменного взаимодействий. Для столкновений  $(p, p)$  и  $(n, n)$   $b = 0$ . Пользуясь (2), путем несложных вычислений получим для дифференциального поперечного сечения (1):

$$d\sigma(\epsilon) = \frac{\pi g^4}{E} \left( \frac{a}{\epsilon + \Delta} + \frac{b}{E - \epsilon + \Delta} \right)^2, \quad (3)$$

где  $E$  есть энергия первичного нуклона в лабораторной системе координат (второй нуклон считается покоящимся),  $\epsilon$  — потеря энергии первичным нуклоном,  $\Delta = \hbar^2 \kappa^2 / 2m$  ( $m$  — масса нуклона).

Интегрируя  $d\sigma(\epsilon)$  по  $\epsilon$  от 0 до  $E$ , получим полное сечение:

$$\sigma(E) = 2\sigma_0 \frac{mc^2}{E} \left[ \frac{a^2 + b^2}{2\Delta} - \frac{a^2 + b^2}{2(E + \Delta)} + 2ab \frac{\Delta}{(E + 2\Delta)} \ln \left( \frac{E + \Delta}{\Delta} \right) \right], \quad (4)$$

где  $\sigma_0 = 2\pi(g^2/\hbar c)^2 \kappa^{-2}$ . Данные, приведенные в [1] об угловом распределении при рассеянии  $(n, p)$  в области энергий 40–90 МэВ, указывают на симметричность сечения  $d\sigma(\epsilon)$ , т. е. заставляют принять  $a = b = 1$ . Из этих же данных можно определить величину  $\Delta$ , которая получается равной 20 МэВ.

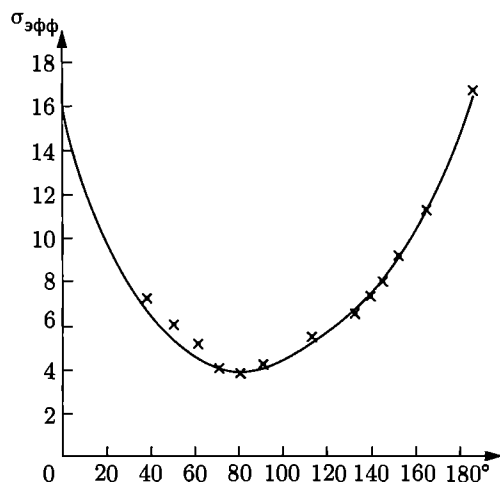


Рис. 1. Угловое распределение при упругом рассеянии  $(p, n)$ . Сплошная кривая — теоретическая (3); крестики — экспериментальные точки Хэдли и др.

На рис. 1 приведено сопоставление сечения  $d\sigma(\epsilon)$  при  $a = b = 1$ ,  $\Delta = 20$  МэВ с опытными данными. Далее, из полного сечения, также определенного этими авторами ( $\sigma_{pn} = 0,76 \cdot 10^{-25}$  см<sup>2</sup> для  $E = 90$  МэВ), следует, что  $\sigma_0 = 0,28 \cdot 10^{-26}$  см<sup>2</sup>. Этим фиксированы все постоянные в формулах (3) и (4). При этом  $g^2/\hbar c = 0,21$ ,  $1/\kappa = 10^{-13}$  см. Для столкновений  $(p, p)$  и  $(n, n)$  мы будем брать  $b = 0$ ,  $a = 1$ , что дает сечение, согласующееся с данными Кука и др. [2]. Если нуклон, с которым происходит столкновение, принадлежит ядру (атомный вес  $A$ ), такой нуклон не участвует в столкновении, если передаваемая ему энергия не превосходит разности между граничной энергией фермиевского

распределения  $E_F$  и исходной энергией нуклона  $W$ , т. е. должна быть больше  $E_F - W$ .

В дальнейших подсчетах мы учтем это обстоятельство тем, что в качестве нижней границы  $\epsilon$  будем брать  $\epsilon = E_F - \bar{W} = {}^2/5 E_F$ , где  $\bar{W}$  есть среднее значение  $W$ ;  $E_F = 18$  МэВ (независимо от  $A$ ),  $\epsilon_0 = 7$  МэВ<sup>1</sup>. Если потеря  $\epsilon$  очень велика, то соударяющийся нуклон, оставшийся в ядре, должен иметь энергию  $E' > E_F$ , так как нижние уровни заняты. Поэтому верхняя граница потери  $\epsilon$  есть  $E - E_F$ .

Определим теперь обменную длину  $L$  из сечения  $\sigma_L(E)$  для тех столкновений  $(p, n)$  или  $(n, p)$ , при которых теряется большая часть энергии, т. е.  ${}^1/2 E < \epsilon < E - E_F$ . Такие удары следует рассматривать как обменные, так как в этих случаях протон теряет почти всю свою энергию, а вторичный нейтрон, напротив, ее приобретает (иными словами, первичная частица меняет свой заряд). Это сечение на основании (3) равно

$$\sigma_L(E) = \int_{E/2}^{E-E_F} d\sigma(\epsilon) = \frac{\sigma_0 mc^2}{\Delta} \frac{1}{u} \left[ \frac{2(a^2 - b^2)}{u + 2} + \frac{b^2}{1 + \delta'} - \frac{a^2}{u + 1 - \delta'} + \frac{2ab}{u + 2} \ln \frac{u + 2 - 2\delta'}{2(1 + \delta')} \right], \quad (5)$$

<sup>1</sup> Более подробный учет принципа Паули вряд ли имеет смысл, так как газовая модель ядра сама по себе является лишь грубым приближением.

где  $u = E/\Delta$ ,  $\delta' = E_F/\Delta$ . Обозначая далее через  $N = N_0(d/A)(A/2)$  ( $d$  — удельный вес,  $N_0 = 6,06 \cdot 10^{23}$ ) число протонов  $N_p$  или нейтронов  $N_n$  в  $1 \text{ см}^3$  среды, получим обменную длину в виде:

$$L(E) = \frac{1}{N\sigma_L(E)} = R_0 L(u), \quad (6)$$

где  $R_0 = 2\Delta/N_0\sigma_0 mc^2 = 25 \text{ г/см}^2$ , а  $L(u)$  есть безразмерная обменная длина. Эта длина приведена на рис. 2. На том же рисунке приведен также полный пробег нейтрона  $R(E)$ . Этот пробег вычислен, исходя из потерь на ядерные столкновения на единицу пути, которые равны

$$\alpha(E) = N_p \int_{\epsilon_0}^{E/2} \epsilon d\sigma_{pn}(\epsilon) + N_n \int_{\epsilon_0}^{E-E_F} \epsilon d\sigma_{nn}(\epsilon). \quad (7)$$

При этом пределы интегрирования определены из того соображения, что при наличии обмена потерями следует считать лишь малые потери  $\epsilon < E/2$  (во втором же интеграле вообще несущественно, брать ли верхний предел  $E - E_F$ , или  $E/2$ ). Пользуясь опять (3), получим после простых интегрирований (полагая  $\alpha(E) = (\Delta/R_0)\alpha(u)$ )

$$\alpha(u) = \frac{1}{u} \left[ 2a^2 \ln \frac{u+2}{1+\delta} + \frac{4a^2}{u+2} - \frac{2a^2}{1+\delta} - 2ab \ln \frac{u+1-\delta}{1-\delta} - 2ab \ln \frac{u+2}{2(u+1-\delta)} + 2b^2 \frac{u+1}{u+2} - b^2 \frac{u+1}{u+1-\delta} + b^2 \ln \frac{u+2}{u+1-\delta} \right]. \quad (8)$$

Здесь  $\delta = \epsilon_0/\Delta$ . Пробег  $R(E) = R_0 R(u)$  определяется формулой:

$$R(u) = \int_{\sim 1}^u \frac{d}{\alpha(\xi)} \quad (9)$$

(нижний предел вытекает из границы применимости теории). Из рис. 2 следует, что  $R(E) > L(E)$ , кроме области малых энергий, где сделанные нами приближения могут внести значительную погрешность.

В силу того что  $R(E) > L(E)$ , нейтрон ранее, чем затормозится из-за потерь на ядерные столкновения, будет превращаться в протон. Для протона

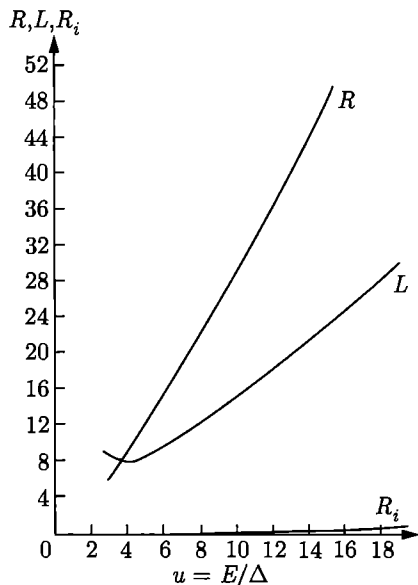


Рис. 2. Ядерный пробег  $R$ , ионизационный пробег  $R_i$  и обменная длина  $L$ .  $R, R_i, L$  — в единицах  $R_0 = 25 \text{ г/см}^2$ ; энергия — в единицах  $\Delta = 20 \text{ МэВ}$  ( $u = E/\Delta$ )

же определяющими будут не ядерные, а ионизационные потери  $\beta(E)$ . Эти потери в наших единицах могут быть написаны в виде<sup>1</sup>

$$\beta(E) = \frac{\Delta}{R_0} \beta(u), \quad \beta(u) = \frac{2\mu c^2 \pi r_0^2}{\Delta \sigma_0} \frac{1}{u} \ln \frac{u}{u_0}, \quad (10)$$

где  $\mu$  — масса электрона,  $r_0 = e^2/\mu c^2$ ,  $u_0 = m I_0 Z/4\mu\Delta$ ,  $I_0 = 11,5$  эВ,  $Z$  — порядковый номер элемента.

Для сравнения на рис. 2 приведен также ионизационный пробег  $R_i(E)$  (для воздуха,  $Z = 7,22$ ). В рассматриваемой области энергий  $\beta(E) \gg \alpha(E)$  и соответственно  $R_i(E) \ll R(E)$ . Поэтому при рассмотрении торможения протона мы можем полностью игнорировать потери на ядерные столкновения.

Чтобы рассмотреть, как будет меняться число и энергетический спектр нуклонов по мере проникновения первичного пучка в вещество на глубину  $x$ , введем  $P(E, x) dE$  — число протонов с энергией между  $E$ ,  $E + dE$  на глубине  $x$  и  $N(E, x) dE$  — ту же величину для нейтронов. Обратимся сперва к случаю, когда первичный пучок состоит из монохроматических нейтронов:

$$N(E, 0) = N_0 \delta(E - E_0). \quad (11)$$

Уравнение для  $N(E, x)$  будет гласить

$$\frac{\partial N(E, x)}{\partial x} = \alpha(E) \frac{\partial N(E, x)}{\partial E} - \frac{N(E, x)}{L(E)}. \quad (12)$$

В этом уравнении последний член учитывает убыль нейтронов из-за обмена. Обратным процессом — превращением возникших протонов вновь в нейтроны — мы пренебрегаем, так как протон значительно скорее затормозится, теряя энергию на ионизацию, нежели, обменяв заряд, превратится обратно в нейтрон ( $R_i(E) \ll L(E)$ ). Уравнение (12) интегрируется при любой зависимости  $\alpha$  и  $L$  от  $E$ . Его решение, соответствующее начальному данному (11), будет

$$N(E, x) = N_0 \delta(E - E_n(x)) e^{-\psi_n}, \quad (13)$$

где  $E_n(x)$  определяется из равенства:

$$x = \int_{E_n(x)}^{E_0} \frac{dE}{\alpha(E)}. \quad (14)$$

Значение  $x$  может быть заимствовано из рис. 2, так как  $x$  есть попросту пробег при торможении от  $E_0$  до  $E_n(x)$ . Далее

$$\psi_n = \int_{E_n(x)}^{E_0} \frac{dE}{\alpha(E) L(E)}. \quad (15)$$

<sup>1</sup> См. формулу для  $\beta(E)$  в сборнике «Мезон» [3].

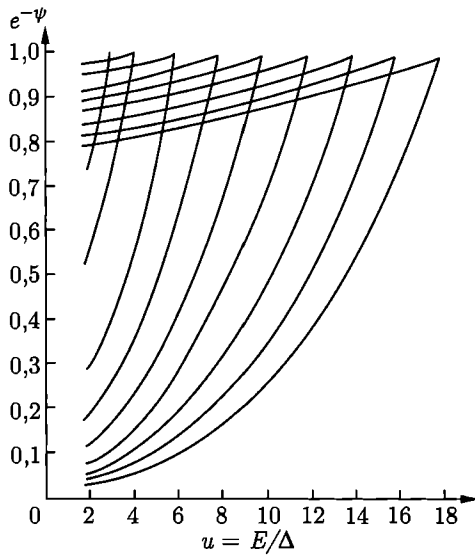


Рис. 3. Функция  $e^{-\psi}$ , определяющая перезарядку. Пологие кривые — перезарядка  $p \rightarrow n$ ; крутые кривые — перезарядка  $n \rightarrow p$

$\delta$ -функция в (13) выражает торможение нейтрона от энергии  $E_0$  до  $E_n(x)$ , а множитель  $e^{-\psi_n}$  дает долю первичных нейтронов, еще оставшихся нейтронами;  $1 - e^{-\psi_n}$  есть доля нейтронов, превратившихся при торможении от  $E_0$  до  $E_n(x)$  в протоны, которые можно считать в дальнейшем выбывшими из игры. На рис. 3 приведено значение  $e^{-\psi_n}$  для различных начальных энергий. Как видно, убыль нейтронов из-за обмена зарядом с протоном при больших энергиях ( $u \gg \Delta$ ) весьма значительна.

Рассмотрим теперь тот случай, когда первичными частицами являются протоны. Уравнение для  $P(E, x)$  напишется в виде:

$$\frac{\partial P(E, x)}{\partial x} = \beta(E) \frac{\partial P(E, x)}{\partial E} - \frac{P(E, x)}{L(E)} \quad (16)$$

(при этом мы пренебрегаем вторичным эффектом — возникновением протонов из образовавшихся нейтронов). Решение этого уравнения будет

$$P(E, x) = P_0 \delta(E - E_p(x)) e^{-\psi_p}, \quad (17)$$

где  $E_p(x)$  определено уравнением:

$$x = \int_{E_p(x)}^{E_0} \frac{dE}{\beta(E)} \quad (18)$$

(т. е. ионизационным пробегом), а  $\psi_p$  равно

$$\psi_p = \int_{E_p(x)}^{E_0} \frac{dE}{\beta(E) L(E)}. \quad (19)$$

Функция  $e^{-\psi p}$  дает долю протонов, оставшихся протонами при торможении от  $E_0$  до  $E_p(x)$ . Как видно из рис. 3, эта доля больше 80 %, т. е. в нейтроны превращается менее 20 %. При малых энергиях  $\sigma_L(E) \rightarrow 0$ , а  $L(E) \rightarrow \infty$ , поэтому это превращение происходит в тонком слое, толщина которого сравнима с ионизационным пробегом протона.

Чтобы учесть прохождение через вещество возникших нейтронов, можно рассматривать этот слой как источник нейтронов и применить к ним выведенные ранее формулы (13) и (14)<sup>1</sup>.

В изложенном выше расчете нуклоны ядер предполагались распределенными по всему пространству. Предпосылкой возможности такого распределения является достаточная прозрачность ядерного вещества. С другой стороны, нельзя распространять теорию на слишком большие энергии, так как в этом случае станут существенными релятивистские эффекты<sup>2</sup>. Поэтому теория неприменима к ядрам большого атомного веса.

Прозрачность ядерного вещества, определяющая границы применимости теории, может быть определена как  $\zeta = e^{-\nu}$ , где  $\nu$  есть отношение среднего пути в ядре  $^{4/3} r A^{1/3}$  ( $r = 1,5 \cdot 10^{-13}$  см) [4] к свободному пробегу  $l(E)$  внутри ядра. Этот пробег равен

$$\frac{1}{l(E)} = N_n \int_{\epsilon_0}^{E-E_F} d\sigma_{pn}(\epsilon) + N_p \int_{\epsilon_0}^{E-E_F} d\sigma_{pp}(\epsilon), \quad (20)$$

где  $N_n \cong N_p = (3/4)\pi r^3$  есть плотность нуклонов в ядре. Подставляя сюда значения  $d\sigma_{pn}$  и  $d\sigma_{pp}$ , получим

$$\nu(E) = \frac{4rA^{1/3}}{3l(E)} = \frac{A^{1/3}\sigma_0 mc^2}{2\pi r^2 \Delta} \nu(u) = 0,92 A^{1/3} \nu(u), \quad (21)$$

причем интегрирование дает

$$\nu(u) = \frac{1}{u} \left[ \frac{2a^2}{1+\delta} - \frac{2a^2}{u+1-\delta'} + \frac{b^2}{1+\delta'} - \frac{b^2}{u+1-\delta} + \frac{2ab}{u+2} + \ln \frac{(u+1-\delta')(u+1-\delta)}{(1+\delta')(1+\delta)} \right]. \quad (22)$$

<sup>1</sup> В этом случае первичный пучок нейтронов будет уже немонахроматичным. Однако нетрудно получить общее решение уравнения (12), соответствующее любому распределению нейтронов по энергиям при  $x = 0$ .

<sup>2</sup> Потери энергии на образование мезонов должны остаться еще небольшими. Действительно, сечение для образования мезонов может быть написано в виде:  $\sigma_\mu = \left(\frac{g^2}{\hbar c}\right)^3 \left(\frac{\hbar}{\mu c}\right)^2 f\left(\frac{\Delta E}{\mu c^2}\right)$ , где  $\Delta E = E - 2\mu c^2$ ,  $\mu c^2$  — энергия покоящегося мезона. Вблизи пороговой энергии  $\Delta E \ll 2\mu c^2$ ,  $f \ll 1$  и, стало быть,  $\sigma_\mu < 10^{-28}$  см<sup>2</sup>. В то же время  $\sigma_{pn}$ ,  $\sigma_{pp} = 10^{-25}-10^{-26}$  см<sup>2</sup>.

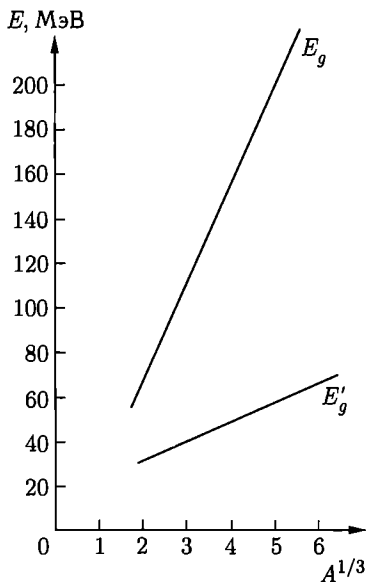


Рис. 4. Граница прозрачности ядра в функции  $A^{1/3}$ .  $E_g$  — по числу столкновений в ядре,  $E'_g$  — по пробегу внутри ядра

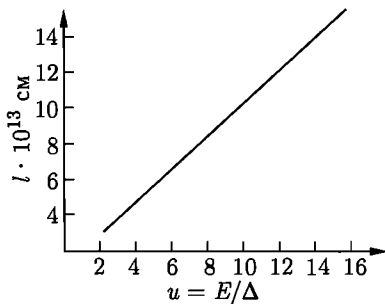


Рис. 5. Свободный пробег внутри ядра

На рис. 4 приведена граница прозрачности, определенная из условия  $\nu < 1$ , а на рис. 5 дан свободный пробег ядра

$$l(E) = \frac{2,2}{\nu(u)} \cdot 10^{-13} \text{ см}, \quad (23)$$

который практически оказывается линейной функцией энергии. Как видно из графика прозрачности, в области  $E < 100$  МэВ большинство ядер уже непрозрачно. На этом же графике приведена другая граница прозрачности, определенная из условий полной потери энергии нуклона при прохождении через ядро.

Пробег нуклона внутри ядра будет равен<sup>1</sup>

$$\rho = r \frac{8\pi r^2 \Delta}{3\sigma mc^2} \int_{\sim 1}^{u_0} \frac{d\xi}{\alpha(\xi)} = r \frac{8\pi r^2 \Delta}{3\sigma mc^2} \frac{R}{R_0}. \quad (24)$$

Ядро будет непрозрачно (в смысле полной потери энергии нуклона), если  $\rho < 4/3\pi A^{1/3}$ , т.е. если

$$\frac{R}{R_0} \leq \frac{mc^2}{\Delta} \frac{\sigma_0}{2\pi r^2} A^{1/3} = 0,92 A^{1/3}. \quad (25)$$

<sup>1</sup> Отличается от пробега  $R$  заменой средней плотности нуклонов в среде на плотность их в ядре.



Как и следовало ожидать, определенная таким образом граница прозрачности  $E'_g$  лежит значительно ниже границы  $E_g$ , определенной из условия малости числа столкновений в ядре. Граница  $E'_g$  указывает ту область, в которой наши расчеты, заведомо, несправедливы, а граница  $E_g$  указывает ту область энергий, где наши расчеты начинают становиться несправедливыми. Поэтому на приведенных выше графиках для  $R$ ,  $L$ ,  $e^{-\psi}$  следует ограничиваться областью изменения энергии нуклона от начальной энергии  $E_0$  до энергии, может быть, несколько меньшей  $E_g$ , но обязательно большей  $E'_g$ . При  $E < E'_g$  нуклон при столкновении с ядром полностью растрчивает энергию на возбуждение ядра.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступила  
29 июня 1949 г.

### Список литературы

1. *Hadley J., Kelly E. et al.* // Phys. Rev. 1949. V. 75. P. 351.
2. *Cook L., McMillan R. et al.* // Phys Rev. 1947. V. 72. P. 1264.
3. Мезон: Сб. / Под ред. И. Е. Тамма. М.: ОГИЗ, 1947.
4. Гей В. В., Латышев Г. Д., Пасечник М. В. // Изв. АН СССР. 1948. Т. 12. С. 732.

В. В. Гей, Г. Д. Латышев,  
М. В. Пасечник

Москва

1949

1949

Москва, 1949

1949

1949

## ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ И ПОЛЕ\*

### § 1. Введение

Физики прошлого столетия рассматривали элементарные простейшие частицы<sup>1</sup> как материальные точки, движущиеся по траекториям согласно законам классической механики.

Вместе с тем, в прошлом же столетии возникло новое физическое понятие — понятие поля, как некоторой непрерывной сущности, посредством которой осуществляется взаимодействие частиц.

Наиболее характерной чертой всякого физического поля является то обстоятельство, что для задания состояния физического поля нужно задать значения поля во всех точках пространства, т.е. неограниченное большое число величин. Иными словами, в отличие от систем материальных точек, обладающих конечным числом степеней свободы, *поле есть система, обладающая бесконечно большим числом степеней свободы.*

Само понятие поля, еще в рамках доквантовой физики, проделало значительную эволюцию от механического эфира до эйнштейновского электромагнитного поля, содержащего полный отказ от применения механики к полю — электромагнитному эфиру.

Как известно, эта эволюция в представлении о поле привела к падению механистической физики и философы-идеалисты хотели истолковать эту ситуацию как доказательство «исчезновения материи». В.И. Ленин показал философскую несостоятельность этой атаки на материализм, объяснив, что электромагнитная масса в такой же степени материальна, как и «механическая».

В этой связи очень интересен тот факт, что согласно современному представлению поле приобретает ряд черт, характерных для среды, для вещества (например, такие явления, как поляризация «вакуума», как нулевые колебания, суть явления, хорошо известные в твердых телах). С другой стороны, частицы приобретают черты, которые свойственны полю в его классическом понимании.

То противопоставление поля и частицы, которое было характерно для прошлого столетия и которое использовалось идеалистами для «опровержения» материализма, становится все менее и менее основательным. Казавшаяся

непереходимой грань между полем и частицами по мере развития наших знаний становится все менее и менее ощутимой.

Такова диалектика развития.

Проблема взаимоотношения поля и элементарных частиц в свете современной квантовой физики и будет основным предметом настоящей статьи; относящийся сюда круг вопросов уже давно является предметом самых трудных и глубоких изысканий в области теоретической физики.

Еще в классической электронной теории стремились достигнуть единства в понимании частиц и поля (мы имеем в виду лоренцевское учение об электромагнитном происхождении массы электронов), но все же полностью удовлетворительно эта проблема еще не разрешена и по сию пору. Тем не менее современная теория и опыт позволяют рассмотреть эту проблему в новом освещении, которое не могло быть предусмотрено классической физикой.

## **§ 2. Что подсказывает квантовая механика о природе частиц?**

Мы начнем наш экскурс в только что очерченный круг проблем с рассмотрения тех особенностей в движении частиц, которые были обнаружены нерелятивистской квантовой механикой.

Обычно изложение квантовой механики начинается с введения волновой функции  $\Psi$ , которая является функцией координат частиц  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (для системы из  $n$  частиц) и времени  $t$ . При этом о самой природе частиц не делается обычно никаких высказываний, так что невольно создается представление (неверное) о том, что микрочастицы<sup>1</sup>, рассматриваемые в квантовой теории, суть те же частицы, что и в классической механике, и только закон их движения оказывается иным (волновой вместо лучевого).

Вообще квантовая механика еще настолько тесно связана с классической механикой системы материальных точек, что и по сию пору многие физики анализируют ее выводы с позиций классического атомизма и на этом пути постоянно встречают то один, то другой кажущийся парадокс.

Вместе с тем остается незамеченной очень важная особенность нерелятивистской квантовой механики: отвергая корпускулярные законы движения частиц, она делает лишь первый шаг по пути установления связи между полем и частицей в направлении, совершенно непредвиденном классической физикой, и тем самым подготавливает почву для нового понимания частиц.

В этом отношении важнейшим является доказательство того факта, что всякое усиление локализации микрочастицы связано с существенным увеличением импульса.

Этот факт полностью чужд корпускулярному представлению о движении частицы. Частица в квантовой теории приобретает черты нелокализованного объекта. Эта нелокализованность частицы особенно ясно может быть иллюстрирована на примере поведения частицы при сжатии объема, в котором она заключена.

---

<sup>1</sup> Этот термин был принят в нашем курсе квантовой механики, чтобы подчеркнуть отличие частиц, рассматриваемых в квантовой механике, от материальных точек классической механики.

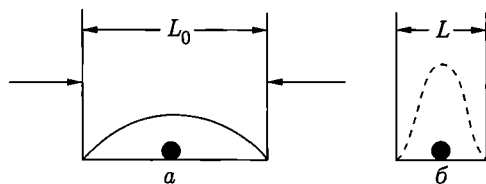


Рис. 1

На рис. 1 изображен объем, линейный размер которого равен  $L_0$ . Пусть внутри этого объема находится частица. Будем сжимать этот объем. Рассмотрим сперва этот процесс с точки зрения классической механики. Пусть частица до сжатия объема *покоилась* в его центре. Никаких сил между частицей и стенками мы не предполагаем. Тогда очевидно, что никакой работы при сжатии ящика от  $L_0$  до  $L$  произведено не будет.

Совсем к другому результату приходит квантовая механика: частица внутри ящика имеет наименьшую («нулевую») энергию, равную  $\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL_0^2}$ , (где  $m$  — масса частицы) и при сжатии ящика будет произведена работа

$$A = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left( \frac{1}{L^2} - \frac{1}{L_0^2} \right) > 0.$$

На рис. 1 пунктиром показан график волновой функции частицы для обоих случаев (несжатый и сжатый ящики). Частица, с точки зрения квантовой механики, «чувствует» наличие стенок ящика — она нелокализована, в то время как для классической, покоящейся частицы положение стенок безразлично.

Эта же нелокализованность может быть иллюстрирована так называемой «теоремой Эренфеста».

Пусть  $x$  характеризует положение центра волнового пакета, а  $\overline{\Delta x^2}$ ,  $\overline{\Delta x^3}$  и т. д. — квадратичную ширину этого пакета, третичную и т. д. Тогда, если частица движется в поле сил, характеризуемом потенциальной энергией  $U(x)$ , то согласно теореме Эренфеста:

$$m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = -\frac{\partial U(\bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2} \overline{\Delta x^2} - \dots$$

Первые два члена этого уравнения совпадают с уравнением Ньютона для движения материальной точки по траектории. Следующие, содержащие высшие производные, указывают на то, что движение квантовой частицы определяется всей формой силового поля. По классической же механике важно только поле в тех местах, где проходит траектория частицы. Это поведение квантовой частицы поясняется рис. 2. На этом рисунке изображены две потенциальные кривые:  $abc$  и  $abd$ . Классическая, локализованная частица, имеющая энергию  $E$ , будет двигаться в отрезке  $x_1 x_2$  и для нее совершенно неважно, какая из потенциальных кривых,  $abc$  или  $abd$ , осуществляется на самом деле (так как эти кривые расходятся за пределами отрезка  $x_1 x_2$ ).

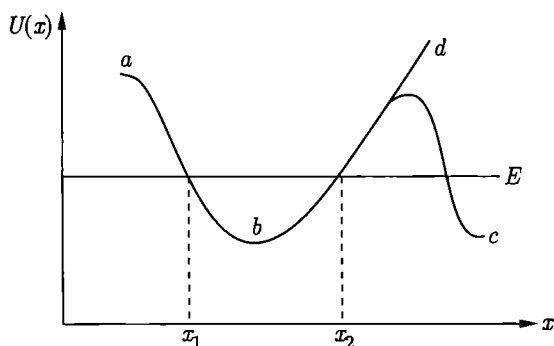


Рис. 2

Напротив, поведение квантовой частицы будет в обоих случаях совершенно различным: для нее, в силу ее нелокализуемости, важно поведение  $U(x)$  во всем пространстве. В случае кривой  $abd$  частица будет локализована в области около отрезка  $x_1x_2$ ; в случае кривой  $abc$  она «растечется» по всему пространству, проходя через барьер, существующий между  $b$  и  $c$ . Таким образом, нелокализуемость частиц в квантовой механике сказывается во влиянии всего поля во всем пространстве на движение квантовой частицы<sup>1</sup>.

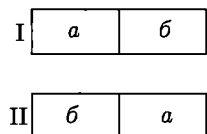


Рис. 3

Вторая важная особенность квантовых частиц — это их тождественность (иногда неудачно говорят «неразличимость» частиц). Так, если изобразить условно какое-либо состояние частицы квадратиком, а саму частицу буквой, то два состояния (I и II), изображенные на рис. 3, физически тождественны (если обе частицы  $a$  и  $б$  одного «сорта»).

Это свойство является также парадоксальным с корпускулярной точки зрения, но вполне понятно и естественно с тех позиций, которые будут изложены далее.

Сейчас мы ограничимся указанием лишь на то, что эта тождественность тесно связана с нелокализованностью. Например, если два состояния, о которых идет речь, суть две различные локализации частиц  $a$  и  $б$ , то в классической механике, в силу движения частиц по траекториям оба признака, приписанные частицам (их начальные положения 1 и 2), сохраняются все время (рис. 4).

По квантовой же механике произойдет расплывание пакетов, построенных вначале около 1 и 2, частицы перепутаются в их признаках. Это расплывание пакетов показано на рис. 4 заштрихованной областью.

Эти два важнейшие свойства частиц, устанавливаемые квантовой механикой: нелокализованность и тождественность частиц становятся совершенно ясными с точки зрения концепции квантованного поля, к изложению которого мы теперь и обратимся.

<sup>1</sup> Когда мы говорим «все пространство», то на самом деле имеется в виду физическая бесконечность, т. е. «все пространство» может быть очень мало, например, пространство около атома  $\cong 10^{-8}$  см.

Первоначально мы предположим существование некоторого поля  $\psi(\mathbf{x}, t)$ , а вопрос о существовании частиц оставляем совершенно открытым<sup>1</sup>.

Поле  $\psi(\mathbf{x}, t)$  может быть разложено в спектр, т. е. представлено как суперпозиция полей (нормальных колебаний), каждое из которых имеет определенную частоту колебаний  $\omega_s$ . Обозначим через  $\psi_s(\mathbf{x})$  одно из таких колебаний, а через  $q_s$  его амплитуду. Тогда спектральное разложение поля  $\psi(\mathbf{x}, t)$  на нормальные колебания может быть написано в виде:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_s q_s \psi_s(\mathbf{x}), \quad (1)$$

где  $s$  — номер нормального колебания (если проводить аналогию с колебаниями струны, то колебание с  $s = 1$  отвечает основному тону  $s = 2$  — первому обертону,  $s = 3$  — второму обертону и т. д.).

Возможность спектрального разложения (1) основана на линейности уравнений поля (т. е. предполагается, что уравнения поля содержат  $\psi$  и производные от  $\psi$  только в первой степени).

По самому смыслу нормального колебания динамические переменные  $q_s$  (амплитуды) удовлетворяют уравнению для осциллятора с частотой  $\omega_s$ :

$$\ddot{q}_s + \omega_s^2 q_s = 0. \quad (2)$$

Если в качестве нормальных колебаний выбрать плоские волны  $\psi_s(\mathbf{x}) \approx \exp(i\mathbf{k}_s \mathbf{x})$  ( $\mathbf{k}_s$  — волновой вектор,  $k_s = 2\pi/\lambda_s$ ,  $\lambda_s$  — длина волны), то зависимость  $\omega_s$  от  $k_s$  дает закон дисперсии волн:

$$\omega_s = \omega(k_s). \quad (3)$$

Фаза волны будет равна  $\pm\omega_s t \pm \mathbf{k}_s \mathbf{x}$ . Она является числом, имеющим одно и то же значение во всех системах отсчета (инвариантом), и, стало быть,  $\omega_s$  и  $\mathbf{k}_s$  должны образовывать четырехмерный вектор, т. е.

$$\frac{\omega_s^2}{c^2} - \mathbf{k}_s^2 = \kappa^2, \quad (4)$$

где  $\kappa^2$  — инвариант ( $\kappa$  имеет размерность обратной длины). Далее, чтобы групповая скорость волн была меньше скорости света необходимо, чтобы  $\kappa^2$  было больше нуля. Таким образом, вид закона дисперсии определяется из самых простых требований инвариантности фазы волны.

Энергия каждого нормального колебания, в соответствии с (2), может быть написана в виде:

$$E_s = \frac{1}{2} (\dot{q}_s^2 + \omega_s^2 q_s^2), \quad (5)$$

<sup>1</sup> Поле  $\psi(\mathbf{x}, t)$  может иметь различное число компонент, линейно преобразующихся при преобразовании Лоренца. Так, для электромагнитного поля имеем четыре компоненты вектор-потенциала ( $A_1, A_2, A_3, A_4$ ), из которых только три независимы (в силу поперечности поля).

Позитронно-электронное поле  $\psi$  имеет также четыре компоненты (так называемый биспинор). Скалярное поле имеет всего лишь одну компоненту и т. п.; поле  $\psi(\mathbf{x}, t)$ , конечно, не следует смешивать с волновой функцией  $\psi$ .

а энергия всего поля  $E$  равна сумме энергий отдельных, нормальных колебаний:

$$E = \sum_s E_s. \quad (6)$$

Пользуясь уравнениями поля (которые мы не выписываем), можем найти и импульс  $\mathbf{G}_s$   $s$ -го нормального колебания. Очевидно, что он должен быть направлен по направлению распространения волны (т. е. по  $\mathbf{k}_s$ ) и должен быть пропорционален энергии волны. Можно показать, что импульс всего поля может быть вычислен по формуле:

$$\mathbf{G} = \sum_s \frac{\mathbf{k}_s}{\omega_s} E_s. \quad (7)$$

Такое представление энергии  $E$  и импульса поля  $\mathbf{G}$  может быть проведено для любого линейного поля. Стало быть, с помощью (1), (6) и (7) любое движение поля  $\psi(\mathbf{x}, t)$  сведено к совокупности осцилляторов — нормальных колебаний.

Как мы видим, пока нет никакой речи о частицах. Частицы оказываются *квантовым явлением*. В самом деле, если мы будем считать, что осцилляторы поля подчиняются законам квантовой механики, то мы придем к существованию частиц<sup>1</sup>.

Действительно, для квантового осциллятора энергия  $E_s$  принимает лишь дискретные значения:

$$E_s = \hbar\omega \left( N_s + \frac{1}{2} \right), \quad (8)$$

$N_s = 0, 1, 2, \dots$  и  $\hbar\omega_s/2$  есть «нулевая» (наименьшая) энергия осциллятора. Тогда из (6) и (7) следует:

$$E = \sum_s N_s \hbar\omega_s + E_0, \quad (9)$$

$$\mathbf{G} = \sum_s N_s \hbar\mathbf{k}_s. \quad (10)$$

Таким образом, энергия и импульс квантованного поля меняются дискретным образом (на  $\pm\hbar\omega_s$  и  $\pm\hbar\mathbf{k}_s$  соответственно). Если все  $N_s = 0$ , то поле невозбуждено. *В классической теории невозбужденное поле ( $\dot{q}_s = q_s = 0$ ) означало бы попросту отсутствие какого бы то ни было поля.*

В квантовой теории поля это не так: если все  $N_s = 0$  (световых квант нет), то все же нулевая энергия поля  $E_0$  не равна нулю. Современная теория

<sup>1</sup> Предположение о квантовании поля первоначально было обосновано применительно к электромагнитному полю — известный закон Планка для распределения энергии в спектре черного излучения может быть получен только для квантованного поля.

В современной теории идея квантования поля распространяется на любые поля, включая поля позитронно-электронное, мезонное и нуклонное. При этом для полей, обладающих полуцелым механическим моментом, квантование несколько отличается от квантования полей с целым моментом. Именно, для полей первого типа возможные значения  $N_s$  ограничиваются двумя: 0 или 1 (принцип Паули).

приводит к значению  $E_0 = \infty$ . Это, несомненно, дефект теории, и можно думать, что в более совершенной теории  $E_0$  должно оказаться конечной величиной. Однако более важно не численное значение  $E_0$ , а то обстоятельство, что при  $N_s = 0$  существуют нулевые колебания поля (флуктуации), реальное существование которых было недавно обнаружено по смещению уровней в атоме водорода<sup>1</sup>. Как оказалось, это смещение вызвано тем, что электрон совершает броуновское движение в поле нулевых колебаний.

Аналогичное положение дел имеет место и в случае электрон-позитронного поля. Согласно современной теории в отсутствие электронов и позитронов существует «фон» — совокупность электронов, заполняющих все уровни отрицательной энергии ( $E_s = \hbar\omega_s < 0$ ). Это невозбужденное состояние электрон-позитронного поля соответствует  $N_s = 0$  для  $E_s > 0$  и  $N_s = 1$  для  $E_s < 0$ .

Как бы ни было несовершенно и предварительно это представление о «фоне», который также имеет бесконечную (но отрицательную) энергию, как и нулевая энергия электромагнитного поля, все же его существование выражается в замечательном явлении рассеяний света на свете, вызванном флуктуациями электрического заряда фона. Хотя прямого экспериментального доказательства рассеяния света на свете до сих пор и не дано, но, тем не менее, существование флуктуации электрического заряда фона можно считать доказанным тем, что спин электрона должен совершать броуновское движение в поле этих флуктуаций. Это движение приводит к экспериментально доказанному изменению отношения магнитного и механического моментов электрона, в сравнении с предсказываемым из уравнения Дирака [1, 2].

Существование нулевых колебаний электромагнитного поля и поляризационных колебаний (флуктуаций) электрон-позитронного поля приводит к заключению, что *поле существует постоянно, и в этом смысле нет никакой «пустоты»*. Поэтому эту «пустоту» теперь справедливо называют более осторожным словом «вакуум». Как мы видим, «вакуум» обладает физическими свойствами и притом такими, которые хорошо знакомы нам из явлений в твердых телах: нулевые колебания и поляризация.

Что же касается частиц, то их существование связано уже с возбуждением поля над наинизшим возможным уровнем. Пусть, например, все числа  $N_{s'} = 0$ , кроме одного  $N_s = 1$ . Тогда энергия возбуждения поля  $\epsilon = E - E_0 = \hbar\omega_s$ , а импульс возбуждения  $\mathbf{p} = \mathbf{G} = \hbar\mathbf{k}_s$ .

Из закона дисперсии (4) тогда следует, что

$$\frac{\epsilon^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = \hbar^2 \kappa^2 = m_0^2 c^2, \quad (11)$$

т. е. энергия  $\epsilon$  и импульс  $\mathbf{p}$  возбуждения связаны между собою как энергия и импульс частицы, обладающей массой покоя  $m_0 = \hbar\kappa/c$ . Стало быть, возбуждение поля эквивалентно возникновению частиц и сами частицы есть не что иное, как возбуждение поля.

Если поле  $\psi(\mathbf{x}, t)$  взаимодействует с чем-либо, то характер его возбуждения может меняться.

<sup>1</sup> См., например, обзор Я. А. Смородинского [1].



Рассмотрим, например, взаимодействие электронного поля с атомом. Пусть исходное состояние электронного поля отвечает наличию одного электрона с энергией  $\varepsilon$  и импульсом  $\mathbf{p}$  (сам атом с излагаемой точки зрения тоже следовало бы рассматривать как образование из других полей, но мы сохраним для атома обычную терминологию). Тогда, после взаимодействия с атомом, состояние электрона изменится и его энергия и импульс будут  $\varepsilon'$ ,  $\mathbf{p}'$ . Такой процесс есть процесс рассеяния электрона; мы говорим в этом случае о неупругом или (при  $\varepsilon' = \varepsilon$ ) об упругом столкновении электрона, более того, мы почти готовы приписать траекторию электрону, которую он пробежал в процессе изменения  $(\varepsilon, \mathbf{p}) \rightarrow (\varepsilon', \mathbf{p}')$ . Приближенность и неполнота такого толкования особенно ясно видна в тех случаях, когда в результате «столкновения» возникают пары электронов и позитронов, так что электрон  $(\varepsilon_-, \mathbf{p}_-)$  превращается в пары  $(\varepsilon'_-, \mathbf{p}'_-)$ ,  $(\varepsilon''_+, \mathbf{p}''_+)$ ,  $(\varepsilon'''_-, \mathbf{p}'''_-)$ , ... и т. д. (Здесь знак «-» соответствует электрону, а знак «+» позитрону.) В этом случае мы совершенно не в состоянии отличить, какой из электронов после удара есть «тот самый», который был первичным.

Между тем, с полевой точки зрения мы имеем здесь дело попросту с новым характером возбуждения электронного поля и ясно, что искать здесь первичный электрон так же бессмысленно, как, например, пытаться распознать тепло по признаку его происхождения, если тело получало его от различных источников.

Если рассматривать частицы как возбужденные состояния поля, то ясно, что вопрос о локализации частицы в пространстве не может иметь какого-либо априорного ответа. Ответ на этот вопрос будет существеннейшим образом зависеть как от природы того поля, возбуждения которого мы рассматриваем, так и от вида самого возбуждения. Эти возбуждения могут быть локализованы в малой области пространства или, напротив, могут быть распределены по значительному объему.

Рассмотрим эту сторону дела подробнее, сперва на примере фотонов. Пусть энергия поля  $E = \hbar\omega_s + E_0$  так, что имеется лишь один фотон с частотой  $\omega_s$ . Совместимое с этим возбуждением поле имеет вид:

$$A(\mathbf{x}) = \sum_s' q_s e^{i\mathbf{k}_s \mathbf{x}}, \quad (12)$$

где сумма  $\sum_s'$  распространена на все колебания, отличающиеся направлением  $\mathbf{k}_s$ , но имеющие одну и ту же частоту  $\omega_s$  ( $k_s = \omega_s/c$ ). Такой «пакет» неминуемо имеет размеры  $\Delta x$ , большие длины волны  $\left(\lambda_s = \frac{2\pi}{k_s}\right)$ . Нетрудно показать, что для сферически симметричного поля  $A(\mathbf{x}) = A(r)$  получим  $A(r) \approx \frac{\sin k_s r}{k_s r}$ . Такое поле хотя и сосредоточено в основном в области  $0 < r < \lambda_s/2$ , но все же очень медленно убывает с расстоянием от центра локализации  $r = 0$ . Подобный вид поля представляет собою максимальную возможную локализацию одного фотона. Однако можно рассмотреть и случай сильно локализованного поля, например,  $A(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$  ( $\delta = \infty$  при  $\mathbf{x} = 0$

и  $\delta = 0$  при  $x \neq 0$ ). Такое крайне сосредоточенное поле не может быть уже представлено возбуждением нормального колебания с частотой  $\omega_s$ . Оно обязательно содержит колебания всех частот от  $\omega_s = 0$  до  $\omega_s = \infty$  и, следовательно, соответствует *не одному, а совокупности фотонов*.

Сходное же положение дел имеет место и в случае частиц, имеющих массу покоя  $m_0$ , например для электронов и позитронов. Именно, локализация электрона в малом объеме возможна лишь при значительном импульсе электрона  $p$ . Если  $p$  заметно превосходит  $m_0c$ , то кинетическая энергия электрона будет много больше  $m_0c^2$  (энергии покоящегося электрона).

Так как для образования пары электрон-позитрон нужна энергия  $2m_0c^2$ , то при локализации электрона в области меньшей  $\hbar/m_0c$  (импульсы  $p \approx m_0c$ ) будут возникать также пары и уже нельзя будет говорить о локализации *одного* электрона. Поэтому максимальная степень локализации *одного* электрона или *одного* позитрона определяется размером  $\Delta x \approx \frac{\hbar}{m_0c}$ . Что же касается электрон-позитронного поля, то нет никаких оснований считать, что оно не может быть сосредоточено и в меньших областях пространства.

Таким образом, следует различать два вопроса: *вопрос о локализации возбуждения поля и вопрос о локализации одной частицы из числа свойственных данному полю. Для локализации, сосредоточения поля, видимо, нет никаких ограничений; для локализации одной частицы они существуют.*

## § 4. Частицы и принцип спектрального разложения

Мы видим, что представление об элементарной частице теснейшим образом связано с возможностью спектрального разложения поля на гармонические колебания. *Возбуждение какой-либо гармоники поля с корпускулярной точки зрения эквивалентно существованию частицы в определенном состоянии.*

Однако известно, что одно и то же поле может быть представлено в виде различных спектральных разложений. Означает ли это, что одному и тому же полю могут быть свойственны различные частицы?

Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к примерам.

Рассмотрим сперва поперечное (световое) электромагнитное поле. Такое поле может быть охарактеризовано вектор-потенциалом  $\mathbf{A}$  (при этом  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ , так что мы имеем дело с двумя независимыми функциями). Мы можем разложить  $\mathbf{A}$  на линейно поляризованные колебания или на циркулярно-поляризованные. Оба разложения совершенно равноправны и могут быть написаны в форме:

$$\mathbf{A} = \sum_s \sum_{\alpha=1,2} q_{s\alpha} \mathbf{A}_{s\alpha}(x) = \sum_s \sum_{\beta=1,2} Q_{s\beta} \mathbf{B}_{s\beta}(x), \quad (13)$$

где  $\mathbf{A}_{s1}$  и  $\mathbf{A}_{s2}$  представляют два независимых линейных колебания (перпендикулярных направлению распространения волны), а  $\mathbf{B}_{s1}$  и  $\mathbf{B}_{s2}$  подобным же образом — два колебания по левому и правому кругу.

Оба разложения равноправны и одинаково истинны. Но первое разложение представляет собою спектральное разложение поля по отношению к некоторой системе, которая взаимодействует с нашим полем и реагирует на линейные колебания (например, простой гармонический диполь); второе же разложение есть разложение по отношению к системе, которая реагирует на круговые колебания. Примером таких систем может служить атом, помещенный в магнитное поле. Тогда атом резонирует на линейные колебания, параллельные магнитному полю, и на круговые колебания в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Такой атом как бы совмещает в себе два типа анализаторов: анализатор линейных и анализатор круговых колебаний. По отношению к линейным анализаторам поле состоит из линейно-поляризованных частиц, а по отношению к круговым анализаторам — из частиц циркулярно-поляризованных.

Таким образом, поле действительно может состоять из различных частиц, в зависимости от того, с чем оно, поле, взаимодействует.

Однако в рассмотренном примере различия в частицах, связанных с двумя видами спектрального разложения, еще столь не существенны (они ограничиваются различиями в поляризациях), что более уместно говорить (как это обычно и делается) об одном и том же виде частиц (фотонах), но находящихся в двух различных состояниях поляризации. Во всяком случае, оба способа формулировки явления («два вида частиц» или два вида состояний одной и той же частицы) оказываются совершенно эквивалентными.

Можно, однако, привести более разительный пример, в котором показывается, что различия в спектральном разложении поля могут вести к самым радикальным различиям в таких основных признаках частиц, как их масса и их способ взаимодействия.

Рассмотрим поле, описываемое двумя скалярными функциями,  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , подчиняющееся уравнениям:

$$\begin{cases} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + \Delta \psi_1 - \kappa_1^2 \psi_1 = g \psi_2, \\ -\frac{1}{e^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} + \Delta \psi_2 - \kappa_2^2 \psi_2 = g \psi_1. \end{cases} \quad (14)$$

Пусть мы имеем некоторую систему, взаимодействующую с этими полями. Тогда мы можем рассматривать ее как анализатор нашего поля, разлагающий поле на  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . По отношению к этой системе мы имеем дело с частицами двух сортов, массы покоя которых будут равны  $m_1 = \hbar \kappa_1 / c$  и  $m_2 = \hbar \kappa_2 / c$ . При этом, благодаря наличию связи между полями  $\psi_1$  и  $\psi_2$  (члены в правых частях уравнений), эти частицы будут рассеиваться друг на друге и превращаться друг в друга, т.е. по отношению к этому анализатору будет наблюдаться очень живая картина.

Обратимся теперь к другому анализатору, реагирующему на нормальные колебания *совокупного* поля ( $\psi_1, \psi_2$ ). Эти нормальные колебания описыва-

ются функциями:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \alpha\psi_1 + \beta\psi_2, \\ \Phi_2 &= \gamma\psi_1 + \delta\psi_2,\end{aligned}\tag{15}$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — некоторые коэффициенты.

Нетрудно показать, что эти поля  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  будут удовлетворять уравнениям:

$$\begin{cases} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + \Delta \Phi_1 - \kappa_1'^2 \Phi_1 = 0, \\ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + \Delta \Phi_2 - \kappa_2'^2 \Phi_2 = 0. \end{cases}\tag{16}$$

То есть по отношению к системе, реагирующей на линейные комбинации  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , то же самое поле  $(\psi_1, \psi_2)$  состоит из частиц, имеющих массы  $M_1 = \hbar \kappa_1'/c$ ,  $M_2 = \hbar \kappa_2'/c$  и не взаимодействующих между собой (правые части в уравнениях (16) отсутствуют). Простое вычисление показывает, что массы  $M_1$  и  $M_2$  найдутся из формулы

$$M_{1,2}^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{2} + \frac{\hbar^4 g^2}{c^2}}.\tag{17}$$

Весьма любопытно, что при достаточно большой константе связи  $g$  между полями  $\psi_1$  и  $\psi_2$  одна из масс  $M_{1,2}$  становится мнимой. В этом случае равновесное положение колебания соответствует не минимуму потенциальной энергии («фокус»), а ее максимуму (точнее «седлу»).

Вместе с тем этому возбуждению  $\Phi_2$  не соответствует вообще никаких частиц<sup>1</sup>, хотя поле продолжает существовать и может все еще гармонически зависеть от времени (частота колебаний для  $\Phi_2$  равна  $\omega^2 = k^2 - |M_2|^2$ ). Для такого рода возбуждений *фазовая скорость меньше скорости света, а групповая скорость больше скорости света*. Этот пример показывает, сколь тесна связь между разложением поля в спектр гармонических колебаний и понятием частицы.

В рассмотренном примере связь между полями  $\psi_1$  и  $\psi_2$  была взята линейной. Это было сделано только ради простоты. На самом деле в современной теории связи между полями нелинейны. Например, уравнения для электронно-позитронного и электромагнитного полей гласят:

$$\begin{cases} \gamma^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \frac{m_0 c}{\hbar} \psi = \frac{ie}{\hbar c} \gamma^\mu \Phi_\mu \psi, \\ \square \Phi_\mu = -\frac{4\pi e}{c} \psi^+ \gamma_\mu \psi. \end{cases}\tag{18}$$

Первое из этих уравнений есть уравнение Дирака для электронно-позитронного поля  $\psi$ , а второе — уравнение Даламбера для электромагнитных

<sup>1</sup> Можно показать, что энергия и импульс поля в этом случае не являются дискретными — они непрерывны.

потенциалов  $\Phi_\mu$ . В правых частях уравнений написаны члены, выражающие взаимодействие;  $e$  есть константа связи, в данном случае — электрический заряд. Как видно, эти правые части нелинейны относительно  $\psi$  и  $\Phi_\mu$ <sup>1</sup>. Так как электронно-позитронное поле всегда сосуществует с электромагнитным полем, то мы можем сказать, что уравнения для этих полей всегда *нелинейны*. Но к *нелинейным полям неприменим принцип спектрального разложения, основанный на линейности уравнений поля*.

Вместе с тем отпадает строгая теоретическая основа для понятия частицы. Действительно, в случае нелинейных полей невозможно представить энергию и импульс поля в виде суммы энергий и импульсов отдельных возбуждений, каждое из которых имеет корпускулярный характер (т. е.  $\epsilon_s/c$  и  $\mathbf{p}_s$  образуют четырехмерный вектор). Иными словами, возбуждения в таких полях, вообще говоря, не могут быть сведены к частицам. В старом, классическом понимании поля и частиц мы могли бы попросту говорить о системе взаимодействующих (через поле) частиц. Теперь же мы не вправе производить столь определенное разделение функций между частицами и полем.

Рассматривая факт размножения частиц, мы уже отметили исчезновение границы между полем и частицами. Эта сторона дела может быть еще подчеркнута взаимозаменяемостью роли частицы и поля, также вытекающей из возможности уничтожения и рождения частиц. Излучение и поглощение фотонов ведет к взаимодействию между электронами. Но верно и обратное: возникновение пар позитронов и электронов и их последующее исчезновение ведет к рассеянию света на свете, т. е. к взаимодействию фотонов. Здесь роли поля и частиц поменялись. В первом случае взаимодействие частиц (электронов, позитронов) обусловлено электромагнитным полем (фотонами), во втором случае те же фотоны, как частицы, взаимодействуют через электрон-позитронное поле.

Подобным же образом нуклоны взаимодействуют посредством мезонного поля, и обратно, мезоны могут взаимодействовать через нуклонное поле. Короче говоря, грань между полем и частицами существует лишь относительная: она имеет значение лишь в тех случаях, когда энергии и импульсы в системе столь малы, что новых частиц возникать не может. Только в этих случаях можно противопоставить частицы полю. Эта неразрывная и нелинейная связь между различными полями довольно широко доказана современным экспериментом. Кроме упоминавшихся выше взаимных превращений электронно-позитронного и электромагнитного полей, доказана превращаемость и взаимосвязь этих полей с мезонными полями. С другой стороны, мезоны порождаются нуклонами.

Таким образом, полевая картина распространяется на все частицы и только нуклоны представляют пока исключение, так как нет еще никаких достоверных данных, доказывающих возможность возникновения нуклонов

---

<sup>1</sup> Члены взаимодействия в энергии дают кубические члены вида  $\frac{ie}{\hbar c} \Phi_\mu \psi^+ \gamma^\mu \psi$ . Поэтому здесь, как и в рассмотренном выше примере, можно ожидать для колебания не только «фокусов», но и «седел». Исследование в этом случае много сложнее из-за нелинейности уравнений.

за счет других полей. Однако вряд ли это исключение сохранит свою силу и в будущем, и поэтому мы вправе (предварительно) говорить и о нуклонном поле.

Невозможность разложения нелинейных полей на частицы указывает на то, что *само понятие частицы должно рассматриваться как приближенное*, верное лишь постольку, поскольку все же, в специальных условиях, приближенно возможно разложение нелинейного поля на слабо связанные линейные колебания.

Следует полагать, что в действительности могут реализовываться такие условия, когда такое разложение возможно с большой степенью точности.

Это будет в том случае, когда концентрация частиц так мала, что они находятся на больших расстояниях друг от друга.

Простейшим случаем такого рода будет, например, один уединенный (свободный) электрон. Как показывает современная теория, эффект нелинейного взаимодействия с электромагнитным полем приводит в этом случае к бесконечно большой поправке к массе электрона, которая, однако, может быть устранена путем искусственного приема, носящего название «перенормировки» массы [1]. Окончательное уравнение для свободного электрона получается линейным:

$$\gamma^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \frac{m_0 c}{\hbar} \psi = 0.$$

Это указывает на то, что принцип спектрального разложения может быть сохранен для свободных частиц, а вместе с тем может быть сохранено и само понятие частицы.

Другим примером может служить свободный мезон. Несомненно, что для него приложимо соотношение  $\epsilon^2/c^2 - p^2 = m_0^2 c^2$ . Однако мезон способен распадаться. Например,  $\mu$ -мезон распадается на электрон и, видимо, два нейтрино [3];  $\pi$ -мезон на  $\mu$ -мезон и «нейтретто»<sup>1</sup>. Поэтому можно считать, что  $\mu$ -мезон образован из нейтринного и электронного поля, но нельзя никак считать, что он состоит из частицы электрона и двух частиц — нейтрино, так как ни нейтрино, ни электрон не могут быть локализованы в объеме комптоновской длины мезона  $\hbar/m_0 c$ .

Только тогда, когда произошел распад мезона и образовавшие его поля «растеклись», мы можем говорить о возникновении таких возбуждений поля, которые представляют два свободных нейтрино и один свободный электрон.

Поэтому представление о поле создает более широкую основу для понимания физических явлений, нежели представление о частицах. Представление о частицах является ограниченным и останется состоятельным в будущем развитии теории только в тех случаях, когда речь идет о превращении одного спектрального разложения поля в другое, т. е. если говорить на языке частиц, для случая столкновения частиц, когда какие-то частицы приходят из

<sup>1</sup> Действительно  $\mu^-$ -мезон распадается на электрон и два нейтрино:  $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ . Заряженный  $\pi^+$ -мезон распадается в основном по схеме  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ . Другие моды распада  $\pi^+$  идут на уровне  $10^{-4}$ :  $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$ ,  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu + \gamma$ . — Прим. ред.

бесконечности и вновь обнаруживаются движущимися на бесконечности по другим направлениям (рассеяние) или в другой форме (превращение частиц).

Современная теория разрабатывает такой математический аппарат [4, 5, 6, 7], который призван специально для расчета такого рода задач — это аппарат так называемой матрицы рассеяния, с помощью которой по сходящимся из бесконечности волнам вычисляют расходящиеся волны. Этот аппарат, по-видимому, обладает значительной степенью общности<sup>1</sup>. Однако он еще все же включает в себя основные недостатки современной теории: 1) необходимость искусственными приемами удалять бесконечности, возникающие при учете взаимодействия полей<sup>2</sup> и 2) обилие различных полей (электромагнитное, электрон-позитронное, нейтринное, мезонные и нуклонные поля). Единство в понимании этих полей еще не достигнуто, но экспериментальные факты, относящиеся к взаимопревращаемости этих полей, быть может, указывают на то, что различные поля есть лишь различные способы возбуждения одного единого поля.

### Список литературы

1. Смородинский Я. А. // УФН. 1949. Т. 39. С. 325.
2. Вейсскопф В. // УФН. 1950. Т. 41. С. 165.
3. Жданов Г. Б. // УФН. 1950. Т. 39. С. 512.
4. Heisenberg W. // Zeits. f. Physik. 1943. Bd. 120. P. 513; 673.
5. Блохинцев Д. И. // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 480; 1947. Т. 17. С. 266; ДАН СССР. 1946. Т. 53, № 3. С. 205. — Статьи 73, 76 и 74 в настоящем издании. — Прим. ред.
6. Feynman R. // Phys. Rev. 1942. V. 74. P. 139; 1430; 1212A.
7. Dyson F. // Phys. Rev. 1949. V. 75. P. 486; 1737.
8. Марков М. А. // J. Phys. USSR. 1940. V. 2. P. 454.
9. Блохинцев Д. И. // ЖЭТФ. 1948. Т. 18. С. 566.
10. Jukawa H. // Phys. Rev. 1950. V. 77. P. 219.

---

<sup>1</sup> Возражения, высказывавшиеся по поводу невозможности получить дискретные уровни систем из этого аппарата, основаны на неверном его применении. В этом аппарате дискретные уровни должны обнаруживаться как максимумы в дисперсионной кривой, если задача поставлена как задача рассеяния частиц.

<sup>2</sup> Очень интересный и обещающий путь построения теории без бесконечностей был впервые намечен М. А. Марковым [8] — это так называемые нелокализованные поля. Сходную концепцию см. также в [9]. В последнее время этому пути следует весьма интересная работа Юкавы [10].

## ВСЕГДА ЛИ СУЩЕСТВУЕТ «ДУАЛИЗМ» ВОЛН И ЧАСТИЦ\*

Еще на самом раннем этапе развития квантовой механики была показана равноправность корпускулярной и волновой картины движения материи. Корпускулярные и волновые свойства оказались, таким образом, лишь двумя сторонами одной и той же физической сущности.

Но исчерпывает ли на самом деле этот «дуализм»<sup>1</sup> все возможные состояния материи?

Можно сформулировать этот вопрос и более определенно: *всегда ли материя обнаруживает корпускулярные свойства?*

Принято считать, что современная теория приводит к положительному ответу на этот вопрос. Именно, всякое *свободное* волновое поле, подчиняющееся законам квантовой теории, обладает корпускулярными свойствами, т. е. при взаимодействии передает и принимает энергию  $\epsilon$  и импульс  $\mathbf{p}$  порциями:

$$\epsilon = \pm \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}, \quad \pm \mathbf{p}, \quad (1)$$

где  $m$  — масса покоя частиц,  $\mathbf{p}$  — ее импульс.

Сами частицы — фотоны, позитроны, электроны, мезоны, нуклеоны — с этой точки зрения следует рассматривать как возбужденные состояния соответствующих полей [1, 2], потому, быть может, было бы уместно назвать их общим именем «полетоны».

Значительно труднее ответить на поставленный выше вопрос, если учесть, что различные физические поля на самом деле взаимодействуют между собою и, стало быть, не являются свободными. Как раз при учете этого взаимодействия и возникают хорошо известные трудности современной теории.

В последнее время удалось развить формальные методы устранения бесконечностей, эффективные по крайней мере в электродинамике (метод перенормировки) [3].

Однако в дальнейшем нас будет интересовать не эта сторона дела. Мы хотим обратить внимание на другие следствия современной теории взаимодействующих полей, которые указывают на *существование состояний полей, несовместимых с корпускулярностью, т. е. приводящих к нарушению «дуализма» волн и частиц.*



Для иллюстрации нашего утверждения относительно нарушения «дуализма» волн и частиц обратимся к примерам. Рассмотрим сначала случай взаимодействия двух скалярных полей  $\Psi(x, t)$  и  $\Phi(x, t)$ , при этом предположим, что энергия взаимодействия этих полей  $W$  имеет особенно простой вид:  $W = g\Psi\Phi$ , где  $g$  — постоянная связи, имеющая размерность  $L^{-2}$ . Тогда уравнения полей, релятивистски-инвариантные, будут иметь вид<sup>1</sup>

$$\square^{-2}\Psi - \frac{m^2 c^2}{h^2}\Psi = g\Phi, \quad (2)$$

$$\square^{-2}\Phi - \frac{M^2 c^2}{h^2}\Phi = g\Psi, \quad (2')$$

где  $\square = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , а  $m$  и  $M$  суть массы частиц, связанных со свободными полями, т. е. существующих при  $g = 0$ . Удобно рассматривать эти уравнения с помощью нормальных координат  $q_k$  и  $Q_k$  таких, что

$$\Psi(x, t) = \int q_k e^{ikx} dk, \quad \Phi(x, t) = \int Q_k e^{ikx} dk. \quad (3)$$

Нетрудно показать, что  $q_k$  и  $Q_k$  будут удовлетворять уравнениям

$$\frac{d^2 q_k}{dt^2} + \omega_k^2 q_k = gc^2 Q_k, \quad \frac{d^2 Q_k}{dt^2} + \Omega_k^2 Q_k = gc^2 q_k. \quad (4)$$

Здесь собственные частоты  $\omega_k$  и  $\Omega_k$  равны

$$\omega_k = \frac{\varepsilon_k}{\hbar} = \sqrt{m^2 c^4 + \hbar^2 c^2 k^2}, \quad \Omega_k = \frac{E_k}{\hbar} = \sqrt{M^2 c^4 + \hbar^2 c^2 k^2}. \quad (5)$$

Введем теперь новые нормальные координаты  $\varepsilon_k$  и  $\eta_k$ :

$$\varepsilon_k = \alpha q_k + \beta Q_k, \quad \eta_k = \delta q_k + \gamma Q_k.$$

Тогда подходящим выбором  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  можно добиться того, что  $\varepsilon_k$ ,  $\eta_k$  будут удовлетворять независимым уравнениям

$$\frac{d^2 \varepsilon_k}{dt^2} + \omega_k'^2 \varepsilon_k = 0, \quad \frac{d^2 \eta_k}{dt^2} + \Omega_k'^2 \eta_k = 0, \quad (6)$$

причем новые частоты  $\omega_k'$  и  $\Omega_k'$  будут равны

$$\omega_k' = \frac{1}{\hbar} \sqrt{m'^2 c^4 + \hbar^2 c^2 k^2}, \quad \Omega_k' = \frac{1}{\hbar} \sqrt{M'^2 c^4 + \hbar^2 c^2 k^2}, \quad (7)$$

<sup>1</sup> Этот пример частично рассматривался нами и ранее в [2].

где  $m'$  и  $M'$  определяются массой покоя частиц, соответствующих новым полям, для которых  $\varepsilon_k$  и  $\eta_k$  суть нормальные колебания. Простые вычисления этих масс  $m'$  и  $M'$  приводят к результату:

$$m'^2 = \frac{m^2 + M^2}{2} + \sqrt{\frac{(m^2 - M^2)^2}{4} + \frac{\hbar^4 g^2}{c^4}}, \quad (8)$$

$$M'^2 = \frac{m^2 + M^2}{2} - \sqrt{\frac{(m^2 - M^2)^2}{4} + \frac{\hbar^4 g^2}{c^4}}. \quad (8')$$

При малой постоянной связи  $g$  обе массы  $m'$  и  $M'$  действительны и поля будут «квантоваться», т. е. обмен энергией и импульсом будет происходить «корпускулярно», порциями, согласно (1). Такие поля можно рассматривать как совокупности «полетонов».

Однако при постоянной связи  $g > \frac{mc}{\hbar} \frac{Mc}{\hbar}$  одна из масс ( $M'$ ) становится мнимой, закон дисперсии частот (7) принимает вид

$$\Omega_k'^2 = c^2 k^2 - \left| \frac{M' c^2}{\hbar} \right|^2 = c^2 (k^2 - k_0^2), \quad (7')$$

так что при малых  $k$  уравнение для осциллятора (6) гласит

$$\frac{d^2 \eta_k}{dt^2} - c^2 k_0^2 \eta_k = 0. \quad (6')$$

Такой осциллятор «квантоваться» не будет<sup>1</sup>, и мы приходим к особому состоянию поля, которому не соответствуют какие-либо частицы.

Рассмотрим теперь другой пример, более близкий к схемам современной теории<sup>2</sup>. Именно, предположим, что энергия взаимодействия полей  $\Psi$  и  $\Phi$  имеет вид  $W = (g/2)\Psi\Phi^2$ . Такое взаимодействие нелинейно (третьего порядка относительно  $\Psi$ ,  $\Phi$ ). Взаимодействия третьего порядка весьма типичны в современной теории.

Задачу с нелинейным взаимодействием невозможно решить точно. Обычно ищут решение в виде разложения по степеням постоянной взаимодействия  $g$ . Мы изберем другой путь — путь качественного анализа. Такой метод рассмотрения не требует предположений о малости  $g$ .

В основу анализа положим метод Гамильтона. Вводя нормальные координаты  $q_k$  и  $Q_k$  и сопряженные им импульсы  $\pi_k$  и  $\Pi_k$ , мы можем написать функцию Гамильтона в виде:

$$H = \frac{1}{2} \int (\pi_k^2 + \omega_k^2 q_k^2) dk + \frac{1}{2} \int (\Pi_k^2 + \Omega_k^2 Q_k^2) dk + \frac{1}{2} g \int \int q_k Q_k Q_{k-s} dk ds. \quad (9)$$

<sup>1</sup> Асимптотическое поведение собственных функций, в отличие от обычного осциллятора, будет иметь вид

$$\Psi_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \exp \left( \frac{i}{2} \eta^2 \pm i \lambda \ln \eta + \dots \right),$$

$\lambda$  — действительное число, пропорциональное энергии.

<sup>2</sup> По поводу общей схемы современной теории квантовых полей см., например, [4].

Потенциальная энергия нашего поля, очевидно, равна:

$$U\{q, Q\} = \frac{1}{2} \int (\omega_k^2 q_k^2 + \Omega_k^2 Q_k^2) dk + \frac{1}{2} g \int \int q_k Q_k Q_{k-s} dk ds \quad (10).$$

и состоит из потенциальной энергии осцилляторов плюс энергии их взаимодействия (последний, двойной интеграл).

Рассмотрим подробнее эту энергию и покажем, что она положительно-недефинитна.

Положим, для доказательства, что:

$$\begin{aligned} q_k &= X \text{ в интервале } k = 2s \pm \Delta/2, & q_k &= 0 \text{ вне этого интервала,} \\ Q_k &= Y \text{ в интервале } k = s \pm \Delta/2, & Q_k &= 0 \text{ вне его.} \end{aligned}$$

Тогда

$$2U = \Delta(\omega^2 X^2 + \Omega^2 Y^2 + g \Delta X Y^2), \quad (11)$$

где  $\omega^2$ ,  $\Omega^2$  — средние значения  $\omega_{2s}^2$ ,  $\Omega_s^2$  в интервале  $\Delta$  около  $k = 2s$  и  $k = s$  соответственно.

Если

$$\Omega^2 + g \Delta X < 0, \quad (12)$$

то при  $Y \rightarrow \pm\infty$ ,  $U \rightarrow -\infty$ , и только при малых  $X$ ,  $Y$  (или  $g \cdot \Delta$ )  $U > 0$ .

Таким образом, недефинитность  $U$  доказана.

На рис. 1 подробнее показан рельеф потенциальной энергии. Сплошные линии на рисунке суть линии  $U$ -постоянной, линия  $aa'$  означает линию  $\Omega^2 + g \Delta X = 0$ . При малых  $X$ ,  $Y$

имеется «кратер», стенки которого круто поднимаются по мере роста  $X$ ,  $Y$ . В этом «кратере» движение будет «квантоваться» — поле будет обладать корпускулярными свойствами. Однако это квантование будет приближенным, так как слева от линии  $aa'$  имеются две симметрично расположенные «пропасти» ( $U \rightarrow -\infty$ ), разделенные друг от друга «горой»  $sbc'$  и барьером  $aa'$  от «кратера», около  $O$ . Подобно тому как вода горного озера, расположенного в глубокой воронке, просачивалась бы через породу в глубокое ущелье,

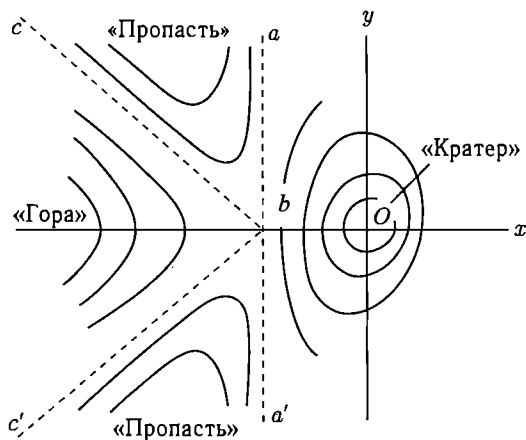


Рис. 1

так и в нашем случае будет происходить перетекание поля из «кратера»  $O$  в пропасть  $(abc)$  и  $(a'bc')$  через потенциальный барьер  $(aa')$ .

В тех же областях, где расположены «пропасти», поле не квантуется, так же как оно не квантуется и в случае осциллятора с отрицательной упругостью (6'). Этим состоянием поля нельзя сопоставить никаких частиц — «полетонов».

Не исключено, конечно, что само кубичное взаимодействие  $W = (g/2) \Psi \Phi^2$  является лишь приближением, подобно тому как является приближением потенциальная энергия негармонического осциллятора:  $(1/2) m \omega^2 x^2 + g x^3 + \dots$

Появление во взаимодействии высших членов, например, типа  $(g/2) \Psi^2 \Phi^2$ , могло бы восстановить положительную дефинитность  $U$ . Тогда «пропасти» могли бы исчезнуть, а вместо них образоваться склоны или новые кратеры.

Особенно любопытно было бы возникновение новых кратеров, так как существование их означало бы возможность малых колебаний поля у новых положений равновесия, а вместе с тем мы вернулись бы вновь к квантуемым состояниям поля, а стало быть, и к частицам, но возникающим не около нулевого поля, как обычно, а около поля конечной величины. Превращение этих частиц в обычные возможно путем просачивания («туннельный эффект») через потенциальные барьеры, разделяющие кратеры.

Сейчас было бы преждевременно подробнее анализировать эти высшие взаимодействия. Но из рассмотренных выше примеров с квадратичным  $(g \Psi \Phi)$  взаимодействием и кубичным  $((g/2) \Psi \Phi^2)$  взаимодействием полей видно, что не всякое возбужденное состояние поля может рассматриваться как эквивалентное существованию частиц — «полетонов».

По всей видимости, существуют и такие состояния полей, которые не сводятся к «полетонам», т. е. *корпускулярно-волновой дуализм не исчерпывает всех мыслимых состояний материи*: могут быть и такие состояния, которые не сводятся к частицам. Являются ли эти состояния чисто математической возможностью или они и на самом деле реализуются в природе — это пока открытый вопрос.

Предполагают, например, что распад  $\mu$ -мезона происходит на электрон и два нейтрино<sup>1</sup>. Но можно ли считать исключенным, что *нейтрино вообще не является «полетоном» и не обладает корпускулярными свойствами?*

Быть может, более тщательные исследования распада мезонов, происходящего с участием нейтральных частиц («нейтрино», «нейтретто»), дадут более определенный ответ на этот вопрос.

## Список литературы

1. Френкель Я. И. // УФН. 1950. Т. 42. С. 69.
2. Блохинцев Д. И. // УФН. 1950. Т. 42. С. 76. — Статья 79 в настоящем издании. — Прим. ред.
3. Смородинский Я. А. // УФН. 1949. Т. 39. С. 325.
4. Вентцель Г. Введение в квантовую теорию волновых полей. Гостехиздат, 1940.

<sup>1</sup> Дальнейшие эксперименты подтвердили это предположение, а нейтральные частицы, о которых говорится далее в статье, это нейтрино трех типов:  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\nu_\tau$  и их античастицы. — Прим. ред.

## О РАСПРОСТРАНЕНИИ СИГНАЛОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ\*

*Представлено академиком Д. В. Скобельцыным 3.12.1951*

### § 1. Введение

Для современной теории поля характерны две основные черты: а) линейность уравнений и б) точечность частиц. Вместе с тем, подобные теории приводят к известным расходимостям ряда физических величин (нулевая энергия поля, собственная энергия частиц). Эти расходимости приходится преодолевать более или менее искусственными приемами (например, метод «перенормировки» массы и заряда [1]). Само существование этих расходимостей указывает на несостоятельность теории применительно к малым областям пространства и времени и на необходимость радикального изменения теории для малых промежутков времени и малых расстояний.

Поскольку указанные выше общие черты современной теории формулируются еще до квантования величин, то они являются «классическими», а не «квантовыми» особенностями теории. В силу этого возможные физические последствия отказа от этих черт могут быть, в духе принципа соответствия, изучены еще в рамках классического рассмотрения.

Ранее нами [2–4] были исследованы последствия отказа от точечности частицы и было показано, что теория, допускающая неточечное взаимодействие, неминуемо ведет к распространению взаимодействия (мы будем в дальнейшем говорить «сигналов») со скоростями, превышающими скорость света<sup>1</sup>. Теперь мы намерены рассмотреть последствия отказа от линейности теории.

Оказывается, что нелинейные теории поля, также как и неточечные линейные теории, ведут к поразительному факту распространения сигнала со скоростью, большей скорости света в пустоте. Поэтому кажется весьма вероятным, что такое «аномальное» распространение сигналов в малых областях пространства-времени должно быть характерной чертой будущей теории поля.

## § 2. Нелинейная теория скалярного или псевдоскалярного мезонного поля

Лагранжиан для этого случая поля может быть написан как функция двух инвариантов:

$$K = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - (\nabla \psi)^2 \right], \quad I = \frac{1}{2} \psi^2, \quad (1)$$

так что

$$L = L(K, I). \quad (2)$$

Из релятивистски-инвариантного вариационного принципа

$$\delta \int L(K, I) dt dx = 0 \quad (3)$$

нетрудно получить следующее уравнение для поля  $\psi$ :

$$\frac{\partial L}{\partial K} \left[ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \nabla^2 \psi \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial K} \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \left( \frac{\partial L}{\partial K} \right) \nabla \psi + \frac{\partial L}{\partial I} \psi = 0, \quad (4)$$

которое очевидным образом инвариантно относительно преобразования Лоренца.

Имея в виду, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial K} \right) = \frac{\partial^2 L}{\partial K^2} \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial K \partial I} \frac{\partial I}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\nabla \left( \frac{\partial L}{\partial K} \right) = \frac{\partial^2 L}{\partial K^2} \nabla K + \frac{\partial^2 L}{\partial K \partial I} \nabla I, \quad (5')$$

мы легко получим из (4) уравнение для поля  $\psi$  в явном виде. Мы выпишем это уравнение для одномерного пространства  $(t, x)$ . Обозначая первые производные через  $p = \partial \psi / \partial t$ ,  $q = \partial \psi / \partial x$ , а вторые через

$$r = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad s = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x}, \quad t = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

и  $\frac{\partial^2 L}{\partial K^2} / \frac{\partial L}{\partial K} = \alpha, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial K \partial I} / \frac{\partial L}{\partial K} = \beta, \quad \frac{\partial L}{\partial I} / \frac{\partial L}{\partial K} = \gamma,$

найдем

$$Ar + 2Bs + Ct + R = 0, \quad (6)$$

где  $A = -(1 + \alpha p^2)$ ,  $B = \alpha p q$ ,  $C = (1 - \alpha q^2)$  и  $R = (\gamma - 2\beta K)\psi$ .

Обозначая далее направление характеристики через  $\xi = dx/dt$ , получим для  $\xi$  уравнение

$$A\xi^2 - 2B\xi + C = 0, \quad (7)$$

которое имеет решение

$$\xi = \frac{\pm\sqrt{1+2\alpha K} - \alpha pq}{(1+\alpha p^2)}, \quad (8)$$

или, при малых  $\alpha(K, I)$ :

$$\xi = \pm 1 \mp \frac{1}{2}\alpha(p \pm q)^2 + \dots \quad (9)$$

Если теперь представить себе, что на отрезке  $a < x < b$  в момент  $t = 0$  задано некоторое начальное состояние  $\psi$ ,  $p$ ,  $q = \partial\psi/\partial x$ , то, как непосредственно видно из (9), при  $\alpha < 0$   $|\xi| > 1$ , т.е.  $|dx/dt| > 1$ . Т.е. состояние из точек  $a < x < b$  будет распространяться со скоростью  $dx/dt$ , большей скорости света в пустоте ( $c = 1$ ), кроме исключительного случая  $p = \mp q$ .

### § 3. Нелинейная теория электромагнитного поля

Рассмотрим теперь тот же вопрос применительно к нелинейной теории М. Борна [8]. В этом случае лагранжиан может быть написан в виде

$$L = L(K, I^2), \quad (10)$$

где  $K = (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)/2$ ,  $I = (\mathbf{E}, \mathbf{H})$ , а  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  имеют смысл напряженностей электромагнитного поля. Варьируя электромагнитные потенциалы  $A$ ,  $\varphi$  ( $\mathbf{E} = -\partial A/\partial t - \nabla\varphi$ ,  $\mathbf{H} = \text{rot } A$ ), получим

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{B}, \quad \text{div } \mathbf{D} = 0, \quad (11)$$

где

$$\mathbf{D} = M\mathbf{E} - N\mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = M\mathbf{H} + N\mathbf{E} \quad (12)$$

и  $M = \partial L/\partial K$ ,  $N = \partial L/\partial I$ . Вторая группа уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0 \quad (13)$$

следует из определения  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  через  $A$  и  $\varphi$ . В явном виде уравнения для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  можно получить, если выразить производные от  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  через производные от  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $K$  и  $I$ .

В дальнейшем рассмотрим одномерный случай, именно  $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$ ,  $\mathbf{H} = (0, H_y, 0)$  и  $E_x = E(t, z)$ ,  $H_y = H(t, z)$ . Тогда уравнения (11), (13) примут простой вид

$$(1 + \alpha E^2) \frac{\partial E}{\partial t} + \alpha E H \frac{\partial E}{\partial z} - \alpha E H \frac{\partial H}{\partial t} + (1 - \alpha H^2) \frac{\partial H}{\partial z} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (14')$$

где по-прежнему  $\alpha = \frac{\partial^2 L}{\partial K^2} / \frac{\partial L}{\partial K}$ . Уравнение для характеристического направления  $\xi = dz/dt$  теперь записывается так:

$$(1 + \alpha E^2) \xi^2 + 2\alpha E H \xi + (1 - \alpha H^2) = 0, \quad (15)$$

откуда

$$\xi = \frac{\pm \sqrt{1 + 2\alpha K} - \alpha E H}{(1 + \alpha E^2)}, \quad (16)$$

или, при малых  $\alpha$ :

$$\xi = \pm 1 \mp \frac{1}{2} \alpha (E \pm H)^2 + \dots \quad (16')$$

т. е. и в этом случае мы приходим к возможности сверхсветовых сигналов.

Интересно еще и то обстоятельство, что в подобных нелинейных теориях нельзя заранее исключить и такую ситуацию, когда при определенных значениях  $E$ ,  $H$  или  $\psi$  характеристические направления сделаются мнимыми, так что уравнения поля станут в  $(t, x)$  уравнениями эллиптического типа, а это будет означать, что понятие причинной последовательности событий потеряет свой смысл, и мы будем иметь дело со связанным «комком» событий, которые взаимно друг друга обуславливают, но не следуют одно за другим. Может ли на самом деле возникнуть нечто подобное, например, «внутри» частиц,— это остается пока открытым вопросом.

Известно, что квантование нелинейных уравнений поля представляет собой нерешенную математическую задачу. Из изложенного видно, что трудности формулировки квантовых условий для нелинейного поля имеют не только математическую природу. Ввиду возможности появления взаимодействия, распространяющегося со скоростью больше  $c$ , метод Гамильтона применительно к нелинейному полю будет столь же несостоятелен, как он несостоятелен по отношению к неточечным взаимодействиям.

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступила  
1 декабря 1951 г.

### Список литературы

1. Сдвиг уровней атомных электронов: Сб. пер. М.: Иностр. лит., 1950.
2. Блохинцев Д. И. // Уч. зап. МГУ. Вып. 77. Физика. 1945. Кн. 3. С. 101–111.
3. Блохинцев Д. И. // J. Phys. 1946. V. 10. P. 167; ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 480. — Статья 73 в настоящем издании. — *Прим. ред.*
4. Блохинцев Д. И. // ЖЭТФ. 1948. Т. 18. С. 566. — Статья 77 в настоящем издании. — *Прим. ред.*
5. Марков М. А. // ЖЭТФ. 1940. Т. 10. С. 1311; 1946. Т. 16. С. 790.
6. Марков М. А. // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. С. 11.
7. Pais A., Uhlenbeck G. // Phys. Rev. 1951. V. 79. P. 145.
8. Born M. // Proc. Roy. Soc. 1934. V. 143. P. 410.



## О РАСПРОСТРАНЕНИИ СИГНАЛОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ\*

*Совместно с В. В. Орловым*

Показано, что в нелинейной электродинамике общего вида возможны четыре скорости распространения сигналов, которые могут быть как больше, так и меньше скорости света. В общем случае уравнения поля могут стать эллиптическими, возможны также ударные электромагнитные волны. Вариант теории Борна-Инфельда выделен из других возможных формулировок нелинейной электродинамики.

Вопрос о распространении сигналов имеет большое значение в теории поля. Известно, что в основе теории относительности, играющей ведущую роль в современной теории поля, лежит предположение о постоянстве скорости распространения световых сигналов. Известно также, что существующие квантовые формулировки теории поля основываются на предположении о распространении сигналов со скоростью света.

В работах [1, 2] было установлено, что в нелинейной теории поля взаимодействия осуществляются со скоростями, которые зависят от величины поля и отличаются от скорости света в вакууме. При этом под скоростью взаимодействия понимается скорость фронта волны, осуществляющей взаимодействие. Понятие же фазовой скорости лишено в нелинейной теории точного смысла и, как и само понятие фазы, может применяться лишь приближенно, при слабых полях.

Нелинейная теория поля представляет собой одну из попыток последовательного построения теории, свободной от трудностей линейной теории, связанных с обращением в бесконечность энергии частиц. Действительно, нелинейная электродинамика Борна-Инфельда в классической формулировке [3] позволяет последовательно осуществить программу полевой гипотезы строения элементарных частиц.

Развитие нелинейной теории приводит к изменению и расширению основных представлений современной теории таких, как представление о «системе взаимодействующих посредством поля частиц», к более тесной связи между полевыми и корпускулярными формами материи, к возможности изменения пространственно-временных соотношений на малых масштабах. Таким образом, несмотря на сходство математического аппарата, нелинейная теория

приводит к качественно новым и гораздо более богатым физическим представлениям, нежели теория линейная.

В настоящей работе рассматриваются некоторые общие свойства математического аппарата нелинейной электродинамики, связанные с распространением сигналов.

## 1. Уравнения поля

Из определения напряженности поля через потенциалы

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right), \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$$

получим первую группу уравнений электромагнитного поля

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (1a)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (1б)$$

Вторую пару уравнений можно получить как уравнения Эйлера для вариационной задачи

$$\delta \int L(\mathbf{E}, \mathbf{H}) dx dt = 0,$$

взяв в качестве функции Лагранжа  $L(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  некоторую функцию полей, инвариантную относительно преобразований Лоренца.

Если мы ограничиваемся исследованием уравнений без высших производных, то  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  должны входить в  $L$  в инвариантных комбинациях

$$K = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2), \quad I^2 = (\mathbf{E}\mathbf{H})^2.$$

Таким образом,  $L = L(K, I^2)$ . Тогда мы придем к уравнениям:

$$\text{rot } \mathbf{B} = -\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2a)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 0, \quad (2б)$$

где индукции  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  выражаются через  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  так:

$$\mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{E}} = M\mathbf{E} + N\mathbf{H}, \quad (3a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{H}} = M\mathbf{H} - N\mathbf{E}. \quad (3б)$$

Здесь

$$M(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \frac{\partial L}{\partial K}, \quad N(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \frac{\partial L}{\partial I}.$$

Уравнения (1а), (2а) вместе с соотношениями (3) представляют собой полную группу уравнений электродинамики. Из этой группы подстановкой  $\mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  из (3) в (2а) получим нелинейную систему уравнений относительно  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ :

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (4а)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} + [(\beta \mathbf{E} - \alpha \mathbf{H}) \operatorname{grad} K] - [(\beta \mathbf{H} - \gamma \mathbf{E}) \operatorname{grad} I] = \\ = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + (\alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{H}) \frac{\partial K}{\partial t} + (\beta \mathbf{E} + \gamma \mathbf{H}) \frac{\partial I}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4б)$$

Здесь введены обозначения:

$$\alpha(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \frac{1}{M} \frac{\partial^2 L}{\partial K^2}, \quad \beta(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \frac{1}{M} \frac{\partial^2 L}{\partial K \partial I}, \quad \gamma(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \frac{1}{M} \frac{\partial^2 L}{\partial I^2}.$$

Электрическое поле покоящегося электрона трактуется как сферически-симметричное решение уравнения (2б), т. е.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 D_r(r)] = 0, \quad \text{откуда} \quad D_r(r) = \frac{e}{r^2}.$$

Если считать магнитное поле электрона  $\mathbf{H}_e = 0$ , что представляет собой, конечно, значительную идеализацию, то из (3а) получим уравнение для определения поля электрона  $E_r(r)$ :

$$D_r(r) = \frac{e}{r^2} = E_r M(E_r).$$

Уже из этого определения следуют некоторые свойства функции Лагранжа и поля электрона  $E_r(r)$ . Если предположить, что  $E_r(r)$  — непрерывная функция при  $0 < r < \infty$  вместе с  $M(r)$ , то отсюда сразу же следует, что  $E_r^2(r)$  — монотонно убывающая функция. Действительно, пусть  $E_r(r_1) = E_r(r_2) = E_0$ . Тогда  $E_0 M(E_0) = e/r_1^2 = e/r_2^2$ , т. е.  $r_1 = r_2$ . Но так как при больших  $r$  поле совпадает с кулоновым, т. е.  $E_r^2(r)$  убывает, то  $E_r^2(r)$  убывает и при любых  $r$ . Из непрерывности  $E_r(r)$  и  $M(r)$  следует также, что  $M = \partial L / \partial K > 0$ , так как, если бы при некотором  $r = r_1$ ,  $M(r_1) = 0$ , то  $E_r(r_1) = \infty$ .

Из условия убывания  $E_r^2(r)$  мы получим важное для нас в дальнейшем неравенство:

$$\frac{dE_r^2}{dr} = \frac{1}{M^2} (D_r^2)' - \frac{1}{M^3} \left( \frac{\partial M}{\partial K} \right) D_r^2 \frac{dE_r^2}{dr},$$

откуда

$$\frac{dE_r^2}{dr} = \left( \frac{dD_r^2}{dr} \right) / M^2 \left[ 1 + \frac{1}{M^3} \left( \frac{\partial M}{\partial K} \right) D_r^2 \right] < 0,$$

или окончательно

$$1 + \alpha(E^2) E^2 > 0,$$

так как

$$\frac{dD_r^2}{dr} = -\frac{4e^2}{r^5} < 0, \quad D_r = ME_r, \quad \frac{1}{M} \frac{\partial M}{\partial K} = \alpha.$$

От функции Лагранжа нужно потребовать также соответствия с классической теорией, т. е.  $L \rightarrow K$ ,  $M \rightarrow 1$  при малых  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ .

Введя тензор энергии-импульса поля

$$4\pi T_{\mu\nu} = \sum F_{\mu\lambda} \Pi_{\lambda\nu} - \delta_{\lambda\nu} L,$$

где  $F_{\mu\nu}$  — компоненты тензора напряженностей поля, а  $\Pi_{\mu\nu}$  — соответствующие моменты, т. е.  $\Pi_{\mu\nu} = \partial L / \partial F_{\mu\nu}$ , получим еще ряд условий, накладываемых на функцию Лагранжа. Так, теорема Лауэ, обеспечивающая устойчивость и правильные трансформационные свойства энергии и импульса электрона, требует, чтобы  $\int T_{\mu\nu}^0 dV = 0$  для всех компонент  $T_{\mu\nu}^0$  покоящегося электрона, кроме  $T_{44}^0$ .

Далее, плотность энергии поля электрона  $T_{44}^0 = (1/4\pi)(E_r D_r - L)$  должна быть неотрицательной, откуда

$$ME_r^2 \geq L, \quad \text{т. е.} \quad E_r^2 \frac{\partial L}{\partial K} \geq L.$$

Собственная энергия электрона есть

$$U_0 = \int T_{44}^0 dv = e^2 \int_0^\infty \frac{dr}{r^2 M(r)} - e^2 \int_0^\infty r^2 L(r) dr.$$

Из соответствия с классической теорией следует, что оба интеграла сходятся на верхнем пределе. Для сходимости первого интеграла в нуле нужно потребовать, чтобы  $M(r) \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow 0$  быстрее, чем  $1/r$ . Это означает, что поле электрона  $E_r(r) < c/r$  при  $r \rightarrow 0$ , и, в частности, может быть конечным при  $r = 0$ . При этом условие положительности плотности энергии обеспечивает сходимость второго интеграла.

## 2. Распространение фронта волны

Обозначив компоненты полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  через  $v_j$  ( $j = 1, \dots, 6$ ) и независимые переменные через  $x_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ), мы можем записать систему уравнений (4) в виде:

$$\sum_{j=1}^6 \sum_{k=0}^3 a_{ij}^{(k)} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (5)$$

где коэффициенты  $a_{ij}^{(k)}$  суть функции от  $v_j$ .

Фронт волны всегда представляет собой движущуюся поверхность, на которой напряженности поля или их производные терпят разрывы. Ес-

ли напряженности непрерывны, а разрывны лишь их производные некоторого порядка (слабый разрыв), то поверхность, несущая на себе разрывы  $\psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ , является характеристической поверхностью системы (5). В этом разделе мы будем исследовать распространение лишь слабых разрывов.

Вводя выражения

$$\omega_{ij} = \sum_{k=0}^3 a_{ij}^{(k)} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6), \quad (6)$$

мы можем записать дифференциальное уравнение для характеристических поверхностей в виде:

$$|\omega_{ij}| = 0, \quad (7)$$

где  $|\omega_{ij}|$  — определитель 6-го порядка (см. [4]).

Скорость движения характеристической поверхности в пространстве  $(x, y, z)$  есть

$$\zeta = - \frac{\partial \psi / \partial t}{|\text{grad } \psi|}. \quad (8)$$

Простой линейной комбинацией столбцов определителя

$$\begin{aligned} \text{I}^* &= \frac{\partial \psi}{\partial t} \text{I} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \text{V} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{VI}; \\ \text{II}^* &= \frac{\partial \psi}{\partial t} \text{II} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \text{IV} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{VI}; \\ \text{III}^* &= \frac{\partial \psi}{\partial t} \text{III} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{IV} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{V} \end{aligned}$$

мы добьемся исчезновения недиагональных элементов в последних трех строках, сведя определитель (7) к определителю 3-го порядка (предварительно разделив уравнение (7) на  $(\partial \psi / \partial t)^3 \neq 0$ ):

$$|\Omega_{mn}| = 0. \quad (9)$$

Введем теперь в каждой точке поверхности фронта волны систему координат, ось  $z$  которой направлена по нормали к поверхности  $\mathbf{n}$ , с тем, чтобы, значительно упростив громоздкие вычисления, в результате перейти к единой системе координат простым преобразованием.

В выбранной системе координат

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \zeta = - \frac{\partial \psi / \partial t}{\partial \psi / \partial z}.$$

Разделив каждый элемент определителя (9) на  $(\partial \psi / \partial z)^2$ , а 3-й столбец и 3-ю строку еще на  $\zeta$ , получим уравнение:

$$D(\zeta) = |Q_{mn}(\zeta)| = 0 \quad (m, n = 1, 2, 3), \quad (10)$$

где  $D(\zeta)$  есть многочлен 4-й степени от  $\zeta$ :

$$D(\zeta) = A\zeta^4 + 2B\zeta^3 + C\zeta^2 + 2D\zeta + E. \quad (11)$$

Коэффициенты  $A, B, C, D, E$  являются функциями компонент полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Последовательно дифференцируя определитель (10), найдем эти коэффициенты:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{24} D^{(IV)}(0) = 1 + \alpha \mathbf{E}^2 + \gamma \mathbf{H}^2 + 2\beta(\mathbf{EH}) + (\alpha\gamma - \beta^2) [\mathbf{EH}]^2, \\ B &= \frac{1}{12} D'''(0) = -(\gamma + \alpha) [\mathbf{EH}]_z - (\alpha\gamma - \beta^2) [\mathbf{EH}]_z (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2), \\ C &= \frac{1}{2} D''(0) = -2 - (\alpha - \gamma) (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2) - (\alpha + \gamma) (E_z^2 + H_z^2) - 4\beta(\mathbf{EH}) + \\ &\quad + (\alpha\gamma - \beta^2) [(E_x^2 + E_y^2 + H_x^2 + H_y^2)^2 - [\mathbf{EH}]^2 + 3[\mathbf{EH}]_z^2 + E_z^2 (E_x^2 + E_y^2) + \\ &\quad + H_z^2 (H_x^2 + H_y^2) + 2E_z H_z (E_x H_x + E_y H_y)], \\ D &= \frac{1}{2} D'(0) = (\alpha + \gamma) [\mathbf{EH}]_z - (\alpha\gamma - \beta^2) [\mathbf{EH}]_z (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2 - 2E_z^2 - 2H_z^2), \\ E &= D(0) = 1 - \alpha \mathbf{H}^2 - \gamma \mathbf{E}^2 + (\alpha + \gamma) (E_z^2 + H_z^2) + 2\beta(\mathbf{EH}) + \\ &\quad + (\alpha\gamma - \beta^2) [[\mathbf{EH}]_z^2 - E_z^2 (E_x^2 + E_y^2)^2 - H_z^2 (H_x^2 + H_y^2) - 2E_z H_z (E_x H_x + E_y H_y)]. \end{aligned}$$

Уравнение (10) определяет при заданных величинах полей на фронте волны четыре скорости распространения в каждом направлении, если корни его вещественны. В этом случае система уравнений (4) — гиперболическая.

В случае комплексных корней  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$  в некоторой области значений  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  и в некотором телесном угле направлений распространения  $\mathbf{n}$  уравнения становятся эллиптического типа. Могут быть также случаи пары комплексных и пары действительных корней. Тогда система уравнений (4) — смешанного типа.

Если известно некоторое статическое решение системы (4)  $\mathbf{E}(x, y, z)$ ,  $\mathbf{H}(x, y, z)$  и в некоторой области, ограниченной поверхностью  $S$ , в начальный момент задано возмущение  $\mathbf{e}^0(x, y, z)$ ,  $\mathbf{h}^0(x, y, z)$ , обращающееся на  $S$  в нуль, то в случае гиперболической системы (4) образуются четыре сигнала, распространяющиеся со скоростями  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ . Поверхность  $S$  распадается на четыре движущихся фронта волны  $\psi^{(l)}(x, y, z, t) = 0$ . На каждой из этих поверхностей величины разрывов напряженностей связаны кинематическими условиями совместности

$$\left[ \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right] = r_j \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \quad (12)$$

или в нашей системе координат, где  $\partial \psi / \partial x = \partial \psi / \partial y = 0$ :

$$\left[ \frac{\partial v_j}{\partial x} \right] = \left[ \frac{\partial v_j}{\partial y} \right] = 0, \quad \left[ \frac{\partial v_j}{\partial z} \right] = r_j \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

и динамическими условиями совместности (см. [4]):

$$\sum_{j=1}^6 r_j \omega_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (13)$$

Здесь  $[f]$  означает разность значений  $f$  на двух сторонах поверхности разрыва,  $\omega_{ij}$  — величины (6).

Из последних трех уравнений (13) получаем для каждого  $\zeta$

$$r_4 = -\frac{r_2}{\zeta}, \quad r_5 = \frac{r_1}{\zeta}, \quad r_6 = 0. \quad (14)$$

Подставив (14) в остальные уравнения (13), получим

$$\sum_{m=1}^3 Q_{mn}(\zeta) r_m = 0 \quad (n = 1, 2, 3). \quad (15)$$

Так как  $\zeta$  является одним из решений уравнения  $|Q_{mn}(\zeta)| = 0$ , то из системы (15) мы для каждого действительного  $\zeta$  получим систему значений  $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6)$ .

Объединив  $r_j$  в векторы  $\mathbf{r}_e(r_1, r_2, r_3)$ ,  $\mathbf{r}_h(r_4, r_5, 0)$  и приняв во внимание, что напряженности  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  и их производные перед фронтом равны нулю, получим из (12) приближенные значения полей  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{h}$  около фронта волны:

$$\mathbf{e}(x, y, z, t) \approx \mathbf{r}_e \psi(x, y, z, t), \quad \mathbf{h}(x, y, z, t) \approx \mathbf{r}_h \psi(x, y, z, t). \quad (16)$$

Из соотношений (14) тогда вытекает, что вблизи фронта

$$(\mathbf{e}\mathbf{h}) \approx -\left(\frac{r_1 r_2}{\zeta}\right) + \left(\frac{r_1 r_2}{\zeta}\right) = 0,$$

т. е.  $\mathbf{e} \perp \mathbf{h}$ . Если  $|\mathbf{e}| \ll |\mathbf{E}|$ ,  $|\mathbf{h}| \ll |\mathbf{H}|$ , то выражения (16) будут решением уравнений в линейном приближении, когда коэффициенты уравнений (4) можно считать зависящими лишь от  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , являющихся известными функциями координат.

### 3. Одномерный случай

Сначала рассмотрим простой случай постоянных полей  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$ , и решения  $\mathbf{e}(z, t)$ ,  $\mathbf{h}(z, t)$ . Мы будем здесь считать  $L = L(K)$ . Из уравнения (10) получим тогда для  $\zeta$

$$(\zeta^2 - 1)\{(\zeta^2 - 1)(1 + \alpha E_{0z}^2) + \alpha[(E_{0x}\zeta - H_{0y})^2 + (E_{0y}\zeta + H_{0x})^2]\} = 0. \quad (17)$$

Для величины разрывов находим из (15)

$$r_2 = -\frac{(\zeta^2 - 1)(1 + \alpha E_{0z}^2) + \alpha(\zeta E_{0x} - H_{0y})^2}{\alpha(\zeta E_{0y} + H_{0x})(\zeta E_{0x} - H_{0y})} r_1, \quad r_3 = E_{0z} \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta E_{0x} - H_{0y}} r_1. \quad (18)$$

Произвольный сигнал распадается в поле  $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ , аналогично образованию обыкновенного и необыкновенного лучей в кристаллооптике<sup>1</sup>.

В «обыкновенном» луче  $\zeta = \pm 1$ ,  $r_2 = \frac{\pm E_{0x} - H_{0y}}{\pm E_{0y} + H_{0y}} r_1$ ,  $r_3 = 0$ , т. е. около фронта волны, например, с  $\zeta = +1$ , напряженности полей будут

$$e_x, e_y = -\frac{E_{0x} - H_{0y}}{E_{0y} + H_{0y}} e_x, \quad e_z = 0, \quad h_x = -e_y, \quad h_y = e_x, \quad h_z = 0.$$

В «необыкновенном» луче  $\zeta$  получается приравниванием нулю фигурной скобки в (17). Подставив отсюда выражение для  $(\zeta^2 - 1)(1 + \alpha E_{0z}^2)$  в (18), получим

$$r_2 = \frac{\zeta E_{0y} + H_{0x}}{\zeta E_{0x} - H_{0y}} r_1, \quad r_3 = E_{0z} \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta E_{0x} - H_{0y}} r_1.$$

Таким образом при  $\zeta \neq \pm 1$  в «необыкновенном» луче присутствует (при  $E_{0z} \neq 0$ ) продольная компонента  $e_z$ .

Рассмотрим сигнал  $e_x, h_y$ , распространяющийся в поле  $E_{0x} = E, H_{0y} = H$  ( $E_y = E_z = H_x = H_z = 0$ ). В этом случае

$$\zeta^2 - 1 = -\alpha(\zeta E - H)^2 \quad (19)$$

или

$$\zeta_{\pm} = \frac{\alpha E H \pm \sqrt{1 + \alpha(E^2 - H^2)}}{1 + \alpha E^2}. \quad (20)$$

Из (19) следует что при  $\alpha > 0$ ,  $|\zeta_{\pm}| \leq 1$ ; при  $\alpha < 0$ , т. е. в области значений  $E, H$ , где  $\partial^2 L / \partial K^2 < 0$ ,  $|\zeta_{\pm}| \geq 1$ .

Из (20) следует, что скорости в противоположных направлениях различны по величине. При  $|\alpha E H| > \sqrt{1 + \alpha(E^2 - H^2)}$ , например, обе волны двигаются в одну сторону. В области значений  $E, H$ , в которой  $\alpha(E^2 - H^2) < -1$ ,  $\zeta_{\pm}$  становятся комплексными и система уравнений для  $e_x, h_y$  — эллиптической.

Если функция Лагранжа взята в виде

$$L = b^2 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{E^2 - H^2}{b^2}} \right), \quad (21)$$

предложенном Борном и Инфельдом, то

$$\alpha = [b^2 - (E^2 - H^2)]^{-1}$$

и, следовательно,  $|\zeta_{\pm}| \leq 1$  при любых  $E$  и  $H$ .

<sup>1</sup> Здесь отличие от распространения света в кристаллах заключается в том, что там разделяются фазовые скорости для различных поляризаций, скорость же фронта волны в любом диэлектрике равна скорости света в вакууме.



В этом случае

$$\zeta_{\pm} = \frac{EH \pm b\sqrt{b^2 - (E^2 - H^2)}}{b^2 + H^2}. \quad (22)$$

Так как  $E^2 - H^2 < b^2$ , то при любых значениях  $E$  и  $H$  уравнения являются гиперболическими.

#### 4. Ударные волны в электродинамике

Линейное приближение, полученное в предыдущем разделе, не учитывает деформации профиля распространяющейся волны. Применимость его поэтому ограничена сравнительно небольшими расстояниями и промежутками времени. В действительности же в решениях нелинейных уравнений, отвечающих непрерывным начальным условиям, со временем во многих случаях возникают сильные разрывы. В газовой динамике это явление известно как образование ударных волн [5].

Рассмотрим одномерный случай, считая  $E_y = E_z = H_x = H_z = 0$ ,  $E_x = E$ ,  $H_y = H$ ,  $L = L(K)$ . Уравнения (4) принимают в этом случае вид

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

$$[1 + \alpha(E, H)E^2] \frac{\partial E}{\partial t} + \alpha(E, H)EH \frac{\partial E}{\partial t} - \alpha(E, H)EH \frac{\partial H}{\partial t} + [1 - \alpha(E, H)H^2] \frac{\partial H}{\partial z} = 0. \quad (23)$$

Эту систему уравнений можно заменить характеристической системой уравнений, в каждом из которых производные берутся лишь по одному из независимых переменных [5]:

$$\frac{\partial z}{\partial u} - \zeta_+(E, H) \frac{\partial t}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial v} - \zeta_-(E, H) \frac{\partial t}{\partial v} = 0, \quad (24a)$$

$$\frac{\partial E}{\partial u} - \zeta_-(E, H) \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial v} - \zeta_+(E, H) \frac{\partial H}{\partial v} = 0. \quad (24b)$$

Здесь  $\zeta_+$  и  $\zeta_-$  находятся из (20). Величины  $\zeta_{\pm}$  определяют в каждой точке плоскости  $z, t$  для данного решения  $E, H$  два характеристических направления

$$\frac{dz}{dt} = \zeta_+ \quad \text{и} \quad \frac{dz}{dt} = \zeta_-.$$

Новые переменные  $u, v$ , как это следует из (24a), определяются тем, что кривые  $u = \text{const}$  и  $v = \text{const}$  имеют в каждой точке одно из характеристических направлений.

Если в постоянном поле  $E_0, H_0$  в начальный момент  $t_0$  задано возмущение  $e_0(z), h_0(z)$ , отличное от нуля при  $a < z < b$ , то внутри указанных на рис. 1

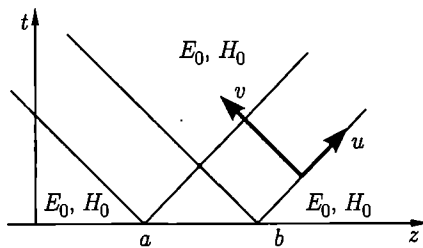


Рис. 1

полос начнут распространяться две волны со скоростями  $\zeta_+$  и  $\zeta_-$ . Вне полос  $E = E_0$ ,  $H = H_0$ .

Рассмотрим поведение решения  $E$ ,  $H$  внутри, например, правой полосы. Вдоль оси  $v$  величины  $E$  и  $H$  определяются уравнением

$$\frac{\partial E}{\partial v} - \zeta_+(E, H) \frac{\partial H}{\partial v} = 0.$$

Если известен интеграл этого уравнения  $r(E, H)$ , то вдоль оси  $v$  имеем  $r(E, H) = \text{const}$  и

$$\frac{\partial E}{\partial H} = -\frac{\partial r / \partial H}{\partial r / \partial E} = \zeta_+(E, H).$$

Условием отсутствия деформации сигнала является одинаковый угол наклона характеристик  $v = \text{const}$ , т.е. постоянство  $\zeta_+$  во всей правой полосе. Таким образом  $\zeta_+(E, H)$  в этом случае является интегралом  $r(E, H)$  и, следовательно,

$$\frac{\partial \zeta_+}{\partial H} = -\zeta_+ \frac{\partial \zeta_+}{\partial E}.$$

Таким же образом для левой полосы получаем аналогичное условие

$$\frac{\partial \zeta_-}{\partial H} = -\zeta_- \frac{\partial \zeta_-}{\partial E}.$$

Итак, мы получаем уравнение для функции  $\zeta(E, H)$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial H} + \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial E} = 0, \quad (25)$$

как условие отсутствия деформации сигнала.

Если уравнение (25) не выполнено и  $\zeta$  не является интегралом, то характеристики, являющиеся прямыми линиями, пересекаются, образуя ударные волны. Ударные волны распространяются уже не по характеристике.

При выполнении условия (25)

$$\zeta_{\pm}(E, H) = \zeta_{\pm}(E_0, H_0) = \zeta_{\pm}^0.$$

Из уравнений (24б) имеем тогда вдоль  $u = \text{const}$  соответственно и  $v = \text{const}$ , а следовательно, для каждой из двух полос  $dE = \zeta_{\pm}^0 dH$ , т.е.

$$E = E_0 + e(z - \zeta_{\pm}^0 t), \quad H = H_0 + h(z - \zeta_{\pm}^0 t),$$

где

$$e(z - \zeta_{\pm}^0 t) = \zeta_{\pm}^0 h(z - \zeta_{\pm}^0 t),$$

что аналогично решению линейного уравнения.

Нетрудно проверить, что функция

$$\zeta_{\pm} = \frac{EH \pm b\sqrt{b^2 - (E - H^2)}}{b^2 + H^2},$$

получающаяся в теории Борна-Инфельда, удовлетворяет условию (25).

Найдем теперь класс функций Лагранжа  $L(K)$ , удовлетворяющих условию (25). Подставив в уравнение (25)  $\zeta_{\pm}[\alpha]$  из (20), получим уравнение относительно  $\alpha(E, H)$ :

$$\Phi_{\pm}\left(E, H, \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial E}, \frac{\partial \alpha}{\partial H}\right) = 0. \quad (26)$$

Уравнение (26), в частности, должно выполняться вдоль всякой кривой в плоскости  $E, H$ . Возьмем, например, прямую  $H = 0$ . Так как  $\alpha = \alpha(K) = \alpha[1/2(E^2 - H^2)]$ , то при  $H = 0$ ,  $\partial \alpha / \partial H = -H \partial \alpha / \partial K = 0$ , и уравнение (26) принимает вид

$$E\alpha^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial E}\right) = 0,$$

или, подставив  $\partial \alpha / \partial E = E \partial \alpha / \partial K$ :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial K} = 2\alpha^2. \quad (27)$$

Решая обыкновенное дифференциальное уравнение (27), мы можем, вообще говоря, получить и лишние решения, не являющиеся решениями уравнения (26). Решение уравнения (27) есть  $\alpha = -1/(C_1 + 2K)$ , где  $C_1$  — постоянная интегрирования. Но  $\alpha = L''/L' = d \ln L'/dK$ . Если теперь считать  $C_1 > 0$ , то  $L' = C_2/\sqrt{C_1 + 2K}$ . При этом, однако, для электрона, когда  $2K = E^2$ ,  $L'(E^2)$  нигде не обращается в бесконечность, что противоречит нашему условию сходимости энергии электрона в разделе 1.

Положив  $C_1 = -b^2$ , получим  $L' = C_2/\sqrt{b^2 - 2K}$  или, так как  $L'(0) = 1$ :

$$L' = \frac{b}{\sqrt{b^2 - 2K}}, \quad (28)$$

где  $b > 0$ , так как  $L' > 0$ .

Функция такого вида приводит к функции Лагранжа из теории Борна и Инфельда

$$L = b^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{E^2 - H^2}{b^2}}\right),$$

которая, как указывалось выше, удовлетворяет условию (25). Этим доказано, что единственным вариантом нелинейной электродинамики, не приводящим к возникновению ударных волн, является теория Борна-Инфельда.

## 5. Распространение сигнала в центральном электрическом поле (в поле электрона)

В этом разделе рассмотрим прохождение фронта волны в поле электрона  $E_0 = E_r(r)$ ,  $\mathbf{H}_0 = 0$ . Мы будем считать, что  $E_r(r)$  удовлетворяет условиям, сформулированным в разделе 1. Прежде всего заметим, что в силу  $\mathbf{H}_0 = 0$ :

$$I_0 = (\mathbf{E}_0 \mathbf{H}_0) = 0, \quad [\mathbf{E}_0 \mathbf{H}_0] = 0. \quad (29)$$

Отсюда следует, что

$$\beta = \frac{1}{M} \frac{\partial^2 L}{\partial K \partial I} = \frac{1}{M} \frac{\partial M}{\partial I} = \frac{2I}{M} \frac{\partial M}{\partial(I^2)} = 0; \quad (30)$$

$$\gamma = \frac{1}{M} \frac{\partial^2 L}{\partial I^2} = \frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial I} = \left( 2I \frac{\partial L}{\partial(I^2)} \right) = \frac{2}{M} \frac{\partial L}{\partial(I^2)}. \quad (31)$$

При этом, вообще говоря,  $\gamma \neq 0$  даже при  $I = 0$ .

Из равенства  $[\mathbf{E}\mathbf{H}] = 0$  вытекает, что характеристическое уравнение (10) является биквадратным:

$$(1 + \alpha \mathbf{E}^2) \zeta^4 - [1 + \alpha E_z^2 + (1 + \alpha E^2)(1 - \gamma E_x^2)] \zeta + (1 + \alpha E_z^2)(1 - \gamma E_x^2) = 0. \quad (32)$$

Здесь положено  $E_y = 0$ , что всегда можно достичь поворотом системы координат. Из (32) получим выражения для скоростей:

$$\zeta_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \alpha E_z^2}{1 + \alpha \mathbf{E}^2}}, \quad (33)$$

$$\zeta_{3,4} = \pm \sqrt{1 - \gamma E_x^2}. \quad (34)$$

При этом  $E_x$ ,  $E_z$  берутся в каждой точке в своей системе координат, зависящей от направления распространения фронта волны.

Так как задача обладает центральной симметрией, то достаточно ее решить в одной какой-либо плоскости, проходящей через центр электрона, например, в плоскости  $x, z$ . В этом случае во всех точках  $E_y = 0$ . Перейдя к единой системе координат, получим

$$\zeta_{1,2}(x, z, \mathbf{n}) = \pm \sqrt{\frac{1 + \alpha E_r^2 \cos^2(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{1 + \alpha E_r^2}}, \quad (33a)$$

$$\zeta_{3,4}(x, z, \mathbf{n}) = \pm \sqrt{1 - \gamma E_r^2 \sin^2(\mathbf{r}, \mathbf{n})}. \quad (34a)$$

Таким образом, в каждой точке  $(x, z)$  имеется два пучка скоростей  $\zeta \mathbf{n}$ . Из неравенства  $1 + \alpha E^2 > 0$ , полученного в разделе 1, следует, что величины  $\zeta_{1,2}$  всегда действительны.

На функцию  $\gamma(E^2)$  никаких ограничений наложено не было, что связано с тем, что мы пренебрегли магнитным полем электрона. При  $\gamma(E_r^2) > 1/E_r^2$  возможны такие конусы направлений  $\cos^2(\mathbf{r}, \mathbf{n}) > 1/\gamma E_r^2$ , что  $\zeta_{3,4}$  становятся мнимыми. Это эквивалентно бесконечной скорости распространения сигнала в этих направлениях.

Далее видно, что при  $\alpha > 0$   $|\zeta_{1,2}| \leq 1$ . Если в некоторой области  $\partial^2 L / \partial K^2 < 0$ , т.е.  $\alpha < 0$ , то там  $|\zeta_{1,2}| > 1$ . В окрестности центра электрона  $\alpha > 0$ , так как  $(\partial L / \partial K) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty$  и, следовательно,  $\partial^2 L / \partial K^2$  положительно.

При  $\gamma > 0$   $|\zeta_{3,4}| \geq 1$ , при  $\gamma < 0$   $|\zeta_{3,4}| \geq 1$ .

Заметим также, что если фронт волны распространяется по направлению к центру, то  $\cos^2(\mathbf{r}\mathbf{n}) = 1$ ,  $\sin^2(\mathbf{r}\mathbf{n}) = 0$  и

$$\zeta_{1,2} = \zeta_{3,4} = \pm 1.$$

Для исследования распространения фронта волны воспользуемся уравнением (9) раздела 2, которое в нашем случае распадается на два уравнения, соответствующие двум скоростям распространения (33) и (34):

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 (1 + \alpha \mathbf{E}^2) - (\nabla \psi)^2 - \alpha (\mathbf{E} \nabla \psi)^2 = 0, \quad (35)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 - (\nabla \psi)^2 + \gamma [\mathbf{E}, \nabla \psi]_y^2 = 0. \quad (36)$$

Воспользовавшись полярными координатами  $r, \vartheta$  в плоскости  $x, z$  и обозначив  $t = x_0$ ,  $r = x_1$ ,  $\vartheta = x_2$ , запишем уравнения (35), (36) в виде

$$\sum_{i,k} g^{ik}(r) \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0, \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} g^{00} &= 1, & g^{11} &= -1, \\ g^{22} &= \begin{cases} -\frac{1}{r^2(1 + \alpha E_r^2)} & \text{для уравнения (35),} \\ -\frac{1 - \gamma E_r^2}{r^2} & \text{для уравнения (36),} \end{cases} \\ g^{ik} &= 0 & \text{при } i \neq k. \end{aligned}$$

Методом разделения переменных полный интеграл уравнения (37) находится в виде

$$\psi(r, \vartheta, t) = at + c\vartheta + \int \sqrt{a^2 + c^2 g^{22}(r)} dr + d. \quad (38)$$

Уравнение  $\psi(r, \vartheta, t, a, c, d) = 0$  определяет трехпараметрическое семейство линий в плоскости  $x, z$ , являющихся пересечением движущихся фронтов волн с плоскостью  $x, z$ .

Для нахождения лучей используем теорему Гамильтона–Якоби, т. е.

$$\frac{\partial \psi}{\partial a} = t_0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial c} = \vartheta_0,$$

откуда получим семейство лучей в плоскости  $x, z$ :

$$\begin{aligned} t - t_0 &= -a \int \frac{dr}{\sqrt{a^2 + c^2 g^{22}(r)}}, \\ \vartheta - \vartheta_0 &= -c \int g^{22}(r) \frac{dr}{\sqrt{a^2 + c^2 g^{22}(r)}}. \end{aligned} \quad (39)$$

Лучи характеризуются тем, что на них квадратичная форма

$$d\sigma^2 = g_{ik}(r) dx_i dx_k \quad (40)$$

обращается в нуль. Величины  $g_{ik}$  определяются из условия

$$\sum g_{ik} g^{kl} = \delta_i^l,$$

т. е.:

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = -1, \quad g_{22} = 1/g^{22}.$$

Таким образом, если  $E \neq 0$ , то лучи не являются прямыми, как это имеет место в линейной теории, а искривляются в поле электрона.

## 6. Электрон в теории Борна–Инфельда

В качестве примера рассмотрим теорию Борна–Инфельда, исходящую из функции Лагранжа

$$L(K, I^2) = b^2 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2K}{b^2} - \frac{I^2}{b^4}} \right). \quad (41)$$

Отсюда следует, что

$$M = \frac{\partial L}{\partial K} = \frac{b}{\sqrt{b^2 - 2K - (I^2/b^2)}}, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial K^2} = \frac{1}{b^2} M^3, \quad (42)$$

т. е.

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{M} \frac{\partial^2 L}{\partial K^2} = \frac{M^2}{b^2} = \frac{1}{b^2 - 2K - (I^2/b^2)}, \\ \beta &= \frac{1}{M} \frac{\partial^2 L}{\partial K \partial L} = \frac{I}{b^2} \alpha, \quad \gamma = \frac{1}{M} \frac{\partial^2 L}{\partial I^2} = \frac{1}{b^4} (b^2 + \alpha I^2). \end{aligned} \quad (43)$$

Для поля электрона получим (см. раздел 1)

$$E_r(r) = \frac{e}{\sqrt{r^4 + r_0^4}}; \quad \mathbf{H}_3 = 0.$$

Здесь введена величина размерности длины — «радиус» электрона  $r_0 = \sqrt{e/b}$ . Так как мы считаем, что  $\mathbf{H}_3 = 0$ , то  $I = (\mathbf{E}\mathbf{H}) = 0$ , откуда  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 1/b^2 = \text{const}$ .

Так как  $K = E_r^2/2$ , то

$$\alpha = \frac{1}{b^2 - E_r^2} = \frac{1}{b^2} \frac{r^4 + r_0^4}{r^4}.$$

Сравнивая в нашем случае величины  $\zeta_{1,2}$  и  $\zeta_{3,4}$ , получим

$$\zeta_{1,2}^2 - \zeta_{3,4}^2 = \frac{E_x^2}{1 + \alpha \mathbf{E}^2} (\gamma - \alpha - \alpha \gamma E_r^2) = 0,$$

т. е.

$$\zeta_{1,2}^2 = \zeta_{3,4}^2.$$

Таким образом, в теории Борна-Инфельда в поле электрона волна движется со скоростью

$$\zeta = \sqrt{\frac{r^4 + r_0^4 \cos^2(\mathbf{r}\mathbf{n})}{r^4 + r_0^4}}, \quad (44)$$

не распадаясь на волны различной поляризации. Из (44) видно также, что уравнения в этом случае везде гиперболические и  $|\zeta| \leq 1$ .

Распространение электромагнитных сигналов в поле такого электрона аналогично распространению света в анизотропном кристалле, обладающем центральной симметрией (см., однако, примечание в разд. 3).

Изменения в распространении сигналов можно описать также, отнеся их за счет изменения метрики пространства около электрона, считая, что «интервал» дается выражением (40), имеющим в нашем случае вид

$$d\sigma^2 = dt^2 - d\rho^2, \quad d\rho^2 = dr^2 + \frac{r^4 + r_0^4}{r^2} d\vartheta^2. \quad (45)$$

При этом геометрия окрестности электрона становится неевклидовой. Например, «длина» окружности с центром в  $r = 0$  есть  $l = 2\pi R \sqrt{1 + (r_0/R)^4} > 2\pi R$ . «Скорость» же сигнала при такой метрике  $v = \pm d\rho/dt$  есть  $\pm 1$ .

Для примера рассмотрим движение светового луча в поле электрона. Обозначив  $p^2 = c^2/a^2$ , получим из (39)

$$\vartheta = \vartheta_0 \pm \int_R^r \frac{r^2}{\sqrt{r^4 + r_0^4}} \frac{dr}{\sqrt{[(r^4 + r_0^4)/p^2] - r^2}}, \quad (46)$$

где за  $R$  взято расстояние, ближайшее к центру электрона. Ясно, что при  $r = R$  ( $dr/d\vartheta$ ) $_{r=R} = 0$ , т.е.  $p^2 = (R^4 + r_0^4)/r^2$ . При этом  $p$  имеет смысл «прицельного расстояния» луча. Подставив  $p^2$  в (46), получим при  $t = -\infty$  и  $t = +\infty$ :

$$\begin{aligned}\vartheta_{-\infty} &= \vartheta_0 + \int_R^\infty \frac{r^2 \sqrt{R^4 + r_0^4}}{\sqrt{r^4 + r_0^4}} \frac{dr}{\sqrt{(R^2 r^2 - r_0^4)(r^2 - R^2)}} = \\ &= \vartheta_0 + \frac{r_0}{R} \sqrt{\left(\frac{R}{r_0}\right)^4 + 1} \int_{R/r_0}^\infty \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^4 + 1}} \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - R^2/r_0^2)(\rho^2 - r_0^2/R^2)}}, \quad (47)\end{aligned}$$

$$\vartheta_{+\infty} = \vartheta_0 - \frac{r_0}{R} \sqrt{\left(\frac{R}{r_0}\right)^4 + 1} \int_{R/r_0}^\infty \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^4 + 1}} \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - R^2/r_0^2)(\rho^2 - r_0^2/R^2)}}. \quad (48)$$

Все предыдущее верно при  $R \geq r_0$ , т.е. при прицельном расстоянии  $p \geq \sqrt{2} r_0$ . При этом множитель  $\rho^2/\sqrt{\rho^4 + 1}$  принимает значения от  $1/\sqrt{2}$  до 1. Обозначив его среднее значение через  $\mu(R)$ , получим для величины отклонения луча в поле электрона

$$\Delta\vartheta = \vartheta_{-\infty} - \vartheta_{+\infty} - \pi = 2\mu(R) \sqrt{1 + \left(\frac{r_0}{R}\right)^4} K^{(1)} \left[ \left(\frac{r_0}{R}\right)^3 \right] - \pi,$$

где  $K^{(1)}$  — полный эллиптический интеграл 1-го рода. Например, при  $R^4 \gg r_0^4$ , когда  $\mu(R) \approx 1$ ,  $K^{(1)} \approx \pi/2$ ,

$$\Delta\vartheta \approx \frac{\pi}{2} \left(\frac{r_0}{R}\right)^4.$$

При  $R \rightarrow r_0$   $\Delta\vartheta \rightarrow \infty$ , т.е. луч несколько раз обходит вокруг электрона. Однако, даже при  $r_0/R = 0,99$   $\Delta\vartheta \approx \pi$ , что означает движение рассеянного луча в направлении, обратном первоначальному.

Если прицельное расстояние  $p < \sqrt{2} r_0$ , то

$$\vartheta = \vartheta_0 + p \int_0^r \frac{r^2}{\sqrt{r^4 + r_0^4}} \frac{dr}{\sqrt{r^4 - p^2 r^2 + r_0^4}}. \quad (49)$$

Лучи в этом случае проходят через центр электрона и  $\vartheta_{+\infty} = \vartheta_{-\infty} - \pi$ ,  $\Delta\vartheta = 0$ , т.е. лучи не рассеиваются.

В заключение укажем на пример функции Лагранжа, приводящей к иным результатам для распространения сигналов. Если выбрать  $L(K, I^2)$  в виде  $L_B + (\varepsilon/2b^2)I^2$ , где  $L_B$  — лагранжиан Борна-Инфельда, то, очевидно, поле



электрона не изменится. При этом  $\alpha = \alpha_B$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = \gamma_B + (1/M_B)(\epsilon/b^2)$ . Нетрудно проверить, что при  $\epsilon \ll -1$  вне сферы радиуса  $r_0/\sqrt{-\epsilon}$  скорости  $c_{3,4}$  больше скорости света.

Если  $\epsilon \gg 1$ , то уравнения становятся эллиптическими при  $r < r_0 \sqrt[4]{\epsilon}$ . При  $0 < \epsilon \ll 1$  эллиптичность возникает в области  $r < r_0 \sqrt{\epsilon}$ .

## Заключение

Особенности в распространении сигналов, рассмотренные здесь на примере нелинейной теории электромагнитного поля, характерны, конечно, и для нелинейных теорий других полей. Основная особенность заключается в распространении сигналов со скоростями, отличными от скорости света  $c$ , в частности, большими  $c$ .

Появление скоростей сигналов, отличных от «световых» в малых областях («внутри» электрона), не противоречит идеям теории относительности, которая лишь указывает на возможность связи между наличием максимальной скорости распространения взаимодействий и пространственно-временной геометрией. Если такая связь существует, то там, где скорость сигналов отлична от световой, изменяется и метрика пространства. При этом ясно, что скорости, большие  $c$ , отличаются от скоростей, меньших  $c$ , тем, что в последнем случае можно пользоваться преобразованиями Лоренца, не нарушая причинности. Второй особенностью является деформация профиля распространяющегося сигнала, приводящая к образованию разрывов типа ударных волн. Возможно, однако, что появление больших градиентов полей при образовании ударной волны делает необходимым учет высших производных в уравнениях поля, а это может сгладить решение.

Интересно отметить, что в варианте нелинейной электродинамики, предложенном Борном и Инфельдом: а) не образуется ударных волн; б) скорость сигналов меньше скорости света в вакууме; в) в физически важном случае — в поле электрона — в каждой точке существует только одна скорость света; г) уравнения поля везде гиперболические. Эти свойства выделяют вариант Борна и Инфельда из прочих возможных формулировок нелинейной электродинамики.

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступила  
23 мая 1953 г.

## Список литературы

1. Блохинцев Д. И. // ДАН СССР. 1952. Т. 82, № 4. С. 553. — Статья 81 в настоящем издании. — Прим. ред.
2. Смирский М. // Вестн. МГУ. 1951. Т. 5. С. 43.
3. Born M., Infeld L. // Proc. Roy. Soc. 1934. V. 144. P. 425;  
Born M. // Proc. Roy. Soc. 1934. V. 143. P. 410.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики. 1951. Т. IV, гл. III.
5. Курант Р., Фридрихс А. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: ГТТИ, 1951. Гл. II.

## ЗАМЕЧАНИЯ О ПРИМЕНИМОСТИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ К КВАНТОВЫМ СИСТЕМАМ\*

Показано, что гидродинамическое описание квантовых систем накладывает серьезное ограничение на размеры описываемой системы. В результате гидродинамическое описание становится непригодным ни для атомных ядер, ни для проблемы кратного рождения мезонов на первых стадиях расширения мезонной жидкости.

Гидродинамическое описание движения предполагает, что каждому элементу объема рассматриваемой среды можно приписать плотность энергии  $\epsilon$ , плотность импульса  $g$ , плотность среды  $\rho$  и давления  $p$ , которые являются функциями координат и времени. При этом вся среда должна быть разбита на физически бесконечно малые объемы  $\Delta x^3$ , а время — на физически бесконечно малые отрезки  $\Delta t$ .

Возникающая таким образом пространственно-временная сетка только формально может считаться сеткой с бесконечно малыми шагами. На самом деле на величину этих шагов накладываются ограничения как снизу, так и сверху. Ограничения сверху тривиальны:  $\Delta x \ll L$ ,  $\Delta t \ll T$ , где  $L$  — размер системы, а  $T$  — время, характерное для рассматриваемого процесса. Что касается ограничений снизу, то классическая и квантовая теории дают различные ограничения. Мы рассмотрим здесь те ограничения, которые характерны для квантовой системы.

Пусть величина элементарного объема будет  $\Delta x^3$ , при этом  $\Delta x = L/n$ ,  $n \gg 1$ . Импульс этого элемента объема будет  $g\Delta x^3$ . С другой стороны, дисперсия импульса  $\Delta p$ , связанная с локализацией вещества в размерах  $\Delta x$ , будет  $> \hbar/\Delta x$ . Для того чтобы было возможно описание движения при помощи плотности импульса  $g$ , необходимо, чтобы среднее значение импульса  $g\Delta x^3$  было больше возможной дисперсии, т. е.  $g\Delta x^3 \gg \hbar/\Delta x$ , или

$$g \gg \hbar/\Delta x^4. \quad (1)$$

Так как плотность энергии в нерелятивистском случае равна  $\epsilon = g^2/2\rho$ , то

$$\epsilon \gg \frac{n^8 \hbar^2}{2L^8 \rho}. \quad (2)$$

В релятивистском случае  $\varepsilon \approx gc$ , т. е.

$$\varepsilon \gg \frac{n^4 \hbar c}{L^4}. \quad (3)$$

Эти соотношения для энергии могут быть получены также из соотношения  $\Delta x \Delta t > \hbar$ , соответственно при  $\Delta t \approx \Delta x/v$  или  $\Delta t \approx \Delta x/c$ . Заметим, что всякое более подробное модельное рассмотрение может разве только повысить значения правых частей этих неравенств.

Применим теперь эти неравенства к двум конкретным задачам.

### А. Гидродинамическое описание атомного ядра

Характерным размером в этом случае является радиус ядра  $L = R = r_0 A^{1/3}$ ,  $r_0 = 1,3 \cdot 10^{-13}$  см,  $A$  — атомный вес ядра. Плотность вещества  $\rho$  в этом случае равна  $m A/V$ ,  $m$  — масса нуклона,  $V = 4\pi R^3/3$ .

Воспользуемся теперь неравенством (2), применяя его к полной энергии возбуждения ядра  $E \approx \varepsilon V$ , вызванного гидродинамическими движениями. Тогда из (2) получаем:

$$E \gg \frac{n^8 \hbar^2}{2R^8} \frac{V^2}{mA} = \frac{1}{2} \left( \frac{4\pi}{3} \right)^2 n^8 \frac{\hbar^2}{2m r_0^2} A^{-5/3}. \quad (4)$$

Величина  $\hbar^2/2mr_0^2 \approx 10$  МэВ. Даже если ограничиться делением радиуса ядра только на три части ( $n = 3$ ), то и в этом случае мы получим огромную энергию возбуждения, при которой ядро не может существовать как целое (при  $A = 200$ ,  $E \gg 80$  МэВ). Поэтому нельзя, например, рассчитывать на то, что момент инерции ядра, вычисленный из движения идеальной жидкости в эллипсоидальном сосуде, будет иметь какое-либо отношение к действительности.

Квантование гидродинамического вращательного движения ядра не спасает дела, так как важнейший параметр задачи — момент инерции — вычисляется из классической теории. Это не означает, что вообще нельзя говорить о вращении атомного ядра. В квантовой теории обратный момент инерции  $= 1/I$  является оператором. Для того чтобы можно было говорить о вращении ядра, необходимо, чтобы дисперсия  $\Delta \overline{a^2} \ll \overline{a^2}$ , т. е. должна существовать некоторая квантовая «жесткость» формы атомного ядра.

### Б. Гидродинамическое описание кратного рождения мезонов

В последнее время были сделаны попытки [1–3] рассматривать кратное рождение мезонов при столкновении релятивистских нуклонов как процесс расширения возбужденной мезонной жидкости. При большом числе мезонов можно было бы ожидать, что квантование будет несущественно, так как мезоны подчиняются статистике Бозе. Однако ограничение для такого классического описания происходит из-за того, что это соображение следует

применить не к системе в целом, а к малым пространственно-временным областям.

В рассматриваемом случае речь идет о мезонной жидкости, заполняющей объем сплюсненного эллипсоида  $V = (4\pi/3)(\hbar/\mu c)^3 2mc^2/E$  (здесь  $\mu$  — масса мезона,  $m$  — масса нуклона,  $E$  — энергия нуклонов в системе центра тяжести). Малая полуось эллипсоида, с учетом лоренцевского сокращения, равна  $L = (\hbar/\mu c) mc^2/E$ . Ввиду значительности этого сжатия можно ограничиться одномерной задачей. Тогда для плотности энергии на единицу длины вместо (3) получим

$$\epsilon \gg \frac{n^2 \hbar c}{L^2} \quad \text{или} \quad E \gg \frac{n^2 \hbar c}{L}. \quad (5)$$

Если сюда подставить значение  $L$ , то найдем

$$n^2 \ll m/\mu. \quad (6)$$

Это неравенство показывает, что в начальной стадии процесса, непосредственно следующей за столкновением нуклонов, гидродинамическое описание совершенно неприменимо: в этой стадии в мезонной жидкости, заполняющей эллипсоид, происходят значительные квантово-механические флуктуации импульса и энергии.

Дальнейшее поведение этой жидкости, с точки зрения гидродинамики, становится мало определенным, и эллипсоид может распасться на «капли», поэтому можно думать, что процесс кратного рождения мезонов является на самом деле чисто квантовым явлением.

Если все же предположить, что в этой квантовой фазе движения происходит более или менее закономерное одномерное расширение эллипсоида, то нетрудно показать, что для применимости гидродинамического описания (число слоев  $n \approx 10$ ,  $\Delta p/p \approx 10\%$ ) необходимо, чтобы энергия первичного нуклона была больше  $10^{14}$ – $10^{16}$  эВ. К этому же числу придем из рассмотрения последних стадий расширения, когда  $L$  сравнимо с  $\hbar/\mu c$  и движение становится трехмерным.

Атомная станция  
Академии наук СССР

Поступила  
12 февраля 1956 г.

### Список литературы

1. *Fermi E.* // Progr. Theor. Phys. 1950. V. 6. P. 570.
2. *Fermi E.* // Phys. Rev. 1955. V. 81. P. 683.
3. *Беленький С. З., Ландау Л. Д.* // УФН. 1955. Т. 56. С. 309.

Комментарий. Работа основана на применении соотношения неопределенности к начальной стадии гидродинамического разлета, и в этом плане

она остается правильной, но конкретные иллюстративные оценки устарели: в выделенном высоковозбужденном объеме может находиться сколь угодно много точечных партонов, которые не были известны на момент написания работы. В современных моделях учет неравновесного начального состояния осуществляется двумя способами. Во-первых, реализуется многожидкостная гидродинамика, где каждая компонента находится в термодинамическом равновесии и характеризуется своей температурой, но локально система не будет в равновесии, поскольку ее состояние определяется суммой всех компонент (см. *Ivanov Yu. B., Russkikh V. N., Toneev V. D.* // Phys. Rev. C. 2006. V. 73. P. 044904 и цитированную там литературу). Другой способ учета неравновесности состоит в комбинации микро- и макроскопических методов, в согласии с рекомендациями Д. И. Блохинцева. Здесь первая, начальная локально неравновесная стадия описывается на кинетическом уровне, а вторая стадия, стадия изоэнтропического расширения системы, — в рамках гидродинамики (см., например, *Paiva S., Hama J., Kodoma T.* // Phys. Rev. C. 1997. V. 55. P. 1455; *Skokov V. V., Toneev V. D.* // Phys. Rev. C. 2006. V. 73. P. 021902).

*В. Д. Тонеев*

# НЕЛОКАЛЬНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ\*

## I. Введение

После значительных успехов теории перенормировки наступило некоторое разочарование. Сейчас стало ясно, что этот метод не преодолевает основных трудностей современной теории, а скорее представляет собою относительно успешный путь обхода этих трудностей, пригодный в тех случаях, когда особо малые масштабы пространства и времени не играют существенной роли. Наиболее дальновидные физики никогда иначе и не оценивали значение этого метода. Тем не менее, не без пользы были потрачены большие усилия, чтобы рафинировать этот метод до наивысшей степени.

В атмосфере увлечения «перенормировкой» несколько особое место занимают работы тех физиков, которые стремились более глубоко видоизменить современную теорию, исходя из тех или иных физических идей.

Среди попыток подобного рода, имеющих уже значительную историю, особо большое место занимают *нелокальные теории поля и нелинейные теории поля*, которые являются определенными и в некотором отношении родственными попытками обобщения современной квантовой теории поля.

В той трудной ситуации, в которой находится в настоящее время теория, своевременно критически рассмотреть оба эти направления. Тем самым, быть может, будет несколько видней путь к истине.

Как в нелокальной теории, так и в нелинейной теории вводится некоторая элементарная длина  $s_0$ . Видимо, Г. Ватагин [1] был первым физиком, который указал на такую возможность для обобщения теории. Однако мы увидим из дальнейшего, что в действительности корень трудностей современной теории уходит глубже и сравнительно простые модификации теории, оперирующие с понятием элементарной длины, по всей видимости, не могут быть основой новой теории.

В первой главе этой статьи мы рассмотрим нелокальные теории, во второй — нелинейные. Наконец, в третьей главе будут обсуждены границы применимости основного понятия современной теории понятия частицы.

## II. Нелокальная теория поля

Первая формулировка нелокальной теории поля была дана М. А. Марковым [2], который исходил из физической идеи о том, что напряженность

поля на малых расстояниях из-за атомизма заряда, не может быть измеримой величиной.

В соответствии с этой идеей Марков предположил, что потенциалы электромагнитного поля  $A_\mu$ , не коммутируют с координатами пробного заряда  $x_\nu$ . Если через  $A_\mu(\mathbf{k})$  обозначить компоненту Фурье потенциала волнового вектора  $\mathbf{k}$ , то было предположено, что

$$[x_\nu, A_\mu] = i r_\nu A_\mu, \quad (1)$$

где  $r_\nu$  — некоторый четырехмерный вектор, пропорциональный элементарной длине  $s_0$ .

Из этого соотношения следует, что при  $\Delta x_\nu \approx r_\nu$   $\Delta A_\nu \approx A_\mu$ .

Эта теория приводит к представлению о четырехмерно-протяженных частицах, что формально выражается в появлении во взаимодействии электрона и электромагнитного поля релятивистски-инвариантного обрывающего фактора.

Позднее, Юкава [3] предложил нелокальную теорию, сформулировав ее таким образом, что потенциалы поля  $A$  являются недиагональными матрицами в пространстве-времени, так что

$$(x'|A|x'') \neq A(x') \delta(x' - x'').$$

Конкретно было предположено (для скалярного поля  $U$ ), что

$$[x_\mu, [x^\mu, U]] = s_0^2 U. \quad (2)$$

Хотя этой теории пытались дать, как нам кажется, несколько уходящее в сторону толкование (через внутрентние степени свободы частиц) и математически она оформлялась иначе, нежели теория Маркова, тем не менее она покоится на той же физической идее и также приводит к релятивистским обрывающим формфакторам.

Другой подход к нелокальной теории поля был развит в работах автора [4], Мак Мануса [5], Пайерлса [6] и других. В этом подходе свободное поле считается локальным, а нелокальность вводится только во взаимодействие. Физической идеей, лежащей в основе этого направления, является предположение о том, что в малых пространственно-временных областях возможны другие виды причинной связи, нежели те, которые характерны для больших масштабов пространства и времени. В этой теории, в ее первоначальном варианте, предполагается, что взаимодействие, например, электронного поля, описываемого током  $J_\mu(x)$ , и электромагнитного поля, описываемого потенциалом  $A_\mu(x')$ , происходит не в одной и той же точке пространства-времени, а «размазано» с помощью релятивистски-инвариантного формфактора  $F(x' - x'')$ , так что взаимодействие описывается функцией  $W$ :

$$W = \int J_\mu(x) F(x - x') A_\mu(x') dx dx' \quad (3)$$

вместо обычной формы взаимодействия, когда  $F(x - x') = \delta(x - x')$  («точечное» взаимодействие). Выражение (3) явно указывает на то, что взаи-

модействие может распространяться из точки  $P(x)$  в точку  $P(x')$  с любой скоростью, так как формфактор  $F(x - x')$  из соображений лоренцевской инвариантности должен быть функцией интервала  $s^2 = (t - t')^2 - (x - x')^2$ . Для того чтобы не было существенного нарушения обычной причинности для больших интервалов пространства-времени, необходимо, чтобы формфактор  $F(x - x')$  исчезал с ростом модуля интервала  $|s^2|$ .

Например, можно принять  $F \sim \exp(-s^2/s_0^2)$ , где  $s_0$  — некоторая элементарная длина. В этом случае сигналы, распространяющиеся со скоростью, большей скорости света, для больших расстояний будут крайне слабы.

Действительно, чтобы сигнал имел заметную силу, необходимо, чтобы  $|s^2| = |t^2 - x^2| \leq s_0^2$ , но тогда для макроскопических расстояний  $|x| \gg s_0$  или времени  $|t| \gg s_0$  скорость сигнала  $V = |x/t|$  будет близка к 1.

Это утверждение справедливо в любой системе координат [7].

Теория Маркова-Юкавы не дает чего-либо нового для свободных полей. Различие с обычной теорией обнаруживается лишь во взаимодействии, которое отличается от обычного наличием релятивистски-инвариантных формфакторов.

В только что описанной теории нелокального взаимодействия эти факторы вводятся наиболее простым и непосредственным образом. Поэтому различные в своих исходных физических предпосылках теория Маркова-Юкавы и теория нелокального взаимодействия практически оказываются эквивалентными и отличаются лишь способом введения формфактора. В той и другой концепциях остается неопределенным вид формфактора. Это затруднение не явилось бы, однако, препятствием к развитию теории, так как вид формфактора мог бы быть, в принципе, определен из опыта. Гораздо более существенные затруднения выявляются в самой принципиальной схеме теории.

М. А. Марков обратил внимание на то, что при наличии формфактора  $F$  уравнения для частиц во многовременном формализме Дирака-Розена-Подольского становятся несовместными.

Действительно, им было показано [8], что условие Ф. Блоха для совместности этих уравнений

$$[H(x_n, t_n), H(x_m, t_m)] = 0 \quad (4)$$

для  $|x_n - x_m|^2 > |t_n - t_m|^2$  в случае нелокальной теории не выполняется. В этой формуле  $H(x_n, t_n)$  означает гамильтониан  $n$ -й частицы,  $x_n, t_n$  — ее четырехмерные координаты,  $H(x_m, t_m)$  имеет тот же смысл для  $m$ -й частицы.

Суть условия Блоха заключается в том, что измерения, произведенные на двух частицах  $n$  и  $m$ , соединенных пространственноподобным интервалом, не должны влиять друг на друга.

В нелокальной теории взаимодействие может распространяться и со скоростью, большей скорости света в пустоте, поэтому естественно, что скобка Пуассона в (4) оказывается в этом случае отличной от нуля также и для пространственноподобных интервалов. Это весьма общее положение. Автором [9] было отмечено, что нелокальная теория вообще несовместима с методом Гамильтона. Метод Гамильтона предполагает, что каждое последующее со-



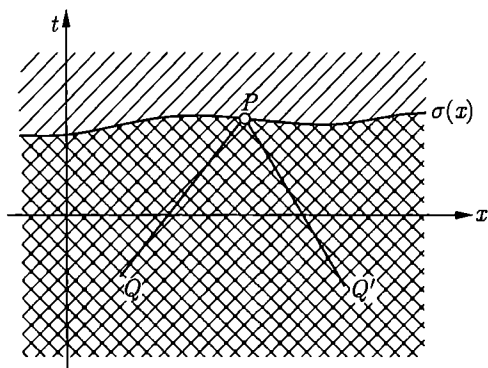


Рис. 1. Распространение сигналов в локальной и в нелокальной теориях:  $\sigma(x)$  — пространственная поверхность;  $P$  — одна из точек на ней;  $PQ P Q'$  — конус прошедшего в этой точке. Дважды заштрихованная область — прошедшее. Одинарная штриховка — будущее

стояние однозначно определяется предшествующим состоянием. Именно этот факт и выражен в уравнении Шредингера для волновой функции системы  $\Psi$ :

$$i\hbar \cdot \delta\Psi = H\Psi \cdot \delta t. \quad (5)$$

Подобного уравнения, однако, не может быть в нелокальной теории, где взаимодействие распространяется со сколь угодно большей скоростью и поэтому состояние на некоторой пространственной поверхности  $\sigma(x)$  (рис. 1) не может быть определено только по состояниям, лежащим в конусах прошлого (дважды заштрихованная область), а зависит также и от будущего (заштрихованная область).

В. Паули показал [10], что все же и для нелокальной теории можно найти интегралы движения, в том числе и аналог гамильтониана. Это позволяет также ввести и канонические переменные. Однако нельзя избежать решения уравнений, которые содержат интегралы по времени от  $-\infty$  до  $+\infty$ , и поэтому теория в гамильтоновой форме оказывается все же невозможной [11].

Однако можно было бы думать, что эта ситуация еще не означает полной несовместности нелокальной теории с квантовой механикой. Действительно, можно допустить, что асимптотически квантовая теория остается верной. Это значит, что мы можем допустить, что для нелокальных систем существует все же для  $t = -\infty$  волновая функция  $\Psi(-\infty)$  и для  $t = +\infty$  волновая функция  $\Psi(+\infty)$ .

Вместе с тем существует и матрица рассеяния  $S(-\infty, +\infty)$ , преобразующая  $\Psi(-\infty)$  в  $\Psi(+\infty)$ .

С того времени, как В. Гейзенберг [12] обратил внимание на возможное значение этой матрицы, все варианты нелокальной теории так или иначе связывались с попытками определить матрицу рассеяния для нелокальной теории<sup>1</sup>.

При этом можно было руководствоваться следующими требованиями:

<sup>1</sup> Следует отметить, что уже в первой работе М. А. Маркова [2], в связи с доказательством несовместности уравнений многовременного формализма, предлагалась некоторая формальная схема расчета, не связанная с уравнением Шредингера в его обычном понимании.

- а) матрица рассеяния  $S$  должна быть инвариантна относительно преобразований Лоренца;
- б) она должна удовлетворять условиям причинности в макроскопических областях пространства-времени (т.е. асимптотически, для больших интервалов времени или пространства, «аказуальные» взаимодействия должны давать исчезающий вклад в вероятности переходов);
- в) она должна быть унитарной<sup>1</sup>.

Требование а) есть требование, по крайней мере, формального согласия нелокальной теории с теорией относительности; требование б) означает соответствие с обычной теорией, и, наконец, требование в) вытекает из предположения существования  $\Psi(-\infty)$  и  $\Psi(+\infty)$  (полная вероятность состояния должна быть одинаково нормирована как для  $t = -\infty$ , так и для  $t = +\infty$ ).

При построении нелокальной теории имелось в виду, что она будет способна ликвидировать расхожимости, свойственные обычной теории. Однако развитие исследований в области нелокальной теории не привело к успешным результатам. Во-первых, было показано, что нелокальная теория с двухточечным формфактором  $F(x' - x'')$  не в состоянии ликвидировать бесконечности, связанные с поляризацией вакуума.

Это видно из того обстоятельства, что теория с формфактором типа  $F(x' - x'')$  эквивалентна замене поля  $A_\mu(x')$  на поле

$$B_\mu(x) = \int F(x - x') A_\mu(x') dx'. \quad (6)$$

Поэтому для внешнего поля  $A_\mu^0$  эффект поляризации вакуума будет тот же самый, что и в обычной локальной теории для поля  $B_\mu^0$ , т.е. будет расходящимся.

В этой связи ряд авторов [14–17] рассмотрели вариант нелокальной теории, в котором формфактор зависит не от двух, а от трех точек  $x'$ ,  $x''$ ,  $x'''$ . Такой вариант возможен лишь в квантовой теории и означает, например, что вместо взаимодействия (3) предполагается взаимодействие вида:

$$W = ec \int \bar{\Psi}(x') \gamma_\mu \Psi(x'') F(x', x'', x''') A_\mu(x''') dx' dx'' dx''', \quad (7)$$

т.е. ток  $J_\mu = ec \bar{\Psi}(x') \gamma_\mu \Psi(x')$  заменен на величину  $ec \bar{\Psi}(x') \gamma_\mu \Psi(x'')$ . Этот вариант теории не является калибровочно-инвариантным и уже по этой причине должен бы быть отвергнут<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Вопрос о достаточности этих требований для определения матрицы рассеяния в случае локальной теории подробно рассмотрен в статье Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова [13].

<sup>2</sup> Для электромагнитного поля В. С. Барашенковым было показано, что нелокальная теория с таким формфактором приводит к возникновению продольных фотонов [11].

С. Блох [17] указал, что возможно восстановить калибровочную инвариантность, если ввести в произведение  $\bar{\Psi}(x') \Psi(x'')$  фактор типа  $\exp[i\chi(x', x'')]$ , где,

$$\chi(x', x'') \sim \int_{x'}^{x''} A_{\mu}(x) ds_{\mu}. \quad (8)$$

Один из вариантов такой теории был обследован Р. Пайерлсом и М. Кретьеном [18]. Ими было показано, что и в этом случае расходимости из теории поля полностью не устраняются.

Другие трудности были обнаружены С. Хаяши [19], который обратил внимание на то, что при применении схемы вычислений Янга-Фельдмана [20] получающаяся матрица рассеяния, начиная с четвертого приближения, становится неунитарной. В связи с этим результатом были сделаны попытки восстановить эту унитарность.

Таких попыток имеется две. Первая принадлежит С. Хаяши [19] и основана на введении дополнительных полей, изменяющих начальное поле  $\Psi_0$ . Смысл этих полей можно видеть во влиянии процессов в будущем на начальные условия [11].

Другая была предпринята Б. В. Медведевым, который исходил из работы Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова [13], в которой было показано, что перечисленные выше требования к  $S$ -матрице, вместе с некоторыми требованиями симметрии, еще не вполне определяют  $S$ -матрицу. Это обстоятельство и было использовано Медведевым [21], который несколько обобщил условие причинности и, пользуясь методом Боголюбова-Ширкова, построил унитарную матрицу рассеяния для нелокальной теории в виде

$$S(g) = T \exp \left\{ i \int \Lambda(\xi, g) g(\xi) d\xi + \int M(\xi, g) g(\xi) d\xi \right\}, \quad (9)$$

где  $T$  — обобщенное  $T$ -произведение,  $\Lambda$  — лагранжиан,  $M$  — некоторый эрмитов оператор, обеспечивающий унитарность матрицы  $S$  и  $g$  — величина, указывающая степень включения взаимодействия в четырехмерной точке  $\xi$ .

Как видно из (9), оператор  $M$  может рассматриваться как антиэрмитовый «добавок» к функции Лагранжа. Матрица  $S$  в этой теории дается, как и во всех других вариантах теории, в виде ряда по степеням постоянной взаимодействия. Сходимость таких рядов никогда обоснована не была.

Рассмотренные выше трудности, связанные с отсутствием калибровочной инвариантности, в этой теории остаются.

Число работ, посвященных нелокальной теории в настоящее время очень велико (см. [11]). Но линия развития этой теории не является восходящей. Нельзя, конечно, отрицать возможности построения успешной нелокальной теории, но трудно дать благоприятный прогноз: разработка этой теории не принесла обнадеживающих результатов, напротив выяснилось много новых трудностей, которые на первых порах оставались незамеченными.

При таком положении дел небезынтересно рассмотреть вопрос о возможности экспериментальным путем обнаружить нелокальность в микрояв-

- а) матрица рассеяния  $S$  должна быть инвариантна относительно преобразований Лоренца;
- б) она должна удовлетворять условиям причинности в макроскопических областях пространства-времени (т.е. асимптотически, для больших интервалов времени или пространства, «аказуальные» взаимодействия должны давать исчезающий вклад в вероятности переходов);
- в) она должна быть унитарной<sup>1</sup>.

Требование а) есть требование, по крайней мере, формального согласия нелокальной теории с теорией относительности; требование б) означает соответствие с обычной теорией, и, наконец, требование в) вытекает из предположения существования  $\Psi(-\infty)$  и  $\Psi(+\infty)$  (полная вероятность состояния должна быть одинаково нормирована как для  $t = -\infty$ , так и для  $t = +\infty$ ).

При построении нелокальной теории имелось в виду, что она будет способна ликвидировать расходимости, свойственные обычной теории. Однако развитие исследований в области нелокальной теории не привело к успешным результатам. Во-первых, было показано, что нелокальная теория с двухточечным формфактором  $F(x' - x'')$  не в состоянии ликвидировать бесконечности, связанные с поляризацией вакуума.

Это видно из того обстоятельства, что теория с формфактором типа  $F(x' - x'')$  эквивалентна замене поля  $A_\mu(x')$  на поле

$$B_\mu(x) = \int F(x - x') A_\mu(x') dx'. \quad (6)$$

Поэтому для внешнего поля  $A_\mu^0$  эффект поляризации вакуума будет тот же самый, что и в обычной локальной теории для поля  $B_\mu^0$ , т.е. будет расходящимся.

В этой связи ряд авторов [14–17] рассмотрели вариант нелокальной теории, в котором формфактор зависит не от двух, а от трех точек  $x'$ ,  $x''$ ,  $x'''$ . Такой вариант возможен лишь в квантовой теории и означает, например, что вместо взаимодействия (3) предполагается взаимодействие вида:

$$W = ec \int \bar{\Psi}(x') \gamma_\mu \Psi(x'') F(x', x'', x''') A_\mu(x''') dx' dx'' dx''', \quad (7)$$

т.е. ток  $J_\mu = ec \bar{\Psi}(x') \gamma_\mu \Psi(x')$  заменен на величину  $ec \bar{\Psi}(x') \gamma_\mu \Psi(x'')$ . Этот вариант теории не является калибровочно-инвариантным и уже по этой причине должен бы быть отвергнут<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Вопрос о достаточности этих требований для определения матрицы рассеяния в случае локальной теории подробно рассмотрен в статье Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова [13].

<sup>2</sup> Для электромагнитного поля В. С. Барашенковым было показано, что нелокальная теория с таким формфактором приводит к возникновению продольных фотонов [11].

С. Блох [17] указал, что возможно восстановить калибровочную инвариантность, если ввести в произведение  $\bar{\Psi}(x') \Psi(x'')$  фактор типа  $\exp[i\chi(x', x'')]$ , где,

$$\chi(x', x'') \sim \int_{x'}^{x''} A_{\mu}(x) ds_{\mu}. \quad (8)$$

Один из вариантов такой теории был обследован Р. Пайерлсом и М. Кретьеном [18]. Ими было показано, что и в этом случае расходимости из теории поля полностью не устраняются.

Другие трудности были обнаружены С. Хаяши [19], который обратил внимание на то, что при применении схемы вычислений Янга-Фельдмана [20] получающаяся матрица рассеяния, начиная с четвертого приближения, становится неунитарной. В связи с этим результатом были сделаны попытки восстановить эту унитарность.

Таких попыток имеется две. Первая принадлежит С. Хаяши [19] и основана на введении дополнительных полей, изменяющих начальное поле  $\Psi_0$ . Смысл этих полей можно видеть во влиянии процессов в будущем на начальные условия [11].

Другая была предпринята Б. В. Медведевым, который исходил из работы Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова [13], в которой было показано, что перечисленные выше требования к  $S$ -матрице, вместе с некоторыми требованиями симметрии, еще не вполне определяют  $S$ -матрицу. Это обстоятельство и было использовано Медведевым [21], который несколько обобщил условие причинности и, пользуясь методом Боголюбова-Ширкова, построил унитарную матрицу рассеяния для нелокальной теории в виде

$$S(g) = T \exp \left\{ i \int \Lambda(\xi, g) g(\xi) d\xi + \int M(\xi, g) g(\xi) d\xi \right\}, \quad (9)$$

где  $T$  — обобщенное  $T$ -произведение,  $\Lambda$  — лагранжиан,  $M$  — некоторый эрмитов оператор, обеспечивающий унитарность матрицы  $S$  и  $g$  — величина, указывающая степень включения взаимодействия в четырехмерной точке  $\xi$ .

Как видно из (9), оператор  $M$  может рассматриваться как антиэрмитовый «добавок» к функции Лагранжа. Матрица  $S$  в этой теории дается, как и во всех других вариантах теории, в виде ряда по степеням постоянной взаимодействия. Сходимость таких рядов никогда обоснована не была.

Рассмотренные выше трудности, связанные с отсутствием калибровочной инвариантности, в этой теории остаются.

Число работ, посвященных нелокальной теории в настоящее время очень велико (см. [11]). Но линия развития этой теории не является восходящей. Нельзя, конечно, отрицать возможности построения успешной нелокальной теории, но трудно дать благоприятный прогноз: разработка этой теории не принесла обнадеживающих результатов, напротив выяснилось много новых трудностей, которые на первых порах оставались незамеченными.

При таком положении дел небезынтересно рассмотреть вопрос о возможности экспериментальным путем обнаружить нелокальность в микрояв-

лениях, если она действительно имеет место в природе. Для этого можно было бы использовать весьма общие дисперсионные соотношения. Насколько нам известно, впервые на эту возможность было обращено внимание Н. Н. Боголюбовым.

Рассмотрим суть дела на простейшей модели. Вообразим себе одномерную частицу, имеющую структуру. Представим себе, что она имеет вид гантели, состоящей из двух рассеивающих точек  $A$  и  $B$  (рис. 2). Допустим, что сигнал мгновенно распространяется из  $A$  в  $B$  так, что если падающая волна  $a_0 \exp[-i(\omega_0 t - k_0 x)]$  для  $t \leq 0$  привела в движение точку  $A$ , то мгновенно возникает волна, рассеянная точкой  $B$ .

Пусть  $f_A(\omega)$  будет матрица рассеяния для элемента частицы  $A$ ,  $f_B(\omega)$  — то же для элемента  $B$ . Тогда волна, рассеянная от частицы  $AB$ , будет:

$$\Psi = \int f_A(\omega) a(\omega) \exp \left[ -i\omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] d\omega + \int f_B(\omega) a(\omega) \exp \left[ -i\omega \left( t - \frac{x}{c} - \frac{\Delta}{c} \right) d\omega \right], \quad (10)$$

где

$$\Delta = AB, \quad x = AP, \quad x - \Delta = BP$$

и

$$a(\omega) = \frac{a_0}{\omega + i\varepsilon - \omega_0}. \quad (10')$$

Последнее выражение обеспечивает равенство нулю падающей волны для  $t < 0$ .

Из (10) следует, что матрица рассеяния для частицы в целом будет равна

$$f_{AB}(\omega) = f_A(\omega) - f_B(\omega) \exp \left( -i \frac{\omega \Delta}{c} \right). \quad (11)$$

Для справедливости дисперсионных соотношений типа

$$g(a) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x) dx}{x - a} \quad (12)$$

и

$$h(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x) dx}{x - a}, \quad (12')$$

где  $f = g + ih$ , необходимо, чтобы  $f(\omega)$  была аналитической функцией в верхней полуплоскости и на действительной оси и исчезала на верхней полуокружности при  $R \rightarrow \infty$ .

Нетрудно видеть, что если  $f_A$  и  $f_B$  удовлетворяют этим требованиям, то  $f_{AB}$  не удовлетворяет из-за множителя  $\exp(-i\omega\Delta/c)$ . Причем, как нетрудно видеть из рис. 2, знак фазы этого множителя сохраняется, если сигнал от  $A$  и  $B$  распространяется со скоростью, большей скорости света в пустоте. При скорости распространения, меньшей  $c$ , знак переменится и дисперсионные

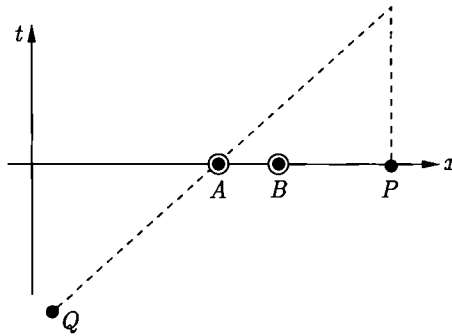


Рис. 2. Распространение сигнала от протяженной частицы.  $Q$  — источник волны,  $A, B$  — структурные элементы частицы  $AB$ ,  $P$  — удаленная от  $AB$  точка наблюдения

соотношения будут соблюдены. Из (11) видно, что если матрицу рассеяния домножить на  $\exp(i\omega\Delta/c)$ , то для величины

$$\Phi_{AB} = f_{AB} \exp\left(i\frac{\omega\Delta}{c}\right) \quad (13)$$

дисперсионные соотношения будут иметь силу.

Таким образом, мы видим, что в рассматриваемой модели действительно возникает возможность из опыта обнаружить нелокальность и даже определить размеры области нелокальности. В самом деле, в случае локальной теории дисперсионные соотношения будут соблюдаться для матрицы рассеяния в случае нелокальной теории для величины  $\Phi_{AB}(\omega)$ . К сожалению, действительность оказывается более сложной, и можно привести пример нелокальной теории, которая не обнаруживает себя в дисперсионных соотношениях.

Рассмотрим в качестве иллюстрации нелокальную теорию электромагнитного поля с двухточечным формфактором  $F(P - P')$ . Уравнения поля и частицы в этой теории имеют вид [4]:

$$m \frac{dU_\alpha}{d\sigma} + eU_\beta \int dx dt F(P - P_m) \mathcal{F}_{\beta\alpha}(P) = 0, \quad (14)$$

$$\square A_\alpha + 4\pi e \int d\sigma F(P - P_m) U_\alpha = 0, \quad (15)$$

где  $m$  — масса частицы,  $U_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3, 4$ ) компоненты ее четырехмерной скорости,  $\sigma$  — собственное время,  $\mathcal{F}_{\beta\alpha} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha}$  — компоненты электромагнитного поля,  $A_\alpha$  — компоненты потенциала,  $P$  — точка  $(x, t)$ ,  $P_m$  — точка  $(x_m, t_m)$  (положение частицы).

Из соображений лоренцевской инвариантности

$$F(P - P_m) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int D(\omega^2 - k^2) \exp[i\omega(t - t_m) - i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m)] d\omega dk. \quad (16)$$

Рассмотрим действие внешнего поля  $\mathcal{F}_{\beta\alpha}^0$  на частицу. Это поле разлагается в ряд Фурье

$$\mathcal{F}_{\beta\alpha}^0 = \int f_{\beta\alpha}^0(\mathbf{k}) \delta(\omega^2 - k^2) \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x})] d\omega d\mathbf{k}. \quad (17)$$

Подставляя (16) и (17) в интеграл в (14) и производя интегрирование по  $\mathbf{x}$  и  $t$ , найдем, что сила  $K_{\alpha}^0$ , возбуждаемая внешним полем, равна

$$K_{\alpha}^0 = eU_{\beta} \int d\mathbf{x} dt F(P - P_m) \mathcal{F}_{\beta\alpha}^0 = eD(0) \mathcal{F}_{\beta\alpha}^0, \quad (18)$$

т. е. не отличается от действия локального поля, если  $D(0)$  нормировать на 1.

Вычислим теперь рассеянное поле. Из уравнения (15) находим

$$A_{\alpha}^s = e \int dx' dt' \mathfrak{G}(P - P') d\sigma F(P' - P_m) U_{\alpha}, \quad (19)$$

где  $\mathfrak{G}(P - P')$  — функция Грина. Эта функция Грина имеет компоненты Фурье:

$$\frac{1}{4\pi} \mathfrak{G}(\omega^2 - k^2) = \frac{1}{\omega^2 - k^2} - i\pi \frac{\omega}{|\omega|} \delta(k^2 - \omega^2). \quad (20)$$

Подставляя в (19) разложение Фурье для  $\mathfrak{G}(P - P')$  и для  $F(P - P_m)$  — и выполняя интегрирование по  $d\mathbf{x}'$ ,  $dt'$ , найдем, что это интегрирование сведется к вычислению интеграла

$$\sim \int \mathfrak{G}(\omega^2 - k^2) D(\omega^2 - k^2) \exp[i\omega(t - t_m) - i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m)] d\omega d\mathbf{k}. \quad (21)$$

Интеграл по  $d\mathbf{k}$ , как известно, имеет асимптотическое значение порядка  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_m|$  только за счет значений  $k^2 = \omega^2$ , т. е. пропорционален  $D(0)$ . Таким образом, рассеянная волна будет та же, что и в локальной теории. Отсюда следует, что «матрица» рассеяния будет заведомо подчиняться дисперсионным соотношениям, так как она тождественна с «матрицей» рассеяния локальной теории.

На первый взгляд, этот результат может показаться парадоксальным. Однако следует иметь в виду, что: а) наше доказательство справедливо лишь без учета реакции поля, т. е. приближенно; б) если рассмотреть действие ограниченной во времени волны ( $A_{\alpha}^0 = 0$  в точке нахождения частицы для  $t < 0$ ), то нетрудно убедиться, что в нелокальной теории частица начнет двигаться раньше, чем ее достигнет волна, однако это движение затухнет для больших положительных  $t$ , т. е. нелокальность проявляется в моменты расщепления частицы и в дальнейшем исчезает. Поэтому она и не проявляет себя в рассеянии (для больших  $t$  и  $|\mathbf{x}|$ ).

Приведенный пример показывает, что, несмотря на отсутствие причинности, дисперсионные соотношения могут все же выполняться. Это обстоятельство осложняет однозначность выводов, которые могут быть сделаны из факта справедливости дисперсионных соотношений. Несомненно, было бы желательно иметь более общий анализ этого вопроса.



### III. Нелинейная теория поля

Первая нелинейная теория электромагнитного поля была предложена М. Борном [22].

Общую схему такой теории можно сформулировать следующим образом: в основу теории кладется лагранжева функция поля  $\mathcal{L}$ , которая зависит от инвариантов поля  $K, J, \dots$ , составленных из компонент поля и их производных:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(K, J, \dots). \quad (22)$$

Тогда из вариационного принципа

$$\delta \int \mathcal{L}(K, J, \dots) dx dt \quad (23)$$

следуют уравнения поля, которые в общем случае будут, очевидно, нелинейными. Из соображений размерности ясно, что в нелинейной теории поля будет существовать абсолютный масштаб поля  $\varphi_0$ . Если теперь учесть существование элементарного заряда  $e$ , то можно определить элементарную длину  $s_0 = \sqrt{e/\varphi_0}$ . Существование этой длины роднит нелинейные теории с нелокальными.

В современной канонической теории поля включение взаимодействия также ведет к нелинейным уравнениям поля, которые, однако, являются приближенными и содержат также и высшие производные. В схеме Борна нелинейные уравнения постулируются с самого начала как основа теории. Пока подобные уравнения рассматриваются в рамках классической теории, каких-либо принципиальных затруднений не возникает. В частности, можно выбрать такие варианты теории, которые устраняют бесконечность собственной энергии частиц. Например, в одном, из вариантов Борна лагранжиан выбран в виде<sup>1</sup>

$$\mathcal{L} = \left[ 1 + \frac{\mathcal{H}^2 - \mathcal{E}^2}{\mathcal{E}_0^2} - \frac{(\mathcal{E}\mathcal{H})^2}{\mathcal{E}_0^4} \right]^{1/2}, \quad (24)$$

где  $\mathcal{E}$  — электрическое поле,  $\mathcal{H}$  — индукция магнитного поля,  $\mathcal{E}_0$  — некоторый масштаб поля, по порядку величины равный  $e/s_0^2$ . При этом напряженность электрического поля точечного заряда оказывается равной:

$$\mathcal{E} = \frac{e}{r} \left[ 1 + \left( \frac{s_0}{r} \right)^4 \right]^{-1/2}, \quad (25)$$

где  $r$  — расстояние от центра заряда.

Полная собственная энергия точечного заряда оказывается при этом конечной и равной

$$U = 1,236 \frac{e^2}{s_0}. \quad (26)$$

<sup>1</sup> Указывалось, как на дефект теорий, на произвол в выборе лагранжиана; однако он мог бы быть в принципе определен из опыта.

Однако классическая нелинейная теория не может являться целью теории, так как гораздо раньше, чем нелинейные отступления начнут играть заметную роль (расстояния порядка  $s_0$ ), на сцену выступают квантовые явления (расстояния порядка  $\hbar/m_0c$ ,  $m_0$  — масса электрона). Поэтому нелинейная теория должна быть квантована. Но как раз при квантовании и обнаруживаются принципиальные трудности. Однако прежде чем обращаться к этой стороне дела, рассмотрим классификацию нелинейных уравнений.

Для выяснения сущности дела мы ограничимся лагранжевыми функциями, содержащими производные поля не выше первой, и ради простоты одним измерением и скалярным полем  $\varphi$  [23].

В этом случае мы имеем два инварианта:

$$K = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \quad \text{и} \quad J = \frac{1}{2} \varphi^2 \quad (27)$$

(скорость света  $c = 1$ ). Функция Лагранжа будет

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(K, J). \quad (28)$$

Из соответствующего вариационного принципа нетрудно найти уравнение поля

$$A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} D = 0, \quad (29)$$

где  $A, B, C, D$  — функции  $\varphi, \partial \varphi / \partial t, \partial \varphi / \partial x$ .

Это уравнение формально инвариантно относительно преобразований Лоренца. Однако причинность может быть и нарушена подобно тому, как она нарушается и в нелокальных теориях. Действительно, рассмотрим скорость распространения взаимодействия в такой нелинейной теории (мы будем говорить «скорость сигнала»). Эту скорость правильно понимать как скорость распространения слабых разрывов (т. е. таких разрывов, когда впереди фронта сигнала  $\varphi = 0$ , а позади него  $\varphi \neq 0$ , но не делает скачка<sup>1</sup>).

Известно, что распространение таких сигналов происходит по характеристикам уравнения и скорость распространения сигнала дается наклоном характеристик  $\xi = dx/dt$ .

Величина  $\xi$  определяется из уравнения

$$A\xi^2 - 2B\xi + C = 0. \quad (30)$$

В зависимости от вида функции Лагранжа и от значения поля и его производных могут возникнуть сигналы, распространяющиеся как со скоростью меньшей скорости света, так и большей скорости света (уравнение (30) может иметь решения  $|\xi| > 1$ ).

<sup>1</sup> Решение уравнения второго порядка (29) имеет на характеристической поверхности слабый разрыв, если при переходе через эту поверхность функция  $\varphi(t, x)$  и ее первые производные остаются непрерывными, а некоторые производные порядка выше первого имеют на этой поверхности конечный разрыв. — *Прим. ред.*

Например, при не очень больших полях имеем из (30)

$$\xi = \pm 1 \mp \frac{1}{2}\alpha \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \dots, \quad (31)$$

где

$$\alpha = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial K^2} / \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K}.$$

В зависимости от знака  $\alpha$  (т.е. в зависимости от вида лагранжиана)  $\xi$  будет больше или меньше 1. Подробности в [23, 24]. Интересно отметить, что в подобных нелинейных теориях нельзя исключить и возможности такой ситуации, когда при определенных значениях  $\partial \varphi / \partial t$ ,  $\partial \varphi / \partial x$ ,  $\varphi$  (например, вблизи частиц) характеристики окажутся мнимыми, так что уравнения поля станут уравнениями эллиптического типа. Это означало бы, что понятие причинной последовательности событий потеряет свой смысл, и мы будем иметь дело с «комком» событий, которые взаимно друг друга обуславливают, но не следуют одно за другим. Мы далеки от утверждения, что нечто подобное имеет место в действительности, и рассматриваем этот случай как чисто математическую возможность<sup>1</sup>.

Для нас сейчас более важен тот факт, что возможные нелинейные теории разбиваются на два класса. В первом классе ( $\alpha > 0$ ) скорость распространения сигнала всегда меньше скорости света в пустоте  $|\xi| \leq 1$ , во втором классе ( $\alpha < 0$ )  $|\xi|$  может быть и больше 1<sup>2</sup>.

Теории этого последнего класса имеют много общего с нелокальными теориями и к ним также неприменим метод Гамильтона, как и к нелокальным теориям. Они никогда не были кем-либо подробно рассмотрены<sup>3</sup>.

Напротив, теорий первого класса не находится в противоречии с обычным пониманием причинности, поэтому к ним применим метод Гамильтона и, стало быть, и обычная схема квантования. К числу этих уравнений, например, относится нелинейное уравнение

$$\square \varphi - \kappa^2(\varphi) \varphi = 0, \quad (32)$$

т.е. уравнение, в котором член, определяющий массу, зависит от самого поля  $\varphi$ . Для этого уравнения  $|\xi| = 1$ .

Возможность большого числа вариантов нелинейной теории часто рассматривают как принципиальную трудность подобных теорий. На самом деле трудности лежат совсем в другом пункте. Если бы удалось построить математически стройную нелинейную теорию, то можно было бы путем согласования с опытом искать единственно верный вариант. Поэтому главный вопрос на настоящей стадии заключается в том, может ли быть найдена в принципе

<sup>1</sup> Точнее, мы думаем, что, если нечто подобное и осуществляется, например, внутри частиц, то, вероятно, осуществляется более хитрым способом.

<sup>2</sup> Мы сейчас исключаем тот класс теорий, в которых характеристики могут быть мнимыми, т.е. рассматриваем классификацию только гиперболических уравнений.

<sup>3</sup> В одной работе В. Гейзенберга [25] фигурирует подобное уравнение.

подобная внутренне противоречивая теория? Мы склонны сейчас ответить на этот вопрос отрицательно.

Действительно, обнадеживающим в направлении развития нелинейных уравнений явилось бы устранение расходимостей в собственной энергии частиц. И мы видели, что пока мы остаемся в рамках классической теории, такие надежды оправдываются на самом деле. Положение дел становится совсем иным, когда мы переходим к квантовой нелинейной теории. При этом мы хотим заранее ограничиться теориями, в которых скорость сигнала всегда меньше или равна скорости света. Теории второго класса или с эллиптическими уравнениями будут нести в себе, кроме тех трудностей, которые мы намерены рассмотреть в дальнейшем, и другие трудности, дополнительно осложняющие дело.

Мы сейчас покажем, что самая простейшая расходимость, которая без труда устраняется в линейных теориях, приобретает в нелинейной теории злоеший характер. Речь идет о нулевой энергии поля  $E_0$ . В линейной теории можно принять за наблюдаемую энергию поля величину

$$\varepsilon = E - E_0, \quad (33)$$

которая, по крайней мере, для свободных полей оказывается конечной величиной (здесь  $E_0$  — бесконечная нулевая энергия поля,  $E$  — бесконечная энергия возбужденного состояния поля,  $\varepsilon$  — конечная величина).

В нелинейной теории нет подобной аддитивности. Поэтому энергия для всех уровней поля оказывается бесконечной.

Рассмотрим подробно эту сторону дела на примере простого уравнения (32). Функция Гамильтона для поля, описываемого уравнением (32), имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \int [\pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + F(\varphi)] dx. \quad (34)$$

Положим  $F(\varphi) = \kappa_0^2 \varphi^2 + \alpha \varphi^4 + \dots$

Будем считать  $\alpha$  малым параметром. Тогда величину  $\alpha \varphi^2$  можно рассматривать как добавок к  $\kappa_0^2$ , модулирующий массу частицы:

$$\kappa^2(\varphi) = \kappa_0^2 + \alpha \varphi^2 + \dots$$

Вычислим теперь коэффициент  $\kappa^2(\varphi)$  приближенно из линейной теории, заменяя его истинное значение средним. Таким образом, надо вычислить  $\overline{\kappa^2(\varphi)}$ . Для этого представим поле в виде ряда Фурье

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (a_k e^{ikx} + a_k^+ e^{-ikx}), \quad (35)$$

где  $V$  — наименьший объем, в котором  $e^{ikx}$  периодически,  $\omega_k = \sqrt{k^2 + \kappa_0^2}$  — частота в нулевом приближении,  $a_k, a_k^+$  — операторы рождения и уничтожения квант поля, подчиняющиеся обычному правилу квантования

$$[a_k, a_{k'}^+] = \delta_{kk'}. \quad (36)$$

Простое вычисление дает

$$\overline{\varphi^2} = \frac{1}{V} \sum_k \frac{\hbar}{\omega_k} (2N_k + 1), \quad (37)$$

где  $N$  — число квант сорта  $k$ .

Переходя от сумм к интегралам, имеем

$$\overline{\varphi^2} = 4\pi \int_0^\infty \frac{\hbar k^2 dk}{\omega_k} + 2\pi \int_0^\infty \frac{\hbar \rho_k k^2 dk}{\omega_k}, \quad (38)$$

где  $\rho_k$  — плотность квант ( $\rho_k = \frac{N_k}{V}$ ). Из (38) видно, что  $\overline{\varphi^2} = \infty$ . Поэтому  $\overline{\kappa^2(\varphi)} = \infty$ .

Иными словами, в следующем приближении, частоты  $\omega'_k = \sqrt{k^2 + \kappa^2} = \infty$  для всех  $k$ .

Таким образом, если обозначить собственные значения  $H$  через  $E$ , то разность  $E - E_0 = \sum N_k \hbar \omega'_k = \infty$ . Это и следовало ожидать. Не исключено, что применение специальных перенормировок могло бы позволить избавиться от этой расходимости. Как бы то ни было, надежда на нелинейную теорию в смысле автоматического устранения бесконечностей полностью разрушена<sup>1</sup>.

#### IV. Физика сильного взаимодействия

Предыдущий анализ теории нелокального поля и нелинейной теории поля, конечно, не может рассматриваться как исчерпывающее доказательство невозможности построения внутренне непротиворечивых теорий рассмотренного типа. Но этот анализ приводит к пессимистическому прогнозу. Создается впечатление, что эти оба направления в развитии теории поля бьют мимо цели. Они имеют то общее, что в обоих направлениях сохраняются основные черты современной квантовой теории и теории относительности; это лишь модификации современных представлений.

Сейчас стало общепринятым утверждение, что на малых расстояниях современная теория становится непригодной. Вместе с тем успех теории перенормировки показывает, что специально для электромагнитного поля и электронов эта непригодность выступает лишь в очень далеких приближениях по константе  $e^2/\hbar c$ . Напротив, для мезонной теории вообще нет никакой области применимости, так как константа  $g^2/\hbar c$  очень велика. Эта ситуация указывает на то, что малые расстояния и малые промежутки времени сами

<sup>1</sup> Шифф [26] пытался проквантовать нелинейную теорию, определяя  $\varphi$  не для точки пространства, а для дискретной пространственной решетки с шагом  $l$ . При  $l \rightarrow 0$  все энергетические уровни в соответствии с нашим простым расчетом стремятся к  $\infty$ . При  $l \neq 0$  они конечны. Но нетрудно показать, что в теории Шиффа имеет место распространение сигнала со скоростью, большей скорости света, так что его теория является нелокальной и поэтому несовместима с методом Гамильтона, которым он пользуется.

по себе не являются катастрофическими для современной теории, а основную роль играют большие взаимодействия.

Рассмотрим теперь несколько простых примеров, относящихся к случаю сильного взаимодействия.

Хорошо известно, что задача о движении электрона в поле точечного заряда  $Z > 137$  не имеет решения. Этот вывод неприменим, однако, к заряду, конечных размеров. В этом случае, формально, получается решение [27], приводящее к уровню, лежащему ниже  $-2m_0c^2$  ( $m_0$  — масса электрона). Трудность заключается в интерпретации этого уровня, так как он смешивается с отрицательными уровнями дираковского фона. Обычная интерпретация этого уровня как позитронного, видимо, несостоятельна. Действительно, из этой интерпретации следует, что при адиабатическом сближении зарядов для получения ядра с большим  $Z$  при переходе заряда через некоторое критическое значение  $Z_0$  сам собою возникает дополнительный заряд  $+e$ , без соответствующей компенсации. Возможно ли другое толкование — вопрос открытый и затемненный тем обстоятельством, что при  $Z \sim 137$  необходимо учитывать поляризацию вакуума. Между тем расчет поляризации при таких значениях  $Z$  лежит за пределами возможностей современной теории. Таким образом, при энергии связи порядка  $m_0c^2$  теория встречается с принципиальными затруднениями.

Рассмотрим другой формальный пример, относящийся к скалярному полю  $\varphi$ . Пусть скалярная частица движется во внешнем мезонном поле  $\varphi_0$ . Уравнение может быть записано в виде<sup>1</sup>

$$\square\varphi - \kappa^2\varphi + \alpha\varphi_0^2\varphi = 0. \quad (39)$$

Из этого уравнения непосредственно видно, что внутри области, где  $\alpha\varphi_0^2 > \kappa^2$ , можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \square\varphi + \kappa'^2\varphi &= 0, \\ \kappa'^2 &= \alpha\varphi_0^2 - \kappa^2. \end{aligned} \quad (39')$$

Отсюда видно, что собственные частоты такого поля, внутри потенциальной ямы, будут равны  $\omega = \sqrt{k^2 - \kappa'^2}$ . Для  $\alpha\varphi_0^2 > \kappa^2$  групповая скорость частиц внутри этой ямы оказывается большей скорости света. Это следует рассматривать как противоречие, возникающее опять-таки в том случае, когда энергия связи превышает собственную энергию частицы  $\mu c^2$ .

Третий пример был рассмотрен нами ранее [28]<sup>2</sup> и представляет собой случай простого линейного взаимодействия двух скалярных полей  $\varphi$  и  $\psi$ . Гамильтониан в этом случае записывается в виде

$$H = \frac{1}{2} \int [\dot{\varphi}^2 + (\nabla\varphi)^2 + a^2\varphi^2 + \dot{\psi}^2 + (\nabla\psi)^2 + b^2\psi^2 + g\varphi\psi] dx. \quad (40)$$

<sup>1</sup> Это уравнение можно рассматривать как обычное уравнение с дополнительным членом типа  $\alpha\varphi^3$ .

<sup>2</sup> Этот пример был рассмотрен как иллюстрация к той физической идее, что «природа» частиц может зависеть от рода аппарата-анализатора. Эта идея сейчас получила свое подтверждение в существовании двух сортов  $\theta$ -частиц.

Величины  $a^2$  и  $b^2$  определяют массы частиц, относящихся к полям  $\varphi$  и  $\psi$ , а  $g$  — есть константа связи этих полей. Собственные значения этого гамильтониана равны

$$E = \sum \varepsilon_k N_k + \sum \varepsilon_q M_q + E_0, \quad (41)$$

где

$$\varepsilon_k = \hbar \sqrt{k^2 + A^2}$$

и

$$\varepsilon_q = \hbar \sqrt{q^2 + B^2},$$

а  $N_k$  и  $M_q$  — целые положительные числа (или нули),  $E_0$  — нулевая энергия, равная  $\frac{1}{2} \sum \varepsilon_k + \frac{1}{2} \sum \varepsilon_q$ ,  $k, q$  — импульсы частиц. Здесь  $A$  и  $B$  — величины, определяющие массы частиц, причем

$$A^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} + \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)^2}{4} + g^2}, \quad B^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)^2}{4} + g^2}. \quad (42)$$

Из формулы (42) видно, что при  $g^2 > a^2 b^2$  одна из масс ( $B$ ) становится мнимой. Эта принципиальная трудность, как мы видим, возникает при большой энергии связи<sup>1</sup>.

Мы отдаем себе отчет в крайней схематичности приведенных примеров. Они искусственны в том отношении, что в них идет речь о движении частицы во внешнем поле, а не о взаимодействии частиц, но они все же ставят под серьезное сомнение пригодность понятия частицы в тех случаях, когда энергия взаимодействия становится сравнимой с собственной энергией частицы. Вместе с тем подвергается сомнению и обычная схема канонического квантования, глубочайшим образом связанная с представлением о частицах.

Мы не имеем возможности последовательно произвести расчеты тех случаев, когда частицы оказываются очень сильно взаимодействующими друг с другом. Однако мы можем получить представление о том, когда это может быть. При этом мы будем подразумевать под сильным взаимодействием такое взаимодействие частиц, когда энергия их взаимодействия  $W$  превосходит собственную энергию частиц  $E$ . Состояния такого сильного взаимодействия могут длиться очень короткое время, например в течение времени соударения. Но понятно, что только это малое время и имеет значение для всего процесса.

Рассмотрим сперва электромагнитное взаимодействие двух электронов. Из сравнения  $W = e^2/r$  с энергией электронов  $E$  найдем, что  $W > E > m_0 c^2$  при

$$r < \frac{e^2}{\hbar c} \lambda, \quad (43)$$

где  $\lambda \sim \hbar c/E$  есть длина волны электрона.

<sup>1</sup> Физический случай  $g^2 > a^2 b^2$  означает в терминах теории колебаний, что «фокус» превращается в «седло» (потеря устойчивости).

Размер области локализации электрона с длиной волны  $\lambda$  не может быть меньше  $\lambda$ . Поэтому мы видим, что из-за малости константы  $e^2/\hbar c$  электрон редко бывает в той области пространства, где  $W > m_0 c^2$ . В случае взаимодействия электрона и заряда  $eZ$  мы имели бы  $r < \frac{Ze^2}{\hbar c}$  и при  $Z > 137$   $r \sim \lambda$ . Таким образом, сильное взаимодействие, электрических зарядов наступает при  $Z \sim 137$ .

В случае взаимодействия нуклонов положение совсем иное. Для энергии взаимодействия вида<sup>1</sup>  $W \sim g^2 \frac{e^{-\kappa r}}{r}$  мы получим условие  $W > E > Mc^2$  ( $M$  — масса нуклона) в виде

$$r < \frac{g^2}{\hbar c} \lambda. \quad (43')$$

Но в этом случае  $g^2/\hbar c > 1$  и состояние сильного взаимодействия возникает при  $r > \lambda$ , т. е. во всех случаях, когда  $\lambda < \hbar/Mc$ .

Поэтому кажется весьма вероятным, что в процессе столкновения при высоких энергиях нуклоны на время столкновения полностью теряют свою индивидуальность как частицы, образуя состояния, которые можно назвать «компаунд-частицами».

Признаком такого состояния «компаунд-частицы» является то обстоятельство, что энергия частиц сосредоточивается в энергии взаимодействия, а не в собственной энергии частиц<sup>2</sup>.

Исследуем теперь подробнее условия для возникновения таких состояний. Рассмотрим для этой цели плотность энергии  $\epsilon$  системы взаимодействующих нуклонов и мезонов

$$\epsilon = \bar{\psi} D \psi + \frac{1}{2} [\dot{\varphi}^2 + (\nabla \varphi)^2 + \omega_0^2 \varphi^2] + g c \bar{\psi} \gamma_5 \psi \varphi. \quad (44)$$

Здесь первый член есть плотность энергии свободных нуклонов,  $D = \alpha \mathbf{p} + \beta M c^2$  — гамильтониан Дирака,  $\bar{\psi}$ ,  $\psi$  — нуклонное поле; второй член есть

<sup>1</sup> Если взять взаимодействие с большей степенью сингулярности  $W = \frac{g^2}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^n e^{-\kappa r}$ , то условие (43') гласит:  $r < \left(\frac{g^2}{\hbar c}\right)^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^{\frac{n}{n+1}} \lambda$  и дает прежний результат при  $a > \lambda$ . Здесь  $a$  — некоторая длина.

<sup>2</sup> Если рассмотреть, например, во втором приближении метода Тамма-Данкова взаимодействие двух нуклонов, то для их энергии получим

$$E = g^2 \frac{e^{-\kappa r_{11}}}{r_{11}} + g^2 \frac{e^{-\kappa r_{22}}}{r_{22}} + 2Mc^2 + \frac{g^2 e^{-\kappa r_{12}}}{r_{12}}.$$

Первые два члена бесконечны, так как  $r_{11} = r_{22} = 0$ , и представляют собой вклад в собственную энергию частиц, т. е.

$$g^2 \frac{e^{-\kappa r_{11}}}{r_{11}} + g^2 \frac{e^{-\kappa r_{22}}}{r_{22}} + 2Mc^2 = 2M_{\text{экс}} c^2;$$

последний же член — энергия взаимодействия  $g e^{-\kappa r_{12}}/r_{12}$  при  $r_{12} \rightarrow 0$  имеет не меньшее значение, чем первые два. Стало быть, в тех случаях, когда он существенно велик, он должен рассматриваться наравне с первыми двумя, как вклад в собственную энергию двух частиц.



плотность энергии мезонного поля  $\varphi$ ,  $\omega_0^2 = c^2 \kappa_0^2$ ; наконец — третий член есть энергия псевдоскалярного взаимодействия.

Пусть при заданной полной плотности  $\varepsilon$  плотности энергии свободного нуклонного поля будет  $\varepsilon_1$ , а плотность энергии свободного мезонного поля  $\varepsilon_2$ . В том случае, когда энергия взаимодействия не существенна,  $\varepsilon \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ . Выясним, когда будет осуществляться этот случай. Для этого воспользуемся соображениями размерности и введем некоторый масштаб длины  $l$ , определяющий величину градиентов так, что  $\frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{l}$  и  $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{1}{l}$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \bar{\psi} D \psi \sim \bar{\psi} \left( \frac{\hbar c}{l} + M c^2 \right) \psi, \quad \text{т. е.} \quad \bar{\psi} \psi \sim \frac{\varepsilon_1 l}{\hbar c} \left( 1 + \frac{M c l}{\hbar} \right)^{-1}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{2} \left[ \dot{\varphi}^2 + (\nabla \varphi)^2 + \omega_0^2 \varphi^2 \right] \sim \frac{1}{2} \left( \frac{c^2}{l^2} + \omega_0^2 \right) \varphi^2, \end{aligned} \quad (45)$$

т. е.

$$\varphi \sim \frac{\varepsilon_2^{1/2} l}{c} \left( 1 + \frac{\mu^2 c^2 l^2}{\hbar^2} \right)^{-1/2} \quad (45')$$

(здесь  $\mu$  — масса мезона,  $M$  — масса нуклона).

Взаимодействие будет несущественно, если

$$W = g c \bar{\psi} \gamma_5 \psi \varphi \ll \varepsilon_1, \varepsilon_2. \quad (46)$$

Заимствуя из (45) и (45')  $\bar{\psi} \psi$  и  $\varphi$ , найдем, что (46) будет соблюдено, если

$$\varepsilon_2 \ll \frac{\hbar^2 c^2}{g^2 l^4} \left( 1 + \frac{M c l}{\hbar} \right) \left( 1 + \frac{\mu^2 c^2 l^2}{\hbar^2} \right), \quad (47)$$

$$\varepsilon_1 \ll \frac{\hbar c}{g l^2} \varepsilon_2^{1/2} \left( 1 + \frac{M c l}{\hbar} \right) \left( 1 + \frac{\mu^2 c^2 l^2}{\hbar^2} \right)^{1/2}. \quad (47')$$

Объединяя оба неравенства, мы можем написать

$$\varepsilon \ll \varepsilon_{\text{кр}} = \frac{\hbar^2 c^2}{g^2 l^4} \left( 1 + \frac{M c l}{\hbar} \right)^2 \left( 1 + \frac{\mu^2 c^2 l^2}{\hbar^2} \right). \quad (48)$$

Напротив, если  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_{\text{кр}}$ , то энергия взаимодействия будет более существенна, чем энергия свободных полей. Действительно, по (45) и (45') можно представить  $\varepsilon$  в виде

$$\varepsilon \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \frac{g l^2}{\hbar c} \beta \varepsilon_1 \varepsilon_2^{1/2}, \quad (49)$$

где

$$\beta = \left( 1 + \frac{M c l}{\hbar} \right)^{-1} \left( 1 + \frac{\mu^2 c^2 l^2}{\hbar^2} \right)^{-1/2}.$$

Потребуем теперь, чтобы сумма  $\epsilon_1 + \epsilon_2$  была много меньше  $\epsilon$ , а

$$W = \frac{gl^2}{\hbar c} \beta \epsilon_1 \epsilon_2^{1/2} \approx \epsilon.$$

Прямой подстановкой нетрудно убедиться в том, что это возможно при  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2 \gg \epsilon_{\text{кр}}$ .

В этом случае основной вклад в энергию системы вносит энергия взаимодействия, а не энергия свободных нуклонного и мезонного полей  $\epsilon_1 + \epsilon_2$ . Таким образом,  $\epsilon_{\text{кр}}$  (48) действительно разделяет два физически совершенно различных случая взаимодействия: при  $\epsilon \ll \epsilon_{\text{кр}}$  взаимодействие несущественно и частицы сохраняют свое значение; при  $\epsilon \gg \epsilon_{\text{кр}}$  взаимодействие более существенно, чем сами частицы.

Разумеется, что выражение для критической энергии зависит от предположенного нами типа взаимодействия. Например, для псевдовекторного взаимодействия

$$W = gca \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \quad (50)$$

(здесь  $a$  — некоторая длина) значение критической энергии будет

$$\epsilon_{\text{кр}} = \frac{\hbar^2 c^2}{g^2 a^2 l^2} \left(1 + \frac{Mcl}{\hbar}\right)^2 \left(1 + \frac{\mu^2 c^2 l^2}{\hbar^2}\right), \quad (51)$$

т. е. в этом случае с уменьшением  $l$  критическая энергия растет более медленно.

Для электромагнитного взаимодействия

$$W = ec \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A_\mu \quad (52)$$

и аналогичным путем найдем

$$\epsilon_{\text{кр}} = \frac{\hbar^2 c^2}{e^2 l^4} \left(1 + \frac{mcl}{\hbar}\right)^2. \quad (53)$$

Наконец, для распадного взаимодействия<sup>1</sup>

$$W = g^* \bar{\psi}_N \varphi_\nu \varphi_e \psi_N \quad (54)$$

(здесь  $g^*$  — константа Ферми,  $\bar{\psi}_N$ ,  $\psi_N$  — нуклонное поле,  $\varphi_\nu$  — поле нейтрино,  $\varphi_e$  — электронное поле) критическая энергия равна

$$\epsilon_{\text{кр}} = \frac{\hbar^2 c^2}{g^* l^2} \left(1 + \frac{Mcl}{\hbar}\right) \left(1 + \frac{mcl}{\hbar}\right)^{1/2}. \quad (55)$$

<sup>1</sup> Имеется в виду слабое взаимодействие, ответственное за распад большинства элементарных частиц. — *Прим. ред.*

Существование критической энергии взаимодействия ясно из того обстоятельства, что энергия свободных полей квадратична относительно этих полей, а энергия взаимодействия, по крайней мере, кубична. При большой плотности энергии кубические члены будут превосходить квадратичные. Во всех случаях критическая энергия растет с уменьшением масштаба  $l$ , т. е. с ростом градиентов. Рост градиентов означает возрастание относительного вклада свободных частиц, так как плотность энергии свободных полей пропорциональна  $1/l$  (для фермионов) и  $1/l^2$  (для бозонов).

Рассмотрим теперь, когда на самом деле будут образовываться компаунд-частицы. Обратимся сперва к случаю псевдоскалярного взаимодействия нуклонов и мезонов в нерелятивистской области. Обозначим полную энергию сталкивающихся частиц через  $E = T + 2Mc^2$ . Масштаб области взаимодействия будет  $l \approx \hbar/\mu c$  — масса мезона). Плотность энергии  $\epsilon = T/l^3$ . Сравнивая это значение  $\epsilon$  с  $\epsilon_{\text{кр}}$  (48), получим условие для возникновения в момент соударения компаунд-частицы

$$T > \frac{\hbar c}{g^2} 2\mu c^2 \left(1 + \frac{M}{\mu}\right)^2, \quad (56)$$

что при  $g^2/4\pi\hbar c \sim 15$  дает  $T \sim 0,9 \cdot 10^8$  эВ<sup>1</sup>.

В крайнем релятивистском случае нужно учесть лоренцевское сжатие, так что наибольшие градиенты будут определяться не величиной  $l$ , а величиной  $l^* = \frac{\hbar}{\mu c} \sqrt{\frac{2Mc^2}{E}}$ . Объем области взаимодействия будет  $l^2 l^*$ , критическая энергия определяется из (48) также величиной  $l^*$ ; плотность энергии  $\epsilon$  в этом случае равна

$$\epsilon = \frac{Mc^2 \sqrt{\frac{E}{2Mc^2}}}{l^2 l^*}.$$

Сравнивая эту величину с критической энергией, получим, что состояние компаунд-частицы возникает, если

$$E < \frac{g^2}{\hbar c} \frac{M}{\mu} 2Mc^2, \quad (56')$$

т. е. при  $E < 10^{12}$  эВ. То, что в этом случае получилась не нижняя, а верхняя граница, объясняется тем, что с ростом энергии нуклонов  $E$  из-за лоренцевского сжатия крайне возрастают градиенты, и относительная роль свободных

<sup>1</sup> Если область сильного взаимодействия предположить равной не  $\hbar/\mu c$ , а  $\hbar/Mc$ , то результат будет  $T \sim 0,2 \cdot 10^8$  эВ.

полей возрастает<sup>1</sup>. Для псевдовекторного взаимодействия (50) в нерелятивистском случае вместо (56) получим

$$T > \frac{\hbar c}{g^2} \left( \frac{\hbar}{\mu c a} \right)^2 2\mu c^2 \left( 1 + \frac{M}{\mu} \right)^2, \quad (57)$$

т. е. при  $a \sim \hbar/\mu c$  то же значение  $T$ , что и для псевдоскалярного взаимодействия. В крайнем же релятивистском случае вместо (56) найдем

$$\frac{g^2}{\hbar c} > \frac{\hbar}{\mu c} \frac{\hbar}{M c} a^2, \quad (57')$$

т. е. при  $\frac{g^2}{4\pi\hbar c} \sim 15$  и  $\frac{\hbar}{M c} < a < \frac{\hbar}{\mu c}$  всегда будут компаунд-состояния. Это связано с тем, что в случае псевдовекторного взаимодействия относительная роль энергии взаимодействия растет не только с возрастанием плотностей энергии, но и с возрастанием градиентов. Таким образом для псевдовекторного взаимодействия область компаунд-частиц простирается от  $T = 10^8$  эВ неограниченно, в сторону больших энергий<sup>2</sup>.

Обратимся теперь к электромагнитным взаимодействиям. Здесь возникает некоторая неоднозначность с определением размеров области взаимодействия. Из выражения для критической энергии (53) в нерелятивистском случае найдем

$$T > \frac{\hbar c}{e^2} m c^2 \frac{\hbar}{m c l} \left( 1 + \frac{m c l}{\hbar} \right)^2. \quad (58)$$

Здесь  $m$  — масса электрона. Мы видим, что при любом  $l < \hbar/mc$  — величина  $T$  попадает в область релятивистской энергии. В крайнем релятивистском случае мы получаем

$$E < \frac{e^2}{\hbar c} 2m c^2 \frac{m c l}{\hbar}, \quad (58')$$

т. е. при  $l < \hbar/mc$  значение  $E$  попадает в область нерелятивистских энергий. Поэтому в случае электромагнитных взаимодействий из-за малости константы связи компаунд-частиц не возникает. Такой же результат получается и для распадного взаимодействия (54) из-за малости  $g^* = 10^{-48}$  эрг·см<sup>3</sup>.

Из приведенных расчетов мы видим, что энергия  $\epsilon_{\text{кр}}$  является физическим критерием для решения вопроса о возникновении состояний сильного взаимодействия «компаунд-частиц». Понятие «компаунд-частицы» не является совершенно новым — мы даем ему лишь физическое определение, основанное на

<sup>1</sup> Если верить в псевдоскалярное взаимодействие, то это означало бы, что при гидродинамическом рассмотрении столкновения нуклонов [34] мезонно-нуклонную жидкость можно было бы рассматривать как газ.

<sup>2</sup> Существование компаунд-частиц может быть также ответственным за образование надбарьерных осколков He, Li, Be, возникающих при соударении высокоэнергетического нуклона с атомным ядром. Такие компаунд-состояния могут возникать в ядре в результате флуктуации (конечно, на очень короткое время). Тогда столкновение нуклона с таким кратковременным компаунд-состоянием и может повести к выбрасыванию тяжелого осколка.

относительной роли энергии взаимодействия и собственной энергии частиц. Это понятие, в той или иной форме, встречалось в различных современных работах и в этой связи мы хотели бы добавить еще несколько замечаний.

Предположим, что речь идет о столкновении двух частиц  $P$  и  $N$ , описываемых в свободном состоянии волновыми полями  $\Psi_P$  и  $\Psi_N$ , и о рождении при этом столкновении новой частицы  $\pi$ , описываемой в свободном (или в почти свободном) состоянии волновым полем  $\Phi_\pi$ .

По аналогии с ядерными реакциями можно говорить о входных каналах реакции  $\Psi_P$  и  $\Psi_N$ , о ее выходных каналах,  $\Psi'_P$  и  $\Psi'_N$  и  $\Phi'_\pi$  и об области сильного взаимодействия.

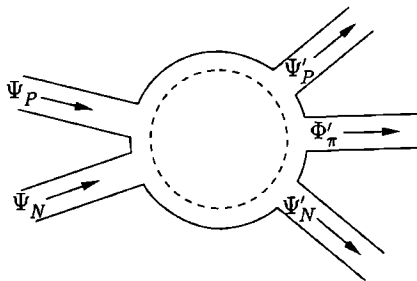


Рис. 3. Схема столкновения с сильным взаимодействием. Пунктиром обведена область сильного взаимодействия.  $\Psi_P$ ,  $\Psi_N$  — входные каналы;  $\Psi'_P$ ,  $\Psi'_N$ ,  $\Phi'_\pi$  — выходные каналы

На рис. 3 изображена схема такого столкновения.

Область, обведенная пунктиром, есть область сильного взаимодействия. Вне этой области, во входных каналах, мы имеем дело с почти свободными полями  $\Psi_P$ ,  $\Psi_N$ ; в выходных каналах поля  $\Psi'_P$ ,  $\Psi'_N$  и  $\Phi'_\pi$  также почти свободны. Во внутренней же области из-за сильного взаимодействия нет ни поля  $\Psi$ , ни поля  $\Phi$ , но есть нечто другое, что при ослаблении вырождается в линейные поля  $\Psi$  и  $\Phi$ . Мы почти ничего не знаем сейчас об этом «нечто другом».

В различных современных попытках рассмотреть эти состояния применяются самые схематические наброски. Так, например, можно рассматривать сталкивающиеся частицы как «черные», абсолютно поглощающие шарики [29, 30]. Такой подход позволяет выделить дифракционное рассеяние и может дать некоторое представление о вероятности образования «компаунд-частицы» («вероятность прилипания»). В случае, если время жизни «компаунд-состояния» заметно превышает время столкновения  $\tau = a/v$  (здесь  $a$  — радиус сферы сильного взаимодействия,  $v$  — относительная скорость частиц), то можно говорить об изобарном состоянии и рассматривать его как истинную новую частицу [31, 32]. Такие представления во многих отношениях оказываются плодотворными, так как заведомо известно, что особо сильные взаимодействия характеризуются вполне определенными интегралами движения. Например, для столкновения пары нуклонов в этом отношении существенно состояние с  $J = 0$  (полный момент) и  $T = 1$  (изотопический спин). Для столкновения  $\pi$ -мезона с нуклоном важно состояние с  $J = 3/2$

и  $T = 3/2$ . Однако время жизни изобарных состояний, видимо, мало отличается от времени столкновения.

Другой подход связан с применением статистических [33] или гидродинамических методов [34]. В статистическом методе оперируют с отношениями фазовых объемов, «занимаемых» каждым из возможных процессов распада «компаунд-частицы». Ясно, что по самому своему существу этот метод может описать лишь самые грубые черты этого распада. В сущности, речь идет о сравнении фазовых объемов выходных каналов, сам же процесс образования частиц (или, что то же, линейных полей  $\Psi$ ,  $\Phi$ ) выпадает из этого рассмотрения.

В гидродинамическом рассмотрении [34] была сделана попытка исправить этот недостаток теории Ферми следующим образом: «компаунд-состояние» рассматривается как сильно возбужденная жидкость, которая только в процессе своего расширения превращается в газ, состоящий из частиц. При этом сама жидкость рассматривается как классическая, подчиняющаяся законам релятивистской гидродинамики. Это несомненно шаг вперед по сравнению со статистической теорией. Но и эта картина является лишь грубой схемой. На первых парах расширения этой жидкости имеют место значительные квантовые флуктуации и поэтому остается открытым вопрос об описании этой существенной фазы расширения [35].

Рассматривая «компаунд-состояние», мы начали с аналогии с ядерными реакциями. Однако эта аналогия является чисто внешней. «Компаунд-ядро» есть лишь особое состояние частиц, участвующих в ядерной реакции. В «компаунд-частице» частицы, из которых она образовалась, а также и другие, внутри нее возникающие частицы, взаимодействуют столь сильно, что само понятие о структуре «компаунд-частицы», как состоящей из взаимодействующих частиц, теряет свой смысл. Это, однако, не противоречит тому, что «компаунд-частица» может быть охарактеризована интегральными величинами (спин, заряд, масса и т. п.) и что ее центр тяжести будет двигаться в согласии с законами квантовой механики. Речь идет о ее внутренней структуре. Из того факта, что частицы как самостоятельные объекты из-за сильного взаимодействия перестают существовать, менее всего можно предполагать, что подобные состояния могут быть описаны какими-либо классическими методами. Классическая теория не знает постоянной Планка и поэтому трудно представить себе, каким бы способом из образования, подчиняющегося законам классической теории, могло бы возникнуть нечто, подчиняющееся законам квантовой теории.

Напротив, более естественно думать, что «компаунд-частицы» представляют собой сущности, управляемые законами более общими, нежели законы квантовой теории.

Так как весь аппарат современной теории основан на понятии частицы, то нет никакой надежды на то, что он будет эффективен в проблемах, связанных с сильным взаимодействием. В этом, на наш взгляд, и лежит глубочайшая причина того, что нелокальные и нелинейные теории, базирующиеся на современной методике квантования, принципиально связанной с понятием частицы, не оправдывают возлагавшихся на них надежд.

## Список литературы

1. *Watagin G.* // *Zs. Phys.* 1934. Bd. 88. P. 92.
2. *Марков М. А.* // *ЖЭТФ.* 1940. Т. 10. С. 1311; *J. of Phys. USSR.* 1940. V. 2. P. 461.
3. *Yukawa H.* // *Phys. Rev.* 1950. V. 77. P. 219; V. 80. P. 1047.
4. *Блохинцев Д. И.* // *Вестник МГУ. Физика.* 1946. № 3. С. 77; 1948. № 1. С. 83; *ЖЭТФ.* 1946. Т. 16. С. 480. — Статья 73 в настоящем издании. — *Прим. ред.*
5. *McManus H.* // *Proc. Roy. Soc. A.* 1948. V. 195. P. 323.
6. *Peierls R.* // *Proc. Roy. Soc. A.* 1952. V. 214. P. 143.
7. *Блохинцев Д. И.* // *ЖЭТФ.* 1952. Т. 22. С. 254.
8. *Марков М. А.* // *ЖЭТФ.* 1946. Т. 16. С. 790.
9. *Блохинцев Д. И.* // *ЖЭТФ.* 1947. Т. 17. С. 266. — Статья 76 в настоящем издании. — *Прим. ред.*
10. *Pauli W.* // *Nuovo Cimento.* 1953. V. 10. P. 648.
11. *Барашенков В. С.* Диссертация. 1955; *ЖЭТФ.* 1955. Т. 28. С. 579.
12. *Heisenberg W.* // *Zs. f. Phys.* 1943. Bd. 120. S. 513; 673.
13. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* // *УФН.* 1955. Т. 55. С. 149.
14. *Rzewuski J.* // *Acta Phys. Polon.* 1951. V. 11. P. 1; 9.
15. *Rayski J.* // *Phil. Mag.* 1951. V. 42. P. 1289.
16. *Kristinsen P., Möller C.* // *Mat. Fys. Medd.* 1952. V. 27. P. 7.
17. *Bloch C.* // *Mat. Fys. Medd.* 1952. V. 27. P. 8.
18. *Chretien M., Peierls R.* // *Proc. Roy. Soc. A.* 1954. V. 223. P. 468.
19. *Hayashi C.* // *Progr. Theor. Phys.* 1953. V. 10. P. 533.
20. *Yang C. N., Feldman D.* // *Phys. Rev.* 1950. V. 79. P. 972.
21. *Медведев Б. В.* // *ДАН СССР.* 1955. Т. 103. С. 37.
22. *Born M.* // *Proc. Roy. Soc. A.* 1934. V. 143. P. 410.
23. *Блохинцев Д. И.* // *ДАН СССР.* 1952. Т. 82. С. 553. — Статья 81 в настоящем издании. — *Прим. ред.*; *Nuovo Cimento. Suppl.* 1956. № 4, ser. X. P. 629.
24. *Блохинцев Д. И., Орлов В. В.* // *ЖЭТФ.* 1953. Т. 25. С. 513. — Статья 82 в настоящем издании. — *Прим. ред.*
25. *Heisenberg W.* // *Zs. f. Phys.* 1952. Bd. 133. S. 65.
26. *Shiff L.* // *Phys. Rev.* 1952. V. 92. P. 766.
27. *Померанчук И. Я., Смородинский Я. А.* // *J. of Phys. USSR.* 1945. V. 9. P. 97.
28. *Блохинцев Д. И.* // *УФН.* 1950. Т. 42. С. 76. — Статья 79 в настоящем издании. — *Прим. ред.*
29. *Смородинский Я. А.* // *Проблемы современной физики: Сб.* 1954. № 7. С. 7.
30. *Беленький С. З.* // *ЖЭТФ.* 1956. Т. 30. С. 983.
31. *Brufeckner K.* // *Phys. Rev.* 1952. V. 86. P. 106.
32. *Тамм И. Е., Гольфанд Ю. А., Фейнберг В. Я.* // *ЖЭТФ.* 1954. Т. 26. С. 649.
33. *Fermi E.* // *Phys. Rev.* 1951. V. 81. P. 683.
34. *Беленький С. З., Ландау Л. Д.* // *УФН.* 1955. Т. 56. С. 309.
35. *Блохинцев Д. И.* // *ЖЭТФ.* 1957. Т. 32, вып. 2. С. 350. — Статья 83 в настоящем издании. — *Прим. ред.*

**Комментарий. Блохинцев и нелокальная теория поля.** Наибольший интерес к построению квантовой теории поля с нелокальным взаимодействием был проявлен в 50-х годах прошлого века. Причиной тому было то обстоятельство, что локальные теории, квантовая электродинамика в частности, при вычислении физических величин вели к появлению так называемых ультрафиолетовых расходимостей, т. е. соответствующие интегралы расходились в области малых расстояний, или больших энергий. Подчеркнем, эти расходимости являются прямым следствием предположения о локальном характере полевого взаимодействия. Следует заметить, что такого сорта расходимость присутствовала и в классической электродинамике в задаче о собственной энергии точечного электрона. Однако в этом случае было ясно, что реальный электрон не может быть точечным, хотя самосогласованного релятивистски ковариантного описания протяженного объекта придумано не было. Кроме того, проблема с собственной электромагнитной энергией электрона никак не влияла на любые вычисления, связанные с распространением электромагнитных волн.

При разработке любой теории всегда имеются два главных, можно сказать даже не связанных друг с другом, вопроса: во-первых, математическая самосогласованность и корректность рассматриваемой теории и, во-вторых, применимость разработанной теории к какой-либо области физической реальности.

В 50-е годы были потрачены немалые усилия, связанные с именами Фейнмана, Дайсона, Швингера, Томонага, Боголюбова, по исследованию структуры матрицы рассеяния, в результате чего квантовая теория поля получила свою окончательную формулировку. Исследования велись, условно говоря, по двум направлениям. Формальный путь, который в конце концов был принят физическим сообществом как единственно правильный, ставил перед собой задачу сформулировать процедуру вычисления элементов матрицы рассеяния, связанную с определением способа работы с расходящимися объектами, чтобы в результате получить конечную матрицу рассеяния, удовлетворяющую всем необходимым условиям. На этом пути была сформулирована перенормируемая квантовая теория поля. Более того, требование перенормируемости считается в настоящее время физическим требованием, так что перенормируемые теории сразу отвергаются.

Физический путь — это найти физически обоснованную модификацию теории, чтобы все проблемы, связанные с точечным взаимодействием, вообще не возникали. Наличие ультрафиолетовых расходимостей рассматривалось как безусловный недостаток теории. Естественным решением этой проблемы являлось убеждение, что предположение о локальном характере взаимодействия элементарных частиц является не совсем адекватным приближением и необходимо учитывать явным образом нелокальность взаимодействия. Основная идея состояла в том, что реальное взаимодействие частиц не может быть точечным. Блохинцев принадлежал к числу физиков, искавших физический



путь преодоления трудностей теории, связанных с локальностью взаимодействия.

Наметились две точки зрения на природу нелокальности. Одна из них, которую можно вполне назвать кардинальной, состояла в том, что существует такой малый масштаб расстояний, на котором изменяются наши представления о пространстве-времени. Возникающий параметр длины имеет универсальный характер, такой, как скорость света или постоянная Планка. К настоящему времени полностью отсутствуют какие-либо экспериментальные указания на существование такой элементарной длины.

Вторая точка зрения состоит в том, что нелокальность связана с физической протяженностью частиц, для описания которой еще не создано адекватной теории. Создание такой теории должно дать инструмент феноменологического описания процессов сильных взаимодействий, когда очевидно, что взаимодействие носит нелокальный характер.

Исследованию этих вопросов посвящены статьи Д. И. Блохинцева, вошедшие в настоящее издание. В этих работах Блохинцев дает всесторонний обзор попыток ввести нелокальное взаимодействие в формализм квантовой теории поля. Основным объектом анализа является проблема выполнения условия причинности при введении нелокального взаимодействия. С точки зрения сегодняшнего дня основным упущением этого анализа является то, что, по умолчанию, предполагается, что время может быть измерено абсолютно точно, даже если речь идет о макропричинности. Специально анализу этих проблем посвящена монография Блохинцева «Пространство и время в микромире».

Другим объектом анализа Блохинцева было обсуждение самой возможности описания процессов сильных взаимодействий в рамках квантовой теории поля. Дело вот в чем. Если говорить собственно о локальной квантовой теории поля, то в ней существует нерешенная до сих пор проблема представления канонических перестановочных соотношений. Общепринятое представление — это пространство Фока, связанное с квантованием невзаимодействующего свободного поля и описывающее свободные невзаимодействующие частицы. Уже это представление не адекватно описываемой реальности, поскольку квантовое поле взаимодействует всегда. При таком квантовании гамильтониан взаимодействия в локальной теории не является оператором на пространстве Фока, что является следствием трансляционной инвариантности и локальности гамильтониана взаимодействия. Таким образом, квантовое уравнение Шредингера математически не определено, и, следовательно, отсутствует описание развития квантового поля во времени. Эта проблема не решена по сей день. В настоящее время принято считать, что достаточно знать матрицу рассеяния, определяющую квантовые переходы между бесконечно удаленными друг от друга свободными состояниями, описываемыми пространством Фока.

Матрица рассеяния строится по степеням гамильтониана взаимодействия, такое разложение как раз содержит расходимости на малых расстояниях, которые устраняются процедурой перенормировки конечного числа физических параметров: масс частиц и констант связи. Каждый член ряда теории

возмущений — диаграмма Фейнмана — представляет собой взаимодействие определенного конечного числа частиц в состоянии плоских волн, что физически разумно, когда малы константа связи и энергия взаимодействия. При больших энергиях, когда энергия взаимодействия порядка или превышает энергию свободных частиц, частицы в области взаимодействия теряют свою индивидуальность, должны возникать так называемые «компаунд-состояния» по терминологии Блохинцева, а это означает, что матрица рассеяния как оператор, заданный на пространстве Фока, не может описывать такие высокоэнергетические процессы. Реализацией этой идеи можно, в частности, считать партонную модель сильных взаимодействий.

Можно сказать, что квантовая теория поля еще ждет своего завершения, и идеи Блохинцева весьма важны при размышлениях о дальнейших путях развития теории.

*Г. В. Ефимов*

## О ФЛУКТУАЦИЯХ ЯДЕРНОГО ВЕЩЕСТВА\*

Показано, что возникновение энергичных осколков при столкновении быстрых нуклонов с ядрами может рассматриваться как результат столкновения нуклона с флуктуацией ядерного вещества.

### Введение

В процессе движения нуклонов в ядре могут возникать кратковременные тесные скопления нуклонов, иными словами флуктуации плотности ядерного вещества. Такие скопления, будучи относительно удалены от других нуклонов ядра, являются атомными ядрами меньшей массы, находящимися в состоянии флуктуационного сжатия.

В недавнее время Мещеряковым и его сотрудниками [1, 2] при изучении рассеяния протонов с энергией 675 МэВ на легких ядрах были обнаружены явления, которые подтверждают существование таких флуктуаций, по крайней мере для простейших парных флуктуаций, приводящих к образованию сжатого дейтона.

В этой связи уместно напомнить, что в ряде более ранних работ [3, 4] обращалось внимание на образование «надбарьерных» осколков при расщеплении ядер энергичными нуклонами, т. е. осколков, энергия движения которых значительно превышает их энергию связи и высоту кулоновского барьера. Однако, отсутствие количественных данных затрудняло теоретический анализ этих явлений.

Некоторые авторы неосновательно относили это любопытное явление на счет гипотетических дальнедействующих ядерных сил; другие связывали это явление с существованием непарных ядерных сил. Экспериментальные данные по вылету энергичного дейтона из легких ядер подтверждают представление о том, что и другие «надбарьерные» осколки образуются также в результате прямого столкновения нуклона с тесной группой нуклонов ядра, возникшей из-за флуктуаций плотности ядерного вещества. В дальнейшем приводятся количественные доводы в пользу флуктуационного происхождения энергичных дейтонов и других «надбарьерных» осколков.

Что же касается роли непарных сил, то следует заметить, что оценка их величины не дает оснований думать, что они существенно больше парных сил [5]. В момент тесного сближения нуклонов могут иметь значение как

попарное, так и коллективное взаимодействие. Однако сейчас нет экспериментальных данных, которые позволили бы пролить свет на детали этого взаимодействия, тем более определить относительный вклад парных и коллективных взаимодействий.

## 1. Взаимодействие дейтронов с протонами большой энергии

Как было показано в опытах [1, 2] по рассеянию протонов с энергией 675 МэВ на дейтонах, кроме рассеянных нуклонов, наблюдаются, хотя и в относительно небольшом числе, неразрушенные дейтоны большой энергии (до 660 МэВ). Это означает, что в таких столкновениях нуклон передает дейтону как целому значительную часть своего импульса.

Согласно флуктуационному представлению, такое столкновение происходит в тот момент, когда оба нуклона в дейтоне находятся на малом расстоянии  $R$  друг от друга и сильно взаимодействуют. В таком случае нуклон имеет возможность передать свой импульс этой тесной паре как целому. Ожидаемое сечение для такого специального столкновения будет равно

$$\sigma = \sigma_d W_d(R), \quad (1)$$

где  $\sigma_d$  — полное сечение квазиупругого столкновения, а величина  $W_d(R)$  есть вероятность того, что оба нуклона дейтона находятся на расстоянии, меньшем  $R$ . Расстояние  $R$  по порядку величины должно быть равно радиусу сильного взаимодействия нуклонов, что составляет  $(2-3)\hbar/Mc$ . Если через  $\psi_d(R)$  обозначить волновую функцию дейтона, то

$$W_d(R) = 4\pi \int_0^R \psi_d^2(r) r^2 dr = \frac{4\pi}{3} \psi^2(0) R^3. \quad (2)$$

Для вычисления  $W_d(R)$  необходимо знать волновую функцию дейтона вблизи  $r = 0$ . Обычная асимптотическая функция дейтона  $\psi_d = \sqrt{\alpha/2\pi} e^{-\alpha r}/r$  ( $1/\alpha = 4,3 \cdot 10^{-13}$  см) для этой цели совершенно не годится, так как обращается в бесконечность при  $r = 0$ . Волновая функция дейтона не имеет узлов. Поэтому мы можем аппроксимировать  $u = r\psi_d$  для больших  $r$  в виде  $\sqrt{\alpha/2\pi} e^{-\alpha r}$ , а для малых  $r$  в виде  $u = \psi(0)[r - \beta r^2 + \dots]$  и сомкнуть функции и производные в области  $r = b = 1/2\beta$ . Величина  $2\beta$  имеет смысл логарифмической производной  $(\psi'/\psi)_0$ . Это дает нам  $\psi(0) \sim \beta\sqrt{\alpha/2\pi}$ .

Вычисление с функцией Хюльтена

$$r\psi_d = \sqrt{\alpha/2\pi} (e^{-\alpha r} - e^{-\beta r})$$

приводит к тому же результату, причем по совокупности известных данных  $\beta$  в несколько раз больше  $\alpha$ . Не рассчитывая на большее, нежели порядок величины, мы положим

$$\psi_d(0) = \beta\sqrt{\alpha/2\pi}, \quad (3)$$

где величина  $\beta$  рассматривается как определяющая логарифмическую производную волновой функции дейтона при  $r = 0$ .

Из (2) и (3) находим

$$W_d(R) = \frac{2}{3} \alpha \beta^2 R^3. \quad (4)$$

Если выразить  $R$  в единицах  $\hbar/Mc = 2 \cdot 10^{-14}$  см, то

$$W_d(R) = 7 \cdot 10^{-5} R^3 (\beta/\alpha)^2. \quad (4')$$

Экспериментальное же значение этой величины составляет  $7 \cdot 10^{-3}$ . Поэтому  $R^3(\beta/\alpha)^2 \sim 10^2$ , что вполне разумно.

Заметим, что ни теория «pick up», ни «импульсное» приближение не являются применимыми в нашем случае. Действительно, в обоих названных методах расчета предполагается, что падающий нуклон взаимодействует либо только с одним нуклоном, либо с двумя, но независимо. В рассматриваемом случае передаваемые импульсы столь велики, что весь процесс идет за счет очень высоких гармоник волновой функции дейтона, т. е. за счет таких состояний, когда оба нуклона близки друг к другу и их столкновение с третьим нуклоном нельзя рассматривать как происходящее независимо.

Оценка величины  $W(R)$  для других легких ядер еще более затруднительна. Совсем ориентировочно можно определить, что, например, для трития величина  $W_T(R)$  будет порядка  $W_d^2(R)$  с поправкой на то обстоятельство, что величина  $\alpha_T$  для трития будет в  $\sqrt{m_T \epsilon_T / m_d \epsilon_d}$  раз больше  $\alpha$  (здесь  $\epsilon_T$  — энергия связи в тритии,  $\epsilon_d$  — в дейтоне,  $m_T$  и  $m_d$  — приведённые массы трития и дейтона по отношению к одному, удаляемому из ядра нуклону). Это уменьшение  $\alpha_T$  выражает тот факт, что тритий является более тесно связанной группой нуклонов, нежели дейтон.

Подобным же образом  $\alpha_{He}$  для He будет в  $(m_{He} \epsilon_{He} / m_d \epsilon_d)^{1/2}$  больше  $\alpha$ .

С приведенным ранее значением для  $W_d(R)$  найдем  $W_T \sim 2 \cdot 10^{-4}$ ,  $W_{He} \sim 2 \cdot 10^{-5}$ .

Эти числа могут быть впоследствии проверены экспериментально.

## 2. Оценка флуктуаций в ядрах

Пусть волновая функция ядра  $A + Z + N$  будет

$$\Psi_A = \Psi_A(x_1, x_2, \dots, x_Z; y_1, y_2, \dots, y_N), \quad (5)$$

где  $x_1, x_2, \dots$  — координаты протонов, а  $y_1, y_2, \dots$  — координаты нейтронов. Как известно, оператор плотности, например, протонов будет равен

$$\rho(x) = \sum_{k=1}^Z \delta(x - x_k). \quad (6)$$

Подобным же образом можно ввести оператор плотности второго порядка

$$\rho(x, x') = \sum_{k \neq s}^Z \delta(x - x_k) \delta(x - x_s). \quad (6')$$

В общем случае оператор плотности, порядка  $a$ , в котором участвует  $z$  протонов и  $n$  нейтронов ( $a = z + n$ ), будет

$$\rho(x, x', \dots x^{(z)}; y, y', \dots y^{(n)}) = \sum_{k \neq s \neq \dots} \delta(x - x_k) \delta(x' - x_s) \dots, \delta(y^{(n)} - y_n). \quad (7)$$

Среднее значение этой плотности равно

$$\overline{\rho(x, x', \dots y^{(n)})} = \int \Psi_A^* \rho(x, x', \dots y^{(n)}) \Psi_A dx_1 dx_2 \dots dy_N. \quad (8)$$

Точное вычисление этого интеграла требует знания функции  $\Psi_A$ . Однако можно сделать оценки на основании того соображения, что этот интеграл должен быть равен

$$\overline{\rho(x, x', \dots y^{(n)})} = MD(x, x' \dots x^{(z)}, y, y', \dots y^{(n)}), \quad (9)$$

где  $D$  — плотность вероятности того, что протоны ( $z$ ) и нейтроны ( $n$ ) находятся в указанных точках  $(x, x', \dots y^{(n)})$ , а число  $M$  равно числу способов, которым эта конфигурация могла бы осуществиться при различных перестановках протонов и нейтронов.

Нас интересует случай, когда относительные координаты этих нуклонов  $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{a-1}$  находятся внутри малого объема  $\Omega < R^3$ . Вводя еще координату центра тяжести этой группы  $X$  и интегрируя по  $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{a-1}$  в объеме  $\Omega$  и по  $X$  в объеме ядра, найдем

$$\overline{\rho_a(\Omega)} = MW_a(R), \quad (10)$$

где

$$W_a(R) = \int_{\Omega} (\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{a-1}, X) d\xi_1 \dots d\xi_{a-1} dX \quad (11)$$

есть вероятность возникновения интересующей нас группы, зажатой в малый объем  $\Omega$ .

Так как важны лишь малые расстояния  $R$ , то эта вероятность близка к соответствующей вероятности флуктуации в свободном ядре, с атомным весом  $a = z + n$ . Это дает возможность определить эту вероятность из опытов по столкновению нуклона со свободным ядром  $(A)^1$ .

Что же касается множителя  $M$ , то для легких ядер он равен числу сочетаний, посредством которых можно образовать интересующий нас осколок, т. е. пропорционален, грубо говоря,  $Z^2$ .

Для тех же ядер, где плотность ядерного вещества распределена, как в жидкой капле, число  $M$  будет равно числу осколков  $a = z + n$ , которые

<sup>1</sup> Лексин и Кумекии [6] сделали попытку определить эту вероятность для углерода из столкновения  $pC$ . В пределах точности своего эксперимента они не обнаружили энергичных протонов, рассеянных назад на углероде, как на целом. Из оценок, сделанных выше для  $T$  и  $He$ , можно считать, что вероятность подобной флуктуации для  $C$  совсем ничтожна.

содержатся в ядре, т.е. пропорционально  $Z$ . В тяжелых ядрах следует еще учесть вероятность выхода энергичного осколка из толщи ядра  $P$ .

Полагая, что энергичные осколки возникают равномерно по объему ядра и движутся по направлению импульса первичного нуклона, с пробегом

$$l = 1/n_0\sigma_a, \quad (12)$$

(где  $n_0$  — плотность нуклонов в ядре, а  $\sigma_a \sim \pi r_0^2 a^{2/3}$  — сечение осколка, имеющего атомный вес  $a$ ), нетрудно найти, что вероятность выхода осколка из ядра будет равна

$$P = \frac{3}{\eta} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{\eta^2} + \left( \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta^2} \right) e^{-\eta} \right], \quad (13)$$

где  $\eta = D/l$ ,  $D = 2r_0 A^{1/3}$  — диаметр ядра. В частности, если  $P_A \ll 1$ , то

$$P = (\pi r_0^2 / \sigma_a) A^{-1/2} = \sigma_A / \sigma_a, \quad \sigma_A = \pi r_0^2 A^{2/3}.$$

Учитывая теперь все множители, получим для сечения образования осколка с атомным весом  $a$  из ядра с атомным весом  $A$

$$\Sigma_a = PM\sigma_a W_a(R) \cong (\sigma_A/A)MW_a(R), \quad (14)$$

а выход осколка  $a$  на одно столкновение с ядром будет

$$q_a = PM(\sigma_a/\sigma_A)W_d(R) = (M/A)W_a(R), \quad (15)$$

где  $\sigma_A$  — полное сечение ядра-мишени.

Специально для дейтона ( $a = 2$ ) и для легких ядер число  $M$  будет равно числу способов, которым из нуклонов ядра можно образовать дейтон. Протоны и нейтроны имеют в дейтоне параллельный спин, поэтому  $M_d = 2(ZN/4) = \frac{1}{2}ZN$ . В результате, для дейтонов из легких ядер

$$\Sigma'_d = \frac{1}{2}(ZN/A)\sigma_A W_d(R). \quad (16)$$

В случае тяжелых ядер с учетом насыщения ядерных сил  $M_d = Zn$ , где  $n$  — число нейтронов, соседних с протонами и имеющих противоположный спин. Это число  $\sim 6$ . Поэтому для тяжелых ядер

$$\Sigma''_d = (ZN/A)\sigma_A W_d(R). \quad (16')$$

Выход в этом случае почти постоянен:

$$q''_d = (Zn/A)W_d(R). \quad (15')$$

Из формулы (16), учитывая, что  $\sigma_d = 70 \cdot 10^{-27}$  см<sup>2</sup>, а  $W_d(R) \sim 7 \cdot 10^{-3}$ , получим следующие значения  $\Sigma_d$  в мб:

|            |     |     |     |      |
|------------|-----|-----|-----|------|
| Элемент    | Li  | Be  | C   | O    |
| $\Sigma_d$ | 1,4 | 2,1 | 3,6 | 5,8. |

Что касается тяжелых ядер, то согласно (15), ожидаемый выход дейтонов  $q_d'' \sim 2\%$ .

Полученные числа находятся в удовлетворительном согласии с результатами работы<sup>1</sup>. Более убедительная проверка могла бы быть получена из изучения выхода дейтонов из более тяжелых ядер.

Заметим еще, что приведенная выше оценка вероятности флуктуации в тритии  $W_T(R) \sim 2 \cdot 10^{-4}$  приводит к заключению, что выход трития должен составлять 2–3% от выхода дейтерия. Этот вывод не противоречит результатам работы [1].

Количественные вычисления с осколками более тяжелыми, нежели дейтон, не имеют надежных теоретических оснований. Поэтому было бы очень интересно измерить вероятности передачи большого импульса ядрам более сложным, нежели дейтон. Тогда появилась бы возможность оценить выход этих осколков из сложных ядер.

В заключение автор приносит благодарность за многие ценные обсуждения М. Г. Мещерякову и Г. А. Лексину.

### Список литературы

1. Ажгирей Л. С. и др. // ЖЭТФ. 1957. Т. 33, вып. 5(11). С. 1185.
2. Лексин Г. А. // ЖЭТФ. 1957. Т. 32. С. 445.
3. Perkins O. H. // Proc. Roy. Soc. A. 1950. V. 203. P. 399.
4. Sørensen S. O. C. // Phil. Mag. 1952. V. 42. P. 188.
5. Кадомцев Б. Б. Дипломная работа. МГУ, 1952.
6. Лексин Г. А., Кумекин Ю. П. // ЖЭТФ. 1957. Т. 33, вып. 5(11). С. 1147.

Объединенный институт  
ядерных исследований

Поступила  
1 июля 1957 г.

Комментарий. Гипотеза о флуктуациях ядерного вещества в дальнейшем нашла свое подтверждение при изучении так называемого «кумулятивного эффекта», т. е. в процессах образования адронов на ядрах с импульсами, выходящими за предел области, кинематически разрешенной для соударения с одним покоящимся нуклоном ядра (см. ст. 109 в данном собрании научных трудов).

А. В. Ефремов

---

<sup>1</sup> При сравнении этих данных с данными табл. 3 работы [1] следует иметь в виду, что там приводится сечение для всех нейтронов, а у нас только для быстрых дейтонов. По оценкам, сделанным в [1] и [2], различие должно сводиться к множителю 3. Поэтому наша таблица вполне удовлетворительно согласуется с данными, приведенными в [1].



## КОГДА СЛАБОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СТАНОВИТСЯ СИЛЬНЫМ?\*

В моей статье «Нелокальные и нелинейные теории поля», опубликованной во втором выпуске «Успехов физических наук» за 1957 год, было рассмотрено понятие сильного взаимодействия [1]. При этом под сильным взаимодействием понималось такое взаимодействие, когда в течение времени столкновения частиц их энергия, в основном, сосредоточивается в их энергии взаимодействия, а не в их собственной, кинетической энергии.

На основе этого критерия был рассмотрен ряд примеров, в частности электромагнитные взаимодействия электронов. Однако не было рассмотрено слабое взаимодействие электронов с участием  $\mu$ -мезонов и нейтрино.

Оказывается, что это взаимодействие может стать сильным в определенном выше смысле.

Ниже приводится доказательство этого утверждения, и это письмо является, таким образом, дополнением к главе моей статьи, посвященной физике взаимодействия.

Рассмотрим процесс взаимодействия нейтрино и электрона с превращением электрона в  $\mu$ -мезон:

$$\nu + e \rightarrow \mu + \nu'. \quad (1)$$

Это своеобразное «комбинационное» рассеяние нейтрино на электроны.

Плотность энергии по порядку величины в этом случае равна

$$W = g^* \bar{\psi}_e \psi_\mu \bar{\psi}_\nu \psi_{\nu'}, \quad (2)$$

где  $g^*$  — константа Ферми, а  $\psi_e$ ,  $\psi_\mu$ ,  $\psi_\nu$  суть волновые функции электрона,  $\mu$ -мезона и нейтрино соответственно. Величина  $g^*$  может быть записана в виде

$$g^*/\hbar c = \Lambda_0^2, \quad (3)$$

где  $\Lambda_0$  — некоторая длина порядка  $\cong 10^{-16}$  см (на возможное значение этой длины в связи с несохранением четности обратил внимание И. С. Шапиро [2]). Плотность кинетической энергии, например, для электронов будет

$$\epsilon_e = \bar{\psi}_e D \psi_e, \quad (4)$$

где  $D = \alpha \mathbf{p} + \beta m c^2$  есть гамильтониан Дирака. Отсюда порядок величины

$$\bar{\psi}_e \psi_e \cong \frac{\epsilon_e l}{\hbar c}, \quad (5)$$

где  $l$  — характерный масштаб пространственной области, определяющий величину градиентов так, что  $(1/c)(\partial/\partial t)$ ,  $\partial/\partial x \cong 1/l$ . Стало быть, порядок величины  $W$  будет

$$W = \frac{g^* l^2}{\hbar^2 c^2} \varepsilon_e^{1/2} \varepsilon_\mu^{1/2} \varepsilon_\nu. \quad (6)$$

Полагая  $\varepsilon_e = \alpha\varepsilon$ ,  $\varepsilon_\mu = \beta\varepsilon$ ,  $\varepsilon_\nu = \gamma\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — полная плотность энергии, найдем

$$\varepsilon \cong \varepsilon(\alpha + \beta + \gamma) + \frac{g^* l^2}{\hbar^2 c^2} \varepsilon^2 \alpha^{1/2} \beta^{1/2} \gamma. \quad (7)$$

В соответствии с определением взаимодействие будет сильным, если при  $\alpha + \beta + \gamma \ll 1$  ( $\alpha, \beta, \gamma > 0$ )  $W = \frac{g^* l^2}{\hbar^2 c^2} (\varepsilon^2 \alpha^{1/2} \beta^{1/2} \gamma) \cong \varepsilon$ , т. е.

$$\varepsilon > \frac{\hbar^2 c^2}{g^* l^2} = \frac{\hbar c}{\Lambda_0^2 l^2} = \varepsilon_{\text{кр}}. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь пакет нейтрино (в системе центра тяжести электрона и нейтрино) с характерной длиной волны  $\lambda$  и с поперечными размерами  $a > \lambda$ , падающий на электрон. Плотность энергии  $\varepsilon$  в этом случае будет

$$\varepsilon = \frac{\hbar\omega}{\lambda a^2} = \frac{\hbar c}{\lambda^2 a^2}. \quad (9)$$

Далее  $l \cong \lambda$ . Условие (8) теперь дает  $a^2 < \Lambda_0^2$ , так как  $a > \lambda$ , то сильное взаимодействие электрона и нейтрино наступает при

$$\lambda < \Lambda_0. \quad (10)$$

Прямой расчет показывает, что сечение для рассмотренного процесса  $\nu + e \rightarrow \mu + \nu'$  по порядку величины равно

$$\sigma \cong \Lambda_0^2 \frac{\Lambda_0^2}{\lambda^2} \quad (11)$$

и, как видно, становится больше  $\pi\lambda^2$  при  $\lambda < \Lambda_0$ . В этой связи следует ожидать, что при длинах волн порядка  $\Lambda_0$  могут наступить и другие эффекты, которые существенно изменят электромагнитное взаимодействие электронов. Именно при малых расстояниях между электронами возникнет взаимодействие, которое приведет к взаимному рассеянию электронов посредством такого процесса: сперва один из электронов излучает пару нейтрино (или нейтрино и антинейтрино) и превращается в  $\mu$ -мезон. Второй электрон поглощает эти нейтрино и также превращается в другой  $\mu$ -мезон. Затем этот мезон излучает нейтрино, которые поглощаются первым мезоном. В результате возникают два рассеянных электрона.

Эти же процессы приводят к размазыванию электронного заряда, т. е. к возникновению «форм-фактора» электрона. Этот «форм-фактор» будет существенно менять эффект Комптона на электроны при больших энергиях фо-

тонов и электромагнитное взаимодействие электронов. Происхождение такого размазывания легко видеть из того обстоятельства, что, кроме непосредственного поглощения и излучения реальных или виртуальных фотонов электроном, возможно еще поглощение и излучение их  $\mu$ -мезоном, возникающим при временной диссоциации электрона на  $\mu$ -мезон и пару нейтрино.

Положение дел аналогично возникновению  $\pi$ -мезонного облачка вокруг нуклонов. Аналогия эта, однако, неполная, так как в случае  $\pi$ -мезонного облачка его масштабы определяются комптоновской длиной  $\pi$ -мезона, а в случае электрона существенной оказывается длина  $\Lambda_0$ , а не комптоновская длина  $\mu$ -мезона.

Указанные здесь эффекты опять-таки существенны при длинах волн реальных или виртуальных фотонов, близких к  $\Lambda_0$ .

В заключение одно замечание о роли слабых взаимодействий типа  $p \rightleftharpoons n + e^+ + \nu$  при столкновении нуклонов. Как было отмечено в моей статье, это взаимодействие ни при каких энергиях нуклонов не становится сильным.

При этом было предположено, что энергия нуклонов в системе центра тяжести распределена в объеме эллипсоида  $V \cong l_0^3 \sqrt{Mc^2/E}$ , где  $l_0$  — комптоновская длина  $\mu$ -мезонов ( $\hbar/\mu c$ ) или, может быть, нуклонов ( $\hbar/Mc$ );  $E$  — энергия нуклона в лабораторной системе координат.

Если же считать, что энергия нуклона может быть сосредоточена в как угодно малой области, то при длинах волн нуклона  $\lambda < \Lambda_0$  (в системе центра тяжести) слабое взаимодействие станет существенным.

Это можно показать рассуждениями, сходными с приведенными выше для нейтрино и электрона. Это же видно и непосредственно из теории парных  $\beta$ -сил Тамма-Иваненко [3].

Выражение для потенциала этих сил гласит

$$V = \frac{1}{(2\pi)^3} \left( \frac{\Lambda_0}{R} \right)^5 \frac{\hbar c}{\Lambda_0}, \quad (12)$$

где  $R$  — расстояние между нуклонами. При  $R < \Lambda_0$   $V = \hbar c/\Lambda_0 \gg Mc^2$ . При этом нуклон предполагается точечным. Таким образом, оценка значения слабых взаимодействий при столкновении нуклонов существенно зависит от достоверности предположения о том, что собственная энергия покоящегося нуклона распределена в объеме не меньшем  $(\hbar/Mc)^3$ . Теория генерации мезонов при столкновении энергичных нуклонов подтверждает это последнее предположение [4].

### Список литературы

1. Блохинцев Д. И. // УФН. 1957. Т. 61. С. 137. — Статья № 84 наст. изд. — *Прим. ред.*
2. Шапиро И. С. // УФН. 1957. Т. 61. С. 313.
3. Тамм И. Е., Иваненко Д. Д. // Nature. 1934. V. 133. P. 981.
4. Беленький С. З., Ландау Л. Д. // УФН. 1955. Т. 56. С. 309.

## О ВОЗМОЖНОМ ПРЕДЕЛЕ ПРИМЕНИМОСТИ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ\*

Рассматриваются процессы, конкурирующие с электромагнитными при больших энергиях. Показано, что такими процессами могут быть процессы, связанные с четырехфермионными взаимодействиями.

### Введение

В работе [1] было показано, что применение современного метода перенормировки в квантовой электродинамике ведет к принципиальной трудности — к обращению в нуль перенормированного заряда. Хотя безусловная доказательность этого вывода и оспаривалась [2], тем не менее наличие принципиальных затруднений в области энергий  $E$ , определяемых условием  $\alpha \ln(E/mc^2) \sim 1$  ( $\alpha = e^2/\hbar c$ ), представляется весьма убедительным. Соответствующий этой энергии пространственный масштаб  $l \sim (\hbar/mc)e^{-3\pi/\alpha}$  лежит далеко за пределами гравитационного радиуса электрона, как на это впервые было указано в [3]. Сама предельная энергия чудовищно велика ( $E_0 \sim mc^2 e^{3\pi/\alpha}$ ).

Поэтому можно ожидать, что на самом деле границы применимости современной электродинамики обнаружатся гораздо ранее, например, из-за возможного изменения пространственно-временной структуры в областях пространства-времени малых, но все же значительно больших  $l$ .

Однако есть другая, более доступная теоретическому анализу, возможность ограничения значимости квантовой электродинамики.

Наряду с чисто электродинамическими взаимодействиями фотонов, электронов и позитронов имеют место процессы с участием мезонов и нуклонов. Эти процессы могут быть вызваны чисто электродинамическим путем, например взаимодействием фотона с электроном.

Если бы оказалось, что вклад этих неэлектромагнитных процессов превосходит вклад электромагнитных, то отпала бы возможность рассматривать чистую электродинамику без существенного привлечения других типов взаимодействий. В частности, начиная с некоторой энергии  $E_{кр}$ , стало бы бессмысленно разложение по степеням  $e^2/\hbar c$ .

Мы покажем, что таким конкурирующим взаимодействием может быть слабое, четырехфермионное взаимодействие Ферми. Состоятельность этого взаимодействия в области больших энергий не проверена экспериментально

и могут быть высказаны различные теоретические сомнения по поводу применимости этого взаимодействия для энергий  $E \gg mc^2$ . Однако мы будем исходить из предположения о применимости этого взаимодействия вплоть до очень высоких энергий и рассмотрим выводы, вытекающие из этого предположения.

Физическая особенность чисто фермионных взаимодействий заключается в том, что матричные элементы этих взаимодействий не падают с ростом энергии участвующих в процессе фермионов, в то время как матричные элементы процессов, происходящих при участии бозонов (фотонов,  $\pi$ - и  $K$ -мезонов), с ростом энергии бозонов уменьшаются. Объясняется это тем, что при возрастании энергии бозона бозонное поле падает как  $k^{-1/2}$ :

$$\Phi_k = \sqrt{\hbar/2k} e^{ikx} b_k + \text{сопряж.};$$

(здесь  $k$  — импульс бозона,  $b_k$  — оператор рождения бозона), а фермионное поле при возрастании энергии фермиона остается постоянным:

$$\psi_k \sim u_k e^{ikx} a_k + \text{сопряж.},$$

где  $u_k$  — спинорная амплитуда,  $a_k$  — оператор рождения фермиона.

В дальнейшем мы покажем, что из-за этой особенности фермионных взаимодействий они становятся существенными в электромагнитных процессах значительно раньше, нежели достигается логарифмический предел  $E \sim mc^2 e^{3\pi/\alpha}$ .

## 1. Фермионно-электромагнитное взаимодействие

Рассмотрим процесс взаимодействия фотона ( $k$ ) с электроном ( $e$ ), приводящий к образованию  $\mu$ -мезона ( $\mu$ ) и двух нейтрино ( $\nu, \bar{\nu}$ ):

$$k + e \rightarrow \mu + \nu + \bar{\nu}. \quad (1)$$

Такой процесс будет описываться лагранжианом взаимодействия  $W$ :

$$W = eW_e + eW_\mu + gW_{\mu e \nu}, \quad (2)$$

где  $eW_e = (J_e A)$  — взаимодействие электрона ( $J_e$  — электронный ток) с электромагнитным полем ( $A$  — вектор-потенциал),  $eW_\mu$  имеет тот же смысл для  $\mu$ -мезона. Наконец,  $gW_{\mu e \nu}$  — четырехфермионное взаимодействие электрона,  $\mu$ -мезона и нейтрино;  $g = \hbar c \Lambda_0^2 \approx 10^{-49}$  эрг·см<sup>3</sup> есть константа Ферми ( $\Lambda_0 = 6 \cdot 10^{-17}$  см), а

$$W_{\mu e \nu} = (\bar{\psi}_e O_1 \psi_\nu)(\bar{\psi}_\nu O_2 \psi_\mu) + \text{сопряж.}$$

Здесь  $\psi_e, \psi_\mu, \psi_\nu$  — спинорные поля соответственно электронов,  $\mu$ -мезона и нейтрино,  $O_1$  и  $O_2$  — некоторые спинорные операторы.

Полное эффективное сечение для процесса (1) будет

$$\sigma_\mu = \frac{2\pi}{\hbar c} \int |W_{af}|^2 \frac{p_\nu^2 dp_\nu \tilde{p}_\nu^2 dp'_\nu d\Omega'_\nu}{(2\pi\hbar)^6 dE_f}, \quad (3)$$

где  $W_{af}$  — матричный элемент энергии взаимодействия (2) для процесса (1),  $p_\nu$ ,  $\tilde{p}_\nu$  — импульсы нейтрино и антинейтрино,  $E_f$  — энергия конечного состояния. Структура этого матричного элемента такова, что в первом неисчезающем приближении он равен

$$W_{af} = eg \sum_c \left[ \frac{(a|W_e|c)(c|W_{e\mu\nu}|f)}{E_0 - E_c} + \frac{(a|W_{e\mu\nu}|c)(c|W_\mu|f)}{E_0 - E_c} \right], \quad (4)$$

где  $E_0$  — энергия начального состояния, а  $E_c$  — промежуточного. В системе центра тяжести фотона и электрона  $E_0 - E_c \sim \hbar ck$  ( $k$  — волновой вектор фотона);  $(a|W_e|c) \sim k^{-1/2}$ ,  $(c|W_\mu|f) \sim k^{-1/2}$ . Поэтому  $|W_{af}|^2 \sim e^2 g^2 k^{-3}$ . Весовой же фактор в (3) пропорционален  $k^5$ . Таким образом для полного сечения имеем

$$\sigma_\mu \approx \alpha \Lambda_0^4 k^2 F, \quad (5)$$

где  $F$  — множитель порядка 1, слабо зависящий от  $k^2$ .<sup>1</sup>

Подобным же образом можно рассмотреть процесс столкновения двух электронов с одновременным превращением в два  $\mu$ -мезона, по схеме

$$e' + e'' \rightarrow \mu' + \mu''. \quad (1')$$

Дифференциальное сечение (в с. ц. м.) для этого процесса можно оценить так:

$$d\sigma_{\mu\mu} \cong \Lambda_0^8 q^4 p^2 F d\Omega, \quad (6)$$

где  $q$  — переданный импульс, а  $p$  — первоначальный импульс электрона, измеренные в обратных длинах.

С другой стороны, сечения чисто электромагнитных процессов равны ( $\alpha = e^2/\hbar c$ ):

$$\sigma_c = \frac{\pi\alpha^2}{2k^2} \left( \ln \frac{4k^2}{k_c^2} + \frac{1}{2} \right) \quad (7)$$

для эффекта Комптона,

$$d\sigma_{ee} = \alpha^2 (p^2/p^4) d\Omega \quad (8)$$

для упругого столкновения электронов,

$$\sigma_p = \frac{28}{9} \frac{\alpha^3}{k_c^2} \left( \ln \frac{4k^2}{k_c^2} - \frac{7}{2} \right) \quad (9)$$

<sup>1</sup> Эти качественные заключения подтверждаются более подробным расчетом, выполненным доктором М. Мейер (Румыния), которому автор приносит благодарность.

для рождения пар (здесь  $k_c = mc/\hbar$ ), и

$$\sigma_\gamma = \frac{4\alpha^3}{k_c^2} \left| \ln \frac{4k^2}{k_c^2} - \frac{7}{2} \right| \quad (10)$$

для тормозного излучения при столкновении электронов. Сравнение этих сечений с сечениями смешанных процессов (1) и (1') показывает, что

$$\sigma_\mu > \sigma_c \quad \text{при} \quad k \gtrsim \alpha^{1/4}/\Lambda_0; \quad (11)$$

$$\sigma_\mu > \sigma_p \quad \text{при} \quad k \gtrsim \alpha^{1/2}(\alpha/\Lambda_0 k_c)/\Lambda_0; \quad (12)$$

$$d\sigma_{\mu\mu} > d\sigma_{ee} \quad \text{при} \quad q \gtrsim \alpha^{1/4}/\Lambda_0; \quad (13)$$

$$\sigma_{\mu\mu} > \sigma_\gamma \quad \text{при} \quad q \sim p \geq (\alpha^3/k^2\Lambda_0^2)/\Lambda_0. \quad (14)$$

Как видно из этих неравенств, если четырехфермионные взаимодействия можно считать применимыми в области энергий  $k > 1/\Lambda_0$ , то процессы с образованием нейтрино и  $\mu$ -мезонов более интенсивны, нежели чисто электромагнитные процессы. Соответствующая энергия фотонов или электронов в системе центра тяжести должна быть при этом больше  $\hbar c/\Lambda_0 \sim 2$  ГэВ. Это — огромная энергия, но она все же много меньше логарифмической.

Следует отметить, что образование пар нуклонов и мезонов будет играть заметно меньшую роль, так как их сечение образования будет в  $(m/M)^2$  раз меньше сечения образования электронно-позитронных пар.

Процессы с образованием нейтрино и бозонных мезонов будут существенны также позднее из-за отмеченного выше различия в поведении матричных элементов бозонов и фермионов.

Таким образом, фермионное взаимодействие может быть тем взаимодействием, которое ограничивает область применимости электродинамики масштабами, большими  $\Lambda_0$ . Для меньших масштабов и, следовательно, для энергий, больших  $\hbar c/\Lambda_0$ , совсем нет смысла изучать электродинамику, не привлекая к рассмотрению процессы с  $\mu$ -мезонами и нейтрино и константу Ферми  $g$ , наряду с  $e^2/\hbar c$ .

### Список литературы

1. Ландау Л. Д., Абрикосов А. А., Халатников И. М. // ДАН СССР. 1954. Т. 95. С. 1177.
2. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантовых полей. М.: ГТТИ, 1957. С. 355–356.
3. Марков М. А. // ЖЭТФ. 1947. Т. 17. С. 661.

## ЗАМЕЧАНИЕ К ОПТИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ\*

Часто приходится встречаться со случаем, когда исходное состояние первичного пучка и мишени состоит из совокупности некогерентных состояний («смешанное состояние»). Например, состояние мишени или частиц пучка может быть смесью различных состояний по обычному или изотопическому спину, по странности частиц и т. п.

В этом случае первичный пучок  $J$  является суммой пучков  $J_s$  ( $s = 1, 2, \dots, n$ ), относящихся к различным состояниям частиц пучка или мишени. Относительная доля каждого из таких состояний есть  $P_s = J_s/J$ . Для каждого частного состояния имеет место оптическая теорема

$$\text{Im } f_s(0) = (k_s/4\pi)\sigma_{s,\text{tot}}, \quad (1)$$

где, как обычно,  $f_s(0)$  — амплитуда рассеяния под углом 0,  $\sigma_{s,\text{tot}}$  — полное сечение для  $s$ -го пучка,  $k_s$  — волновой вектор для частиц  $s$ -го пучка.

Заметим, что даже если в пучке все  $k_s$  одинаковы, то относительные импульсы  $k_s^0$  частицы и мишени могут быть все же различны. Например, это будет в том случае, если учитывается движение нуклонов в ядре мишени и каждому импульсу нуклона в ядре приписывается некоторая вероятность. Полное число переходов в некоторое конечное состояние  $r$  будет  $dN(r) = \sum J_s d\sigma_s(r)$ , где  $d\sigma_s(r)$  — сечение для перехода  $s \rightarrow r$ . Следовательно, полное сечение процессов  $s \rightarrow r$  будет

$$d\sigma(r) = dN(r)/J = \sum_s P_s d\sigma_s(r).$$

В частности, упругое дифференциальное сечение под углом 0 определяется формулой

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega}\right)_0 &= \sum_{s=1}^n P_s \left(\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega}\right)_0 = \sum_{s=1}^n P_s \{[\text{Im } f_s(0)]^2 + [\text{Re } f_s(0)]^2\} = \\ &= \sum_{s=1}^n P_s \left\{ \left(\frac{k_s}{4\pi}\sigma_{s,\text{tot}}\right)^2 + [\text{Re } f_s(0)]^2 \right\}, \end{aligned}$$



или

$$\left(\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega}\right)_0 = \overline{\left(\frac{k_s}{4\pi}\sigma_{s,\text{tot}}\right)^2} + [\text{Re } f_s(0)]^2, \quad (2)$$

где черта означает усреднение по некогерентным состояниям  $s = 1, 2, \dots, n$ . Полное же сечение всех процессов равно

$$\sigma_{\text{tot}} = \overline{\sigma_{s,\text{tot}}}. \quad (3)$$

Равенство (2) и есть наиболее общее выражение оптической теоремы. В частности, если все  $k_s$  равны между собой, то, пользуясь (3) и общим соотношением  $(\overline{\sigma})^2 \leq \overline{\sigma^2}$ , получим

$$\left(\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega}\right)_0 \geq \left(\frac{k_s}{4\pi}\sigma_{\text{tot}}\right)^2 + \overline{[\text{Re } f_s(0)]^2}. \quad (4)$$

Отсюда видно, что даже если  $\text{Re } f_s(0) = 0$ , все же  $(d\sigma_{el}/d\Omega)_0$  может быть больше  $(k\sigma_{\text{tot}}/4\pi)^2$ . Эти соображения могут быть полезны при анализе столкновений как в области высоких энергий, так и в «классической» ядерной физике.

Объединенный институт  
ядерных исследований

Поступила  
27 июня 1960 г.

## НОВЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ПОЛЯ\*

### 1. Введение

Как многие физики во всем мире, я думаю, что хорошо известные трудности в квантовой теории поля будут преодолены только путем радикальных изменений самой сущности современной теории. Понятие элементарной частицы, которое тесно связано с идеей квантования линейного осциллятора и теорией возмущений, представляется очень сомнительным для малых расстояний и сильных взаимодействий [1, 2].

Поэтому методы, в которых не используется теория возмущений, чрезвычайно интересны. Одним из них является теория дисперсионных соотношений. Другое направление было намечено с помощью техники функционального усреднения в работах Фейнмана [3], Эдвардса и Пайерлса [4], Боголюбова [5], Гельфанда [6] и других авторов. Однако это направление исследований сталкивается с существенными математическими трудностями при решении «классических» уравнений для взаимодействующих полей и при их функциональном интегрировании. За исключением работы Эдвардса и Пайерлса [4], которые нашли этим методом решение в модели скалярных мезонов, взаимодействующих с фиксированным нуклоном, других достижений получено не было.

В этом докладе я хотел бы рассказать о некоторых новых результатах, полученных в моей группе при развитии функциональных методов.

### 2. Развитие функционального метода для мезодинамики с фиксированным источником

Я хотел бы прежде всего рассказать об исследовании моих сотрудников Б. М. Барбашова и Г. В. Ефимова [7], которые предложили новый метод решения уравнений мезодинамики для моделей с фиксированным источником. Эффективной идеей для нас явилось использование *матричных методов для решения линейных дифференциальных уравнений*, развитых в 1934–1936 годах хорошо известным ленинградским математиком И. А. Лаппо-Данилев-

---

\* Proc. of the 10th Intern. Conf. on High Energy Physics, Rochester, Aug. 25–Sept. 1, 1960 /Eds.: E. C. G. Sudarshan et al. Rochester, UK, 1960. P. 867–871.

ским [8]. Это позволило выполнить функциональные интегрирования, не прибегая к разложению по константе взаимодействия. Новый формализм эквивалентен теории возмущения, использующей в качестве невозмущенного гамильтониан, описывающий систему нейтральных мезонов и покоящийся нуклон (или какую либо другую линейную скалярную комбинацию мезонных полей).

Существенным преимуществом нового метода по сравнению с теорией возмущений является возможность явно выписать выражение для  $n$ -го порядка рассматриваемого приближения. Это обстоятельство позволяет нам исследовать сходимость всего ряда. Для простоты я проиллюстрирую этот метод на примере простой модели локального мезонного поля, предложенной Биляницким-Бируля [9]. Далее я остановлюсь на других более общих моделях, для которых этим методом были получены решения.

Гамильтониан в модели Биляницкого-Бируля имеет вид

$$H = m_0 + \frac{1}{2} \int d^3x : [\pi^2(x) + (\nabla\phi(x))^2 + \mu^2 \phi^2(x)] : + \\ + g \tau_1 \int d^3x \delta(x) \phi(x) + \tau_3 \Delta m_0. \quad (1)$$

Этот гамильтониан описывает нуклон, имеющий две степени свободы, которые отличаются по массе. При испускании или поглощении мезона нуклон в этой модели изменяет свою массу.

Как известно из метода функционального интегрирования,  $S$ -матрица для гамильтониана (1) в представлении взаимодействия может быть записана так:

$$S(t, t_0) = \int \delta\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t d\xi d\eta \phi(\xi) \Delta(\xi - \eta) \phi(\eta) \right\} \times \\ \times : \exp \left\{ i \int_{t_0}^t ds \widehat{\varphi}(s) \phi(s) \right\} : C \int \delta\Lambda \exp \left\{ -i \int_{t_0}^t ds \Lambda(s) \phi(s) \right\} \widetilde{S}(t, t_0 | \Lambda), \quad (2)$$

где функциональное интегрирование ведется по пространству действительных скалярных функций  $\phi$  и  $\Lambda$ . Используется обозначения:

$$\widehat{\varphi}(t) = \sum_K \frac{1}{2\omega_K} (a_K e^{-i\omega t} + a_K^+ e^{i\omega t}),$$

$C$  — нормировочная константа,  $\Delta(s_1 - s_2)$  — причинная функция бозонного поля

$$\Delta(\xi - \eta) = \frac{1}{i} \langle 0 | T \widehat{\varphi}(\xi) \widehat{\varphi}(\eta) | 0 \rangle, \quad (3)$$

а  $\widetilde{S}(t, t_0 | \Lambda)$  —  $S$ -матрица для нуклона, взаимодействующего с классическим бозонным полем  $\Lambda$ , удовлетворяющая уравнению

$$i \frac{d\widetilde{S}}{dt}(t, t_0 | \Lambda) = [g\tau_1 \Lambda(t) + \tau_3 \Delta m_0] \widetilde{S}(t, t_0 | \Lambda), \quad \widetilde{S}(t_0, t_0 | \Lambda) = 1. \quad (4)$$

Нахождение решения уравнения (4) сопряжено с большими трудностями, так как эта задача сводится к решению линейного дифференциального уравнения второго порядка с произвольной функцией  $\Lambda(t)$ . Лаппо-Данилевский развил метод решения системы дифференциальных уравнений, который использует теорию функций от матриц. В этом подходе параметром разложения является не константа  $g$ , а некоторые инварианты матриц, входящих в уравнение. Опуская сложные вычисления, приведем сразу решение

$$\begin{aligned} \tilde{S}(t, t_0|\Lambda) = \\ = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-i\tau_3 \Delta m_0)^q}{q!} \int_{t_0}^t d\xi_1 \int_{t_0}^t d\xi_2 \dots \int_{t_0}^t d\xi_q \exp \left\{ -ig\tau_1 \int_{t_0}^t ds \prod_{j=1}^q \varepsilon(\xi_j - s) \Lambda(s) \right\}, \quad (5) \\ \varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

В формуле (5) константа взаимодействия  $g$  входит только в показатель экспоненты и параметром разложения является величина  $\tau_3 \Delta m_0$ . Важно, что произвольное поле  $\Lambda(t)$  присутствует только в показателе экспоненты. (В более общем случае могли бы появиться произведения некоторой степени поля  $\Lambda$  на экспоненту от  $\Lambda$ .) В результате функциональное интегрирование в формуле (2) легко выполняется, так как интегралы имеют гауссовский вид. Далее, легко видеть, что этот ряд абсолютно сходится, так как он ограничен величиной

$$\tilde{S}(t, t_0|\Lambda) \leq (1 + \tau_1) \exp(\Delta m_0 t).$$

Окончательно  $S$ -матрица принимает вид

$$\begin{aligned} S(t, t_0) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-i\tau_3 \Delta m_0)^q}{q!} \int_{t_0}^t d\xi_1 \dots \int_{t_0}^t d\xi_q : \exp \left\{ -ig\tau_1 \int_{t_0}^t ds \prod_{j=1}^q \varepsilon(\xi_j - s) \varphi(s) \right\} : \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{i}{2} g^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t ds_1 ds_2 \prod_{j=1}^q \varepsilon(s_1 - \xi_j) \Delta(s_1 - s_2) \varepsilon(s_2 - s_j) \right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

Прямой подстановкой можно убедиться в том, что  $S$ -матрица удовлетворяет уравнению

$$i \frac{dS}{dt}(t, t_0) = H_{\text{int}}(t) S(t, t_0).$$

Таким образом, функциональное интегрирование в данном случае приводит к корректному результату, хотя сама эта процедура и необоснована строго математически.

Далее, с помощью адиабатической гипотезы могут быть получены собственные значения гамильтониана (1)

$$E_N = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\langle \phi_N, H S^\alpha(0, \pm\infty) \phi_N \rangle}{\langle \phi_N, S^\alpha(0, \pm\infty) \phi_N \rangle}, \quad (7)$$

где  $S^\alpha$  — решение «адиабатического» уравнения

$$i \frac{dS^\alpha}{dt} = H_{\text{int}}(t) e^{-\alpha|t|} S^\alpha,$$

а функции  $\phi_N$  являются собственными функциями свободного гамильтониана. Предельный переход  $\alpha \rightarrow 0$  позволяет корректно определить отношение в уравнении (7), в то время как по отдельности числитель и знаменатель не определены из-за множителя  $\exp(i \text{const}/\alpha)$ .

Энергия однопионного состояния определяется формулой

$$E_N = m_0 - \frac{1}{2} \frac{g^2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\omega^2} + (\tau_3 \Delta m) \sum_{q=0}^\infty (-\tau_3 \Delta m)^q \int_0^\infty dx_1 \dots \int_0^\infty dx_q x_1 \dots x_q \times \\ \times \frac{\partial^q}{\partial x_1 \dots \partial x_q} \exp \left\{ \frac{g^2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\omega^2} \sum_{l=1}^q \sum_{m=1}^l (-1)^{l+m} \exp \left( -\omega \sum_{j=1}^l x_j \right) \right\}, \quad (8)$$

где

$$\Delta m = \Delta m_0 \exp \left\{ -\frac{g^2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\omega^3} \right\}. \quad (9)$$

Перенормировка массы требует, чтобы величины

$$m_0 = \frac{1}{2} \frac{g^2}{\pi^2} \int \frac{k^2 dk}{\omega^2}$$

и  $\Delta m$  в уравнении (9) были конечными. Обычная перенормировка константы взаимодействия приводит к выражению

$$\frac{g_r}{g} = 1 + \sum_{q=1}^\infty (\Delta m)^q \int_0^\infty dx_1 \dots \int_0^\infty dx_{2q-1} x_1 x_2' \dots x_{2q-1} \sum_{k=1}^q x_{2k-1} \frac{\partial^{2q-1}}{\partial x_1 \dots \partial x_{2q-1}} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{g^2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\omega^3} \sum_{l=1}^{2q-1} \sum_{m=1}^l (-1)^{l+m} \exp \left( -\omega \sum_{j=1}^l x_j \right) \right\}. \quad (10)$$

Интересно отметить, что это выражение не содержит ультрафиолетовых расходимостей в любом приближении. Функция Грина нуклона записывается так:

$$G(t) = g_0(t) \sum_{q=0}^\infty \frac{(-i\tau_3 \Delta m)^q}{q!} \int_0^t d\xi_1 \dots \int_0^t d\xi_q \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{i}{2} g^2 \int_0^t \int_0^t ds_1 ds_2 \prod_{i=1}^q \varepsilon(\xi_i - s_1) \Delta(s_1 - s_2) \varepsilon(\xi_i - s_2) \right\}, \quad (11)$$

где

$$G_0(t) = \theta(t) \exp(-im_0 t).$$

Аналогичные ряды получаются также для других матричных элементов.

Важно, что все члены ряда по степеням  $\Delta m$  конечны при условии  $(g/\pi)^2 < 1$ . Далее было показано, что ряд (11) абсолютно сходится, если  $(g/\pi)^2 < 1$ . Сейчас доказываем сходимость рядов (8) и (9). Таким образом, оказалось возможным выполнить необходимые перенормировки без обращения к теории возмущений. Тем же самым методом Б. М. Барбашов и Г. В. Ефимов изучили другие, более сложные модели:

- (а)  $H_{\text{int}} = g(\tau_1 \phi_1 + \tau_2 \phi_2)$  (заряженные мезоны);
- (б)  $H_{\text{int}} = g(\tau_1 \phi_1 + \tau_2 \phi_2 + \tau_3 \phi_3)$  (симметричная теория);
- (в)  $H_{\text{int}} = g\sigma \cdot \nabla(\tau_1 \phi_1 + \tau_2 \phi_2 + \tau_3 \phi_3)$  (модель Чью).

В моделях (а) и (б) было показано, что перенормированная константа взаимодействия не содержит логарифмических расходимостей, по крайней мере в первом порядке рассматриваемого приближения, а точка  $g = 0$  вероятно является особой. Случай (в) еще достаточно не изучен.

В ближайшем будущем мы планируем более детально исследовать сходимость рядов для наиболее важных величин с целью исследовать самосогласованность локальных теорий. Мы также собираемся использовать развитую технику расчета явлений, происходящих на периферии нуклона (для импульсов  $p < Mc$ , где  $M$  — масса нуклона).

### 3. Качественный анализ функциональных уравнений

Другим направлением исследований в нашей группе является анализ функциональных уравнений. Известно, что в задачах с конечным числом степеней свободы оказывается чрезвычайно полезным качественный анализ уравнения Шредингера (поведение решений в точках ноль и бесконечность, наличие особенностей у функций и симметрий). Во многих случаях, не решая уравнений, можно сказать, имеет ли смысл предложенный анализ, или исследовать пределы его применимости. Имеет смысл применить аналогичный подход также и к функциональным уравнениям. Эта идея была предложена автором [1, 2]. Недавно удалось достичь некоторого прогресса в этом направлении, и я проиллюстрирую эту идею двумя простыми примерами.

Рассмотрим два действительных скалярных поля  $\phi$  и  $\psi$ , и предположим, что энергия их взаимодействия билинейна

$$W = g \int \phi(x)\psi(x)d^3x. \quad (12)$$

Разложим эти поля по гармоникам

$$\phi(x) = \sum_k \zeta_k e^{ikx} + \text{э. с.}, \quad (13)$$

$$\psi(x) = \sum_k \eta_k e^{ikx} + \text{э. с.} \quad (13')$$

и введем действительные импульсы и координаты

$$\zeta_k = \frac{1}{2} \left( Q_k - \frac{P_k}{i\omega_k} \right), \quad \eta_k = \frac{1}{2} \left( q_k - \frac{p_k}{i\nu_k} \right), \quad (14)$$

где

$$\omega_k = \sqrt{k^2 + a^2}, \quad \nu_k = \sqrt{k^2 + b^2}.$$

Через  $a$  и  $b$  обозначены массы полей  $\phi$  и  $\psi$ .

С помощью этих переменных гамильтониан взаимодействующих полей записывается так:

$$\frac{1}{2} \sum (P_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2) + \frac{1}{2} \sum (p_k^2 + \nu_k^2 q_k^2) + \frac{g}{2} \left[ Q_k(q_k + q_{-k}) + \frac{P_k(p_k - p_{-k})}{\omega_k \nu_k} \right]. \quad (15)$$

Рассмотрим теперь область малых значений импульсов  $P_k$ ,  $p_k$  и больших координат  $Q_k$ ,  $q_k$  (которая не противоречит соотношению неопределенностей). Удобно ввести переменные  $u_k = q_k + q_{-k}$  и  $v_k = q_k - q_{-k}$ . С их помощью энергия в уравнении (15) записывается так:

$$U(Q, q) = \frac{1}{2} \sum_k \left[ \omega_k^2 Q_k^2 + \frac{g}{2} Q_k \omega_k + \frac{1}{8} \nu_k^2 (u_k^2 + v_k^2) \right]. \quad (16)$$

Физически допустимая квадратичная форма должна быть положительно определенной.

Условие положительной определенности  $U$  приводит к требованию

$$g^2 \leq \omega_k^2 \nu_k^2. \quad (17)$$

В этом простом примере легко убедиться прямым расчетом, что при выполнении условия (17) масса одного из полей  $a$  или  $b$  должна быть мнимой.

В качестве второго примера мы рассмотрим «кубическое» взаимодействие тех же самых действительных скалярных полей  $\phi$  и  $\psi$ :

$$W = g \int \phi(x) \psi^2(x) d^3x. \quad (18)$$

С помощью переменных  $Q_k$  и  $q_k$  гамильтониан этой системы записывается так:

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \sum (P_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2) + \frac{1}{2} \sum (p_k^2 + \nu_k^2 q_k^2) - \\ & - 2g \sum \sum \left\{ Q_k q_k [q_{k+s} + q_{-k-s} + q_{k-s} + q_{s-k}] - \right. \\ & - \frac{P_k p_s}{\omega_k \nu_s} [q_{k+s} + q_{-k-s} - q_{k-s} - q_{s-k}] + \\ & + \frac{P_k q_s}{\omega_k} \left[ \frac{p_{k+s}}{\nu_{k+s}} - \frac{p_{-k-s}}{\nu_{k+s}} + \frac{p_{k-s}}{\nu_{k-s}} - \frac{p_{s-k}}{\nu_{k-s}} \right] + \\ & \left. + \frac{Q_k p_s}{\nu_s} \left[ \frac{p_{k+s}}{\nu_{k+s}} - \frac{p_{-k-s}}{\nu_{k+s}} - \frac{p_{k-s}}{\nu_{k-s}} + \frac{p_{s-k}}{\nu_{k-s}} \right] \right\}. \quad (19) \end{aligned}$$

Видно, что «опасной» является область, где  $k = \pm 2s$  и  $Q_s$  велико. Действительно, в этом случае опять возникают мнимые частоты для осцилляторов  $q_k$  из-за членов вида

$$\frac{1}{2} (\nu_k^2 - 4gQ_k) q_k^2 \quad (20)$$

при

$$Q_k > \frac{\nu_k^2}{4g}. \quad (21)$$

Таким образом, взаимодействие (18) не имеет смысла для больших амплитуд поля  $\phi$ .

Нам представляется важным обобщить эти простые примеры на более сложные случаи, в частности, на случай взаимодействий, содержащих спинорные поля, например так, как это предлагается в теории Гейзенберга.

В заключение я хотел бы подчеркнуть еще раз: необходимо работать без использования теории возмущений и без концепции частиц на малых расстояниях.

## Обсуждение

**Н. Н. Боголюбов:** В первой части доклада Блохинцева мы видели, что функциональный анализ дает очень элегантные формулы, которые связывают функции Грина частицы и функции Грина квантовой механики. Но во всех этих теориях, по-видимому, нельзя получить полные результаты, и если вы исходите из обычной теории возмущений, то вы и получите обычную теорию возмущений для гриновских функций после вычисления функциональных интегралов. Чтобы это избежать, можно пытаться, например, искать другой путь для вычисления классических функций Грина. Интересно, что здесь может быть использован метод Лаппо-Данилевского для решения дифференциальных уравнений.

## Список литературы

1. Блохинцев Д. И. // УФН. 1951. Т. 44. С. 104. — Статья 80 в наст. изд. — *Прим. ред.*
2. Блохинцев Д. И. // УФН. 1957. Т. 61. С. 137. — Статья 84 в наст. изд. — *Прим. ред.*
3. Feynman R. // Phys. Rev. 1951. V. 84. P. 108.
4. Edwards S., Peirls R. // Proc. Roy. Soc. 1954. V. A224. P. 24.
5. Боголюбов Н. Н. // ДАН СССР. 1954. Т. 99. С. 225.
6. Гельфанд И., Яглом А. // УФН. 1956. Т. 11. С. 77.
7. Барбашов Б. М., Ефимов Г. В. // ЖЭТФ. 1960. Т. 38. С. 198; ЖЭТФ. 1961. Т. 40. С. 848. Препринт ОИЯИ Д-498. Дубна, 1960.
8. Лаппо-Данилевский И. А. // Приложение функций от матриц к теории линейных уравнений. М.: Гостехиздат, 1957.
9. Bialynicki-Birula I. // Nucl. Phys. 1959. V. 12. P. 309.



## О ПРИЧИННОСТИ В СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ\*

Каузальность, обычно нами понимаемая, есть лишь малая частичка всемирной связи, но (материалистическое добавление) частичка не субъективной, а объективно реальной связи.

*В. И. Ленин. Соч. Т. 38. С. 150.*

### Введение

Несмотря на скромную оценку, данную В. И. Лениным каузальности, этот принцип имеет все же фундаментальное значение в науке как простейшая форма связи явлений.

Особенно велико значение принципа причинности для физики, причем не только в общеполитическом смысле; важнейшее значение имеет и та математическая форма, в которой выражается причинность. В современной физике математическая форма причинности основывается на двух физических идеях: идее однородного и изотропного пространства-времени Эйнштейна-Минковского и идее переноса взаимодействия физическими полями (электромагнитным полем, полем мезонным, нейтринным и т. п.).

Вместе с тем известно, что применение этих принципов к особо малым расстояниям и малым промежуткам времени приводит к физически нелепым выводам: энергия взаимодействия частиц на малых расстояниях и собственная энергия частиц оказываются бесконечно большими. Этот неудовлетворительный вывод возникает как в квантовой, так и в классической физике и, возможно, указывает на общее для обеих концепций происхождение трудностей<sup>1</sup>.

### Причинность в классической физике

В классической физике распространение слабого (линейного) сигнала из мировой точки  $\mathcal{P}_1(x_1t_1)$  в мировую точку  $\mathcal{P}_2(x_2t_2)$  определяется функцией Грина  $\mathcal{G}$ , которая есть функция разности координат точек  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$ :  $x = x_1 - x_2$ ,  $t = t_1 - t_2$ .

В этом выражается однородность пространства-времени. Требование изотропности пространства-времени приводит к тому, что функция Грина долж-

\* Ат. энергия. 1963. Т. 14. С. 105-109.

<sup>1</sup> Некоторые философские вопросы причинности и теории поля рассмотрены в работе [1].

на зависеть не просто от разностей  $x$  и  $t$ , но и от четырехмерного интервала  $s^2 = x^2 - t^2$ . Наконец, оказывается возможным ввести направление времени  $\varepsilon$  и направление по пространственному лучу  $\eta$ :  $\varepsilon = t/|t| = \pm 1$ ,  $\eta = 0$  для  $s^2 < 0$  и  $\eta = x/|x| = \pm 1$ ,  $\varepsilon = 0$  для  $s^2 > 0$ . Итак, функцию Грина можно написать в виде

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(s^2, \varepsilon, \eta). \quad (1)$$

Эта функция является инвариантом преобразования Лоренца. Теперь дополнительно накладываются требования причинности: 1) сигнал не может распространяться со скоростью, превышающей скорость света  $c$ ; 2) сигнал распространяется только из прошлого в будущее. Эти требования приводят к дальнейшей специализации функции  $\mathfrak{G}$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} &= \mathfrak{G}(s^2, +1, 0) \quad \text{для} \quad \varepsilon = +1, \quad \eta = 0; \\ \mathfrak{G} &= 0 \quad \text{иначе.} \end{aligned} \quad (2)$$

На рисунке показана область пространства-времени, где функция  $\mathfrak{G}$  отлична от нуля. Заметим, что фурье-компонента от  $\mathfrak{G}(s^2, +1, 0)$ , обозначенная нами через  $\mathfrak{G}(\omega, k)$ , зависит только от инварианта  $m^2 = \omega^2 - k^2$  ( $\mathfrak{G}(\omega, k) = F(\omega^2 - k^2)$ ) и отлична от нуля лишь при  $m^2 > 0$ . Для  $m^2 < 0$  мы получили бы функцию  $\mathfrak{G}(s^2, 0, \pm 1)$ , отличную от нуля в пространственно-подобной области, и, следовательно, приводящую к сигналам, распространяющимся со скоростью, большей скорости света.

Опыт показывает, что при больших  $x$  и  $t$  (асимптотически) волновое поле всегда допускает корпускулярное толкование, а это означает, что в бесконечности мы имеем набор волн с дискретными значениями величины<sup>1</sup>  $m^2 = m_1^2, m_2^2, \dots, m_s^2, \dots \geq 0$ .

Фурье-компонента  $F(\omega^2 - k^2)$  имеет полюса при  $\omega^2 = k^2 + m_s^2$ , а функция  $\mathfrak{G}(s^2, +1, 0)$  — особенности вида  $\delta(s^2)$ . В силу свойств интервала  $s^2$  эта особенность перенесется и в область малых  $x, t$  (лишь бы  $s^2 = 0$ ) и там приведет к нежелательным бесконечностям.

Таким образом, физически оправданные для больших  $x$  и  $t$  предположения об изотропности пространства и времени сами собой переносятся в область бесконечно малых  $x$  и  $t$ .

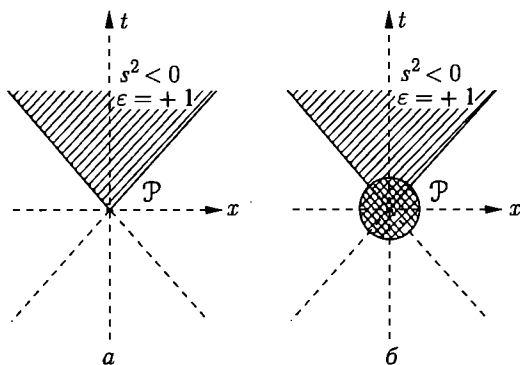
## Причинность в квантовой физике

Квантовая теория, как это ни странно, во всех основных чертах сохраняет классическую концепцию причинности. Именно, в квантовой теории распространение сигнала (или взаимодействия) также определяется функцией Грина  $D_c(s^2)$  (которая также называется причинной функцией). Эта функция связывает квантовый переход в окрестности точки  $P_1$ , с квантовым переходом в окрестности точки<sup>2</sup>  $P_2$ .

<sup>1</sup> В квантовой теории поля величина  $m$  определяет массу частицы, связанной с рассматриваемым полем.

<sup>2</sup> Принцип причинности в его обычной форме был использован Н. Н. Боголюбовым для нового представления современной теории поля [2].

В отличие от классической функции Грина эта функция не равна нулю и для  $s^2 > 0$ , однако лишь в масштабах  $\sim \hbar/mc$  (комптоновской длины волны частицы). Чтобы можно было зафиксировать факт испускания сигнала (кванта) с положительной энергией из окрестности точки  $\mathcal{P}_1$  и факт поглощения его в окрестности точки  $\mathcal{P}_2$ , эти «окрестности» должны быть достаточно большими. Именно в соответствии с соотношением неопределенности для кванта-сигнала с энергией  $E$  и импульсом  $p$  размеры окрестностей точек  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$  должны быть по времени  $T \gg \hbar/E$ , по пространству  $L \gg \hbar/p$ .



Область пространства-времени, где функция Грина отлична от нуля. На левом рисунке (а) заштрихована область пространства-времени, допустимая по обычной теории для распространения сигналов, исходящих из точки  $\mathcal{P}$ . На правом рисунке (б) двойной штриховкой показана область возможной аномальной причинности (например, эллиптический тип уравнения поля).

Далее эти окрестности не должны перекрываться (расстояние между ними  $|x| \gg L$  и промежуток времени  $|t| \gg T$ ). Как было показано Фирцем [3] для точечных частиц, при этих условиях свойства функции  $D_c(s^2)$  обеспечивают чисто классическую причинную связь между окрестностями точек  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$ , т. е. связь, эквивалентную той, которую дает функция Грина  $\mathfrak{G}(s^2, +1, 0)$ . В условиях, когда приведенные выше неравенства не выполнены, соотношения неопределенностей вообще не позволяют судить о характере причинной связи (что произошло позже, что раньше). Отличие от нуля причинной функции  $D_c(x)$  в пространственной области приводит к существованию пространственных формфакторов элементарных частиц  $F(q)$ , где  $q$  — передаваемый частице импульс.

В соответствии с таким формфактором частице можно приписать жесткое пространственное распределение зарядов и токов типа  $\rho(x) = \int F(q) e^{iqx} d^3q$ . Такое жесткое распределение допускает распространение сигнала от периферии частицы к ее центру с бесконечно большой скоростью.

Однако в работе [4] было показано, что и в этом случае соотношение неопределенностей не позволяет «уличить» частицу в распространении сигнала со скоростью, большей скорости света. Несмотря на отмеченное отличие причинной функции Грина  $D_c(s^2)$  от классической функции Грина  $\mathfrak{G}(s^2, +1, 0)$ , ситуация с особенностями в квантовой теории остается по

существо такой же, как и в классической теории; особенности функций распространения, естественные для больших  $x$  и  $t$ , неумолимо переносятся в области малых масштабов пространства и времени.

## Некоторые возможные обобщения причинной связи

Характер особенностей функций распространения указывает на необходимость отказаться от перенесения макроскопических законов распространения сигналов (взаимодействий) в область особо малых масштабов пространства-времени и попытаться видоизменить их. Сказанное выше о значении соотношения неопределенностей позволяет рассчитывать на возможность примирения обычной формы макропричинности с иными формами микропричинности в малых пространственно-временных областях. Рассмотрим теперь некоторые возможные обобщения теории.

*Нелинейная теория.* Функции Грина, обладающие описанными выше особенностями, связаны с распространением слабых полей, подчиняющихся линейным уравнениям.

Как впервые было отмечено Борном [5], сильные поля могут подчиняться другим, нелинейным уравнениям. В этом случае скорость распространения сигнала  $V$  зависит от силы и формы сигнала [6–8].

Действительно, характеристики нелинейного уравнения, вообще говоря, отличны от прямых  $dx/dt = \pm c$ , характерных для линейной теории. Поэтому скорость нелинейного сигнала  $V$  оказывается функцией напряженности поля  $\varphi$  и его производных  $\partial\varphi/\partial x$ ,  $\partial\varphi/\partial t$ :

$$\frac{dx}{dt} = \pm V \left( \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right). \quad (3)$$

Как было показано в работе [5], в некоторых вариантах нелинейной теории величина  $V$  может сделаться мнимой, а гиперболическое уравнение для поля превратиться в уравнение эллиптического типа. Вдали от источника и приемника сигнала (вдали от частиц) поле будет по-прежнему подчиняться линейному уравнению, а функция Грина будет иметь обычные особенности типа  $\delta(s^2)$ . Однако в окрестности частиц, где поля велики, характер особенностей будет изменяться. Например, в случае превращения уравнения в эллиптическое особенность функции Грина при  $x \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow 0$  будет иметь вид  $1/R^2$ , где  $R^2 = x^2 + t^2$ .

Это возможное изменение типа уравнения поля вблизи частиц напоминает ситуацию на крыле самолета, летящего со скоростью, близкой к скорости звука: как известно, там, где местная скорость потока, обтекающего крыло, превышает скорость звука, эллиптический тип уравнения превращается в гиперболический.

На рисунке показана область (б), где причинность может стать аномальной. Нарушение релятивистской инвариантности вблизи  $x = 0$ ,  $t = 0$  является только кажущимся и обусловлено точкой пространства-времени (где расположен источник поля), выделенной тем, что именно в ее окрестности нелинейное поле само формирует среду для своего распространения.

Возможность изменения типа уравнений для распространения поля в окрестности частиц, а вместе с этим и возможность изменения формы причинной связи является очень увлекательной. Однако никому еще не удалось найти квантовый аналог этой модели теории поля.

Остается также нерассмотренным вопрос об изменении определения длины отрезка и промежутка времени, которые могут повлечь за собой нелинейность в распространении сигнала. Определения Эйнштейна, безусловно, предполагают линейность сигнала.

*Изменение причинности для малых масштабов пространства-времени.* Мы видели, что в однородном пространстве-времени нельзя изменить закон причинной связи в малом, не изменяя его в большом. Возможный путь изменения подсказывается идеями нелинейности, освещенными выше. Отступление от обычных закономерностей распространения сигнала наступает не всюду, а лишь около источников и приемников сигнала, т. е. вблизи частиц, иными словами, там, где однородность пространства нарушена расположенной там частицей. Это указывает на возможность нарушения обычных законов распространения сигналов вблизи частиц [9, 10].

Математически эта возможность осуществляется благодаря появлению новых инвариантов, помимо  $s^2$ ,  $\epsilon$ ,  $\eta$ . Действительно, с частицей или с системой взаимодействующих частиц связан вектор полной энергии-импульса  $P = (E, \mathbf{p})$ , который коммутирует с относительными координатами и с другими внутренними динамическими переменными<sup>1</sup>. Помимо инварианта  $I_1 = s^2$  возникают новые инварианты, такие как  $I_2 = P^2 = -m^2$  (где  $m$  — масса покоя всей системы),  $I_3 = (P, s)$  и др. Это позволяет образовывать новые инвариантные комбинации, например,

$$R^2 = I_1 + \frac{I_3^2}{I_2}; \quad (4)$$

$$T^2 = \frac{I_3^2}{I_2}, \quad (4')$$

которые в системе центра масс переходят в  $r^2$  и  $t^2$  соответственно и в дальнейшем трансформируются согласно (4) и (4') [12].

В силу этого функция Грина, связанная с системой частиц, может быть записана в виде

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(I_1, I_2, I_3). \quad (5)$$

Наличие инвариантов  $I_2$  и  $I_3$  позволяет изменить поведение  $\mathfrak{G}$  вблизи  $r$ ,  $t = 0$ .

Рисунок может быть использован для иллюстрации поведения функции  $\mathfrak{G}$ , которая при  $R^2 < a^2$  имеет эллиптическую структуру, а при  $R^2 > a^2$  переходит в обычную функцию Грина с сингулярностями на конусе  $s^2 = 0$ .

Подобным же образом может быть изменена и причинная функция  $D_c(s^2)$ , если ее связывать не с вакуумом, а с частицами, помещенными в вакуум

<sup>1</sup> Это обстоятельство позволило Ю. М. Широкову правильно решить проблему релятивистского волчка [11].

и имеющими относительную координату  $x = x_1 - x_2$  и суммарный импульс  $p = p_1 + p_2$ :

$$D_c = D_c(I_1, I_2, I_3). \quad (6)$$

Полная схема подобного типа еще не разработана, и остается неясным, какой модели теории поля она соответствует. В частности не исследовано, будет ли соблюдаться унитарность матрицы рассеяния.

*Изменение метрики физического вакуума.* Другие возможности для изменения формы причинности могут быть связаны с идеей об изменении геометрии нашего пространства-времени для малых пространственно-временных областей.

Одна из этих возможностей заключается в флуктуациях метрического тензора  $g_{\mu\nu}$ , которые в принципе могут быть вызваны флуктуациями нулевой энергии вакуума. Такого рода флуктуации приведут к флуктуациям пространственно-временного интервала

$$s^2 = \int_{\mathcal{P}_1}^{\mathcal{P}_2} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu. \quad (7)$$

Следовательно, все функции, такие как  $\mathfrak{G}(s^2)$ ,  $D_c(s^2)$ , окажутся «размытыми» [13, 14]. Однако эти флуктуации, если исключить бесконечности, оказываются существенными в областях пространства-времени порядка  $L_0 = (\hbar\kappa/c^3)^{1/2} = 0,82 \cdot 10^{-32}$  см, где  $\kappa$  — гравитационная постоянная. Эти масштабы кажутся слишком малыми, чтобы играть существенную роль в мире частиц. Введение другого масштаба для флуктуации вакуума  $l_0$  означало бы введение новой физической гипотезы, следствия и внутренняя непротиворечивость которой еще далеко не исследованы.

*«Квантование» пространства-времени.* Старая идея «квантования» пространства-времени [15] воскресала несколько раз [16–18]. Современные тенденции в развитии этой идеи покоятся на предположении о неэвклидовом характере метрики в пространстве импульсов [19]. Именно интервал в пространстве импульсов  $p_1, p_2, p_3, p_4$  полагается равным

$$d\sigma^2 = a_{\mu\nu} dp_\mu dp_\nu. \quad (8)$$

Радиус кривизны этого метрического пространства играет роль предельного, обрезającego импульса  $P_0$ . Канонически сопряженные с этими импульсами координаты обычного пространства-времени  $x_1, x_2, x_3, x_4$  оказываются при этом операторами, некоммутирующими между собой:

$$[x_\mu, x_\nu] = i g_{\mu\nu}. \quad (9)$$

Теория строится таким образом, что для масштабов  $l \gg \hbar/P_0$  она переходит в обычную теорию. Ясно, что в этой теории концепция обычной причинности оказывается непригодной по крайней мере в областях пространства-времени  $\sim \hbar/P_0$ ). Действительно, нельзя говорить о распространении сигнала из

точки  $\mathcal{P}_1(x'_1x'_2x'_3x'_4)$  в точку  $\mathcal{P}_2(x''_1x''_2x''_3x''_4)$ , если сами координаты этих точек остаются неопределенными. В этой теории процесс распространения сигнала приобретает физический смысл лишь для достаточно больших  $|x_\mu|$ , когда можно пренебречь правой частью в выражении (9). Для меньших масштабов взаимосвязь явлений математически может быть описана, только посредством пространства импульсов. Теория квантованного пространства-времени не получила еще вполне последовательного развития.

## Заключение

Принятая в современной теории форма причинности вытекает из основных пространственно-временных представлений.

Она заимствована из макроскопической физики и в силу характера особенностей функций Грина автоматически переносится в бесконечно малые масштабы. Это приводит к появлению расходимостей (бесконечностей) для ряда важнейших физических величин, связанных с элементарными частицами.

Мы рассмотрели в этой работе некоторые предварительные теоретические схемы, которые, сохраняя макроскопическую причинность, существенно видоизменяют причинность для малых масштабов пространства-времени.

Мы не знаем, какая из этих схем ближе всего подводит нас к истине — мы еще играем с ней в жмурки.

## Список литературы

1. Блохинцев Д. И. // Философские вопросы современной физики: Сб. М.: Изд-во АН СССР, 1952. С. 358.
2. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей, § 17. М.: Гостехтеориздат, 1957.
3. Фирц М. // Новейшие развития квантовой электродинамики: Сб. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. С. 238.
4. Блохинцев Д. И. Препринт ОИЯИ. Дубна, 1962.
5. Борн М. // Квантовая теория излучения. М.: Изд-во иностр. лит., 1956.
6. Блохинцев Д. И. // ДАН СССР. 1952. Т. 82. С. 553. — Статья № 81 в наст. изд. — *Прим. ред.*
7. Blohincev D. I. // Nuovo Cim. Suppl. 1956. V. 3. P. 629.
8. Блохинцев Д. И., Орлов В. В. // ЖЭТФ. 1953. Т. 25. С. 513. — Статья № 82 в наст. изд. — *Прим. ред.*
9. Блохинцев Д. И. // Уч. зап. МГУ. Физика. 1945. Кн. 3, вып. 77. С. 201.
10. Блохинцев Д. И. // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 480. — Статья № 73 в наст. изд. — *Прим. ред.*
11. Широков Ю. М. // ЖЭТФ. 1952. Т. 22. С. 539.
12. Blohincev D. I., Barasenkov V., Grisin D. // Nuovo Cim. 1958. V. 9. P. 249.
13. Deser S. // Rev. Mod. Phys. 1957. V. 29. P. 417.
14. Blohincev D. I. // Nuovo Cim. 1960. V. 18. P. 193.
15. Ambarcumyan Y., Ivanenko Z. // Z. Phys. 1930. V. 64. P. 563.
16. Snyder H. // Phys. Rev. 1946. V. 71. P. 38.

17. Гольфанд Ю. А. // ЖЭТФ. 1959. Т. 37. С. 504; 1962. Т. 43. С. 256.
18. Кадышевский В. Г. // Там же. 1961. Т. 41. С. 1885; Препринты ОИЯИ Р-1017, Р-1018. Дубна, 1962.
19. Born M. // Proc. Roy. Soc. A. 1938. V. 165. P. 291.



# ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ\*

Показано, что нелокальный потенциал, возникающий из теории квантовых полей, при больших волновых числах может быть заменен локальным, комплексным показателем преломления.

## Введение

Мы исходим из уравнения для одновременной волновой функции двух частиц

$$L\psi(x) = \int V(x, x', W)\psi(x')d^3x'. \quad (1)$$

Здесь  $x = x_1 - x_2$  — относительная координата двух частиц при одинаковых временах ( $t_1 = t_2$ ),  $W$  — энергия стационарного состояния;  $V(x, x', W)$  — нелокальный потенциал; оператор  $L$  может быть либо оператором Клейна:  $\epsilon^2/c^2 - K^2 = \nabla^2 + k^2$  ( $\epsilon$  — энергия мезона,  $\mu$  — его масса,  $K^2 = -\nabla^2 + \mu^2$ ), либо оператором Дирака:  $L = E/c - D(\nabla)$  ( $E$  — энергия нуклона  $D = i\alpha\nabla + \beta mc^2$ ); заметим, что  $W = E + \epsilon$ . Приведенное уравнение было выведено из одновременных уравнений, построенных с помощью «элементарной матрицы рассеяния» (см. [1–3]). Недавно такое же уравнение в импульсном представлении было получено в [4]. В дальнейшем мы рассмотрим два предельных случая: длинных и коротких волн.

## 1. Случай длинных волн

Уравнение (1) можно переписать в виде

$$L\psi(x) = U(x, W)\psi(x), \quad (2)$$

где  $U(x, W)$  — локальный потенциал, зависящий, однако, от вида волновой функции:

$$U(x, W) = \int \frac{V(x, x', W)\psi(x')}{\psi(x)}d^3x'. \quad (3)$$

Если длина волны  $\lambda$  много больше размеров области  $a$ , где нелокальный потенциал отличен от нуля (т.е. предполагается, что для  $|x|, |x'| > aV(x, x', W) \sim 0$ ), то в этой области волновая функция  $\psi(x)$  практиче-

ски не меняется. Тогда мы можем положить внутри  $a$ :  $\psi(x')/\psi(x) \cong 1$  и, стало быть, в этом случае локальный потенциал

$$U(x, W) = \int V(x, x', W) d^3 x' \quad (4)$$

есть попросту усредненный по пространству  $x'$  нелокальный потенциал  $V(x, x', W)$ .

Казалось бы, что для случая более коротких волн можно построить локальный потенциал посредством операции

$$U_n(x, W) = \int \frac{V(x, x', W) \psi_{n-1}(x')}{\psi_n(x)} d^3 x', \quad (5)$$

подставляя каждый раз в (5) вместо отношения  $\psi(x')/\psi(x)$  предыдущее приближение:

$$L\psi_n(x) = U_n(x, W)\psi_n(x). \quad (6)$$

Этот итерационный процесс не при всех обстоятельствах будет сходиться к истинному решению: если волновая функция  $(n-1)$ -го приближения имеет нули не на правильном месте, то и функция  $n$ -го приближения также будет иметь нули в этом же неправильном месте. Действительно, из (5) видно, что в этих точках  $U_n(x, W)$  будет обращаться в бесконечность, а, стало быть,  $\psi_n(x)$  — в нуль.

## 2. Геометрическая оптика

Рассмотрим теперь другой крайний случай, когда  $\lambda \ll a$ . Заметим, что сечение упругих процессов  $\sigma$  можно написать в виде  $\sigma = \pi a^2(1 - \beta)$ , где  $a$  — радиус нуклона, а  $\beta$  — прозрачность нуклона; поэтому условие применимости геометрической оптики может быть написано в форме

$$a/\lambda = [\sigma/\pi(1 - \beta)\lambda^2]^{1/2} \quad (7)$$

при  $\lambda \rightarrow 0$ . В этом крайнем случае волновую функцию представим в виде

$$\psi(x) = \exp\{ikS(x)\}, \quad (8)$$

где  $S(x)$  — функция действия. Чтобы не усложнять дальнейшего изложения, ограничимся скалярным уравнением  $L = \nabla^2 + k^2$ . Подставляя (8) в (1), получим при  $k \rightarrow \infty$

$$(\nabla S)^2 = n^2, \quad (9)$$

где  $n$  — комплексный показатель преломления, определенный уравнением

$$n^2 - 1 = k^{-2} \int V(x, x', W) \exp\{ik[S(x') - S(x)]\} d^3 x'. \quad (10)$$

Заметим, что

$$S(x') - S(x) = (x' - x)\nabla S + \dots = n_\rho \cos \theta, \quad \rho = |x' - x|.$$

Первое приближение для  $n^2 - 1$  мы получим, если в экспоненте под интегралом в (10) положим  $n_0 = 1$ . Тогда

$$n_1^2 - 1 = k^{-2} \int V(x, x + \rho, W) e^{ik\rho} d^3\rho, \quad (11)$$

т. е. в первом приближении показатель преломления  $n_1$  определяется попросту  $k$ -й компонентой Фурье нелокального потенциала.

Подставляя найденный  $n_1$  в интеграл, в формуле (10) получим  $n_2$  и т. д. Полагая  $n = \alpha + i\beta$  ( $\alpha$  и  $\beta$  — функции  $x$  и  $W$ , или  $k$ ), нетрудно видеть, что необходимым условием сходимости итерационного процесса для вычисления  $n$  будет условие  $k\beta \rightarrow \text{const}$  (в частности, 0) при  $k \rightarrow \infty$ .

В противном случае в подынтегральном выражении в (10) появится множитель  $e^{-k\beta\rho \cos \theta}$ , который в области  $\cos \theta < 0$  стремится к  $\infty$  при  $k \rightarrow \infty$ , что делало бы итерационный процесс невозможным.

Покажем, что  $k\beta$  при  $k \rightarrow \infty$  остается ограниченным. Действительно, из оптической теоремы следует, что мнимая часть амплитуды рассеяния

$$A(W, q) = ik \int_0^\infty b db [1 - e^{2i\eta(b, k)}] J_0(bq) \quad (12)$$

(здесь  $b$  — параметр удара,  $\eta(b, k)$  — фаза рассеянной волны,  $q$  — передаваемый импульс;  $q = 2k \sin(\theta/2)$ ,  $\eta = \delta(b, k) + i\gamma(b, k)$ ,  $\gamma > 0$ ) при угле рассеяния  $\theta = 0$  связана с полным сечением  $\sigma_t$  соотношением

$$\int b db [1 - e^{-2\gamma} \cos 2\delta] = \sigma_t / 4\pi. \quad (13)$$

С другой стороны,

$$2\gamma(b, k) = k \int_0^\infty \beta(x, k) ds, \quad (14)$$

где интеграл взят по пути луча внутри нуклона, при параметре удара, равном  $b$ . Если  $\sigma_t$  остается постоянным или убывает при  $k \rightarrow \infty$ , то  $\gamma(b, k)$  также должно быть постоянным или убывать с ростом  $k$ . Тогда из (14) видно, что и произведение  $k\beta$  остается ограниченным.

Таким образом, понятие показателя преломления внутри частицы, при  $k \rightarrow \infty$ , получает простой физический смысл. Этим дается теоретическое обоснование для применения геометрической оптики к описанию рассеяния частиц высокой энергии, как это сделано в работах [1, 6, 7].

Однако подобное описание рассеяния частиц является, конечно, приближенным и будет непригодно для очень больших углов рассеяния, например для рассеяния назад. Как было показано в [5], сечение рассеяния назад  $\lesssim \lambda^2$ , и поэтому условие (10) не будет выполняться.

## Список литературы

1. Блохинцев Д. И., Барашенков В. С., Барбашов Б. М. // УФН. 1959. Т. 68. С. 417.
2. Blochintsev D. // Nucl. Phys. 1962. V. 31. P. 628.
3. Блохинцев Д. // ДАН СССР. 1946. Т. 53. С. 8.
4. Логунов А. А. и др. Препринты ОИЯИ Е-1145, Д-11911, Р-1195. Дубна, 1962.
5. Блохинцев Д. // ЖЭТФ. 1962. Т. 42. С. 880; Nuovo Cim. 1961. V. 23. P. 1061.
6. Blochintsev D. I., Barašenkov V. S., Grišin V. G. // Nuovo Cim. 1958. V. 9. P. 249.
7. Serber R. // Phys. Rev. Lett. 1963. V. 10. P. 357.

Объединенный институт  
ядерных исследований

Поступила  
18 июня 1963 г.

## О РАСПРОСТРАНЕНИИ СИГНАЛОВ ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЫ В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ\*

Мы рассматриваем уравнение для распространения сигнала  $\Psi$  вида

$$A_{jk}\partial^2\Psi/\partial x_j\partial x_k + B_k\partial\Psi/\partial x_k + C\Psi = 0, \quad (1)$$

где коэффициенты  $A_{jk}$ ,  $B_k$ ,  $C$  — случайные функции переменных  $x_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ). Предполагается, что в области возможных значений  $A_{jk}$  уравнение (1) остается гиперболическим. Положим далее

$$A_{jk} = \overline{A}_{jk} + a_{jk}, \quad B_k = \overline{B}_k + b_k, \quad C = \overline{C} + c, \quad (2)$$

где черта означает усреднение по возможным значениям случайных величин  $A_{jk}$ ,  $B_k$ ,  $C$ . Это усреднение имеет смысл функционального интегрирования по возможным значениям случайной величины  $a(x)$ :

$$\overline{\Psi} = \int \Psi\{a(x)\}dw\{a(x)\}, \quad (3)$$

где  $\Psi$  — функционал от  $a(x)$ ;  $dw\{a(x)\}$  — вероятность того, что  $a = a(x)$ . Мы удем допускать, что случайную величину  $a(x)$  можно представить в виде ряда

$$a(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x, \alpha_n), \quad (4)$$

где  $\varphi_n(x, \alpha_n)$  — некоторая система ортонормированных функций,  $\alpha_n$  — случайные фазы,  $a_n$  — случайные амплитуды. В силу (4)  $dw\{a(x)\}$  можно рассматривать как вероятность той или иной совокупности значений величин  $a_n$ ,  $\alpha_n$ ; в частности, если  $a_n$ ,  $\alpha_n$  независимы, то

$$dw\{a(x)\} = \prod_n dw(a_n)d\Omega(\alpha_n). \quad (5)$$

Решение  $\Psi$  мы будем искать в виде

$$\Psi = A e^{iS}, \quad (6)$$

где частота  $\omega$  значительно превосходит частоты, характерные для спектра случайных величин  $A_{jk}$ ,  $B_k$ ,  $C$ . В этом случае амплитуду  $A$  и фазовую

функцию  $S$  можно считать медленно меняющимися функциями переменных  $x_j$  (приближение геометрической оптики). Полагая  $S = \bar{S} + \sigma$  и подставляя (6) в (1), при  $\omega \rightarrow \infty$  получим

$$\bar{A}_{jk} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_k} = 0, \quad (7)$$

$$\bar{A}_{jk} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_j} \frac{\partial \sigma}{\partial x_k} + \bar{A}_{jk} \frac{\partial \sigma}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_k} + a_{jk} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_k} = 0. \quad (8)$$

Из последнего уравнения находится случайная фаза  $\sigma$ , которая будет линейным функционалом от случайных величин  $a_{jk}(x)$ . Поэтому  $\sigma(x)$  имеет вид

$$\sigma(x) = \sum_n a_n \sigma_n(x, \alpha_n), \quad (9)$$

где  $\sigma_n(x, \alpha_n)$  соответствует решению системы (7), (8), если в (4) положить все  $a_m = 0$ , кроме  $a_n$ .

Среднее значение сигнала  $\bar{\Psi}$  будет

$$\bar{\Psi} = A e^{i\omega \bar{S}} e^{i\omega \bar{\sigma}}. \quad (10)$$

Если распределение  $dw(a_n)$  является нормальным

$$dw(a_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp \left[ -\frac{(a_n - \bar{a}_n)^2}{b_n^2} \right] \frac{da_n}{b_n}, \quad (11)$$

то, на основании (9), получим

$$\bar{\Psi} = A e^{i\omega \bar{S}} \prod_n \int_0^{2\pi} d\Omega(\alpha_n) \exp \left[ i\omega \bar{a}_n \sigma_n(x, \alpha_n) - \frac{b_n^2 \omega^2}{5} \sigma_n^2(x, \alpha_n) \right]. \quad (12)$$

Окончательный результат зависит от вида  $\sigma(x, \alpha_n)$ .

Рассмотрим некоторые применения.

*А. Рассеяние звука в турбулентном потоке.* В простейшем случае стационарного, безвихревого потока при пренебрежении величинами порядка  $u^2/c^2$  ( $u$  — скорость потока,  $c$  — скорость звука), уравнение для потенциала скоростей звуковой волны  $\varphi$  гласит [1]

$$\partial^2 \varphi / \partial t^2 + 2u \partial^2 \varphi / \partial t \partial t - c^2 \partial^2 \varphi / \partial x^2 = 0, \quad (13)$$

так что  $x_1 = x$ ,  $x_4 = t$  и  $A_{44} = 1$ ,  $A_{41} = a_{41} = 2u$ ,  $A_{11} = -c^2$ .

Уравнения (7) и (8) имеют теперь вид

$$\left( \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} \right)^2 - c^2 \left( \frac{\partial \bar{S}}{\partial x} \right)^2 = 0, \quad (7')$$

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - 2c^2 \frac{\partial \bar{S}}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + 2u \frac{\partial \bar{S}}{\partial x} \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} = 0. \quad (8')$$

Из (7) для плоской волны имеем  $\bar{S} = t \pm x/c$ , так что

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} \mp 2c \frac{\partial \sigma}{\partial x} + 2 \frac{u}{c} = 0. \quad (14)$$

Для стационарного потока  $\partial u / \partial t = 0$ , и можно получить  $\partial \sigma / \partial t = 0$ . Тогда получаем

$$\sigma(x) = \pm \int_0^x \frac{u(x') dx'}{c^2}. \quad (15)$$

Полагая теперь

$$u(x) = \sum_n u_n \cos(q_n x + \alpha_n), \quad (16)$$

для нормального закона распределения  $u_n$  при  $\bar{u}_n = 0$  получим

$$e^{i\omega\sigma} = \prod_n \int \exp \left[ -\frac{\omega^2 b_n^2}{4q_n^2 c^4} F_n^2(x, \alpha_n) \right] \frac{d\alpha_n}{2\pi}, \quad (17)$$

где

$$F_n(x, \alpha_n) = \sin(q_n x + \alpha_n). \quad (18)$$

Так как  $F^2(x, \alpha_n) > 0$  и ограничено, то эту величину в показателе (17) можно заменить эффективным средним  $F_n^2(x, \theta_n \alpha_n)$ ,  $0 < \theta_n < 1$ . Тогда вместо (17) получим

$$e^{i\omega\sigma} \exp \left[ -\frac{\omega^2}{2} \Phi(x) \right], \quad (19)$$

где

$$\Phi(x) = \sum_n \frac{b_n^2}{2q_n^2 c^4} F_n^2(x, \theta_n \alpha_n). \quad (20)$$

Таким образом, средняя сила звукового сигнала (10) резко падает с ростом частоты  $\omega$  (по кривой Гаусса).

**Б. Распространение света в среде с турбулентной метрикой.**

Волновое уравнение в этом случае гласит [2]

$$g^{\mu\nu} \partial^2 \varphi / \partial x_\mu \partial x_\nu - \Gamma^\mu \partial \varphi / \partial x_\mu = 0, \quad (21)$$

$$\Gamma^\mu = -\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}), \quad (22)$$

где  $g$ , как обычно, есть  $\det(g_{\mu\nu})$ .

Мы будем рассматривать  $g^{\mu\nu}$  как случайные функции переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4 = t$ . Физические причины для такой возможности рассмотрены в [3].

Обратимся к случаю, когда

$$g^{\mu\nu} = g_0^{\mu\nu} + \varepsilon^{\mu\nu}, \quad \overline{\varepsilon^{\mu\nu}} = 0. \quad (23)$$

Из (21), (22), (7) и (8) получаем уравнение для  $\sigma$ :

$$\varepsilon^{\mu\nu} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_\nu} + g_0^{\mu\nu} \left( \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_\nu} \frac{\partial \sigma}{\partial x_\mu} \right) = 0. \quad (24)$$

В частности, для плоской волны  $\bar{S} = t - x$  (скорость света  $c$  полагаем равной 1) уравнение (24) принимает вид

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{1}{2} \varepsilon(x, t), \quad \varepsilon = \varepsilon^{44} + \varepsilon^{11} - 2\varepsilon^{14}. \quad (25)$$

Оно имеет решение

$$\sigma(x, t) = \frac{1}{4} \int_{t_0}^t \varepsilon(t' - \xi, t') dt' + \frac{1}{4} \int_{x_0}^t \varepsilon(x', \xi + x') dx', \quad (26)$$

где  $\xi = t - x$ . Аналогичное решение получится для волны  $\bar{S} = t + x$ . Если  $\varepsilon(x, t)$  можно представить в виде

$$\varepsilon(x, t) = \sum_{n,m} \varepsilon_{nm} \sin(q_n x + \alpha_n) \sin(\omega_m t + \beta_m), \quad (27)$$

где  $\varepsilon_{nm}$ ,  $\alpha_n$ ,  $\beta_m$  — случайные величины, то при нормальном законе распределения  $\varepsilon_{nm}$ ,  $\bar{\varepsilon}_{nm} = 0$ ,  $\overline{\varepsilon_{nm}^2} = 1/2b_{nm^2}$  и равномерном распределении  $\alpha_n$ ,  $\beta_m$  мы получим

$$\sigma(x, t) = \sum_{n,m} \varepsilon_{nm} F_{nm}(x, t), \quad (28)$$

где явный вид  $F_{nm}(x, t)$  нетрудно получить из (26) и (27). Применяя те же рассуждения, что в пункте А, получим, что световой сигнал имеет вид (19), причем  $\Phi(x) > 0$  и теперь равно

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \sum_{n,m} n_{nm}^2 F_{nm}^2(x, t, \theta_n \alpha_n, \theta_m \beta_m). \quad (29)$$

## Список литературы

1. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной и движущейся среды, 1946.
2. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения.
3. Blokhintsev D. I. // Nuovo Cim. 1960. V. 18. P. 193.



## МЕТРИКА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОЛЯ\*

В основе мероопределения пространства-времени в специальной теории относительности (СТО) лежит предположение о постоянстве скорости света в физическом вакууме. Между тем это предположение, вообще говоря, не выполнено в нелинейных теориях поля [1–4], хотя бы они и удовлетворяли формальным требованиям лоренцевой инвариантности.

Определенные требования к линейности сигнала, неявно содержащиеся в СТО, обычно упускаются из виду. А. Эйнштейн не раз отмечал, что на самом деле нам дана только сумма «геометрия + физика», а не каждое слагаемое отдельно. Рассмотрим эту «сумму» на примере абстрактного мира, в котором существует лишь один вид материи — скалярное поле  $\varphi(x)$ , распределенное в пространстве  $R(x)$  ( $x = x_1, x_2, x_3, x_4$ ).

Метрика этого пространства первоначально не определена, однако закон распределения поля  $\varphi(x)$  мы будем считать заданным с помощью вариационного принципа:

$$\delta \int L d\omega = 0, \quad (1)$$

где  $d\omega = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ ,  $L$  — плотность лагранжиана, зависящая от поля  $\varphi(x)$  и его первых производных  $\varphi_i \equiv \partial\varphi/\partial x_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Из (1) вытекает уравнение поля

$$a_{ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} + b_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + c = 0, \quad (2)$$

где

$$a_{ik} = \partial^2 L / \partial \varphi_i \partial \varphi_k, \quad b_i = \partial^2 L / \partial \varphi \partial \varphi_i, \quad c = -\partial L / \partial \varphi \quad (3)$$

функции  $\varphi$  и  $\varphi_i$ , так что уравнение (2), вообще говоря, нелинейно. Для установления метрических соотношений в рассматриваемом нами абстрактном мире мы можем использовать только «физику» поля  $\varphi(x)$ . Если уравнение (2) является уравнением эллиптического типа, так что

$$a_{ik} \xi_i \xi_k > 0, \quad (4)$$

( $\xi_i$  — произвольный действительный вектор), то вообще нельзя разделить множество  $R_4(x)$  на пространство и время. В этом случае вариация поля  $\delta\varphi(P)$  в окрестности какой-либо точки  $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$  ведет к изменению

сигнал (слабый разрыв) распространяется в согласии с уравнением

$$g^{ik} \frac{\partial s}{\partial x_i} \frac{\partial s}{\partial x_k} = 0, \quad (8)$$

где  $g^{ik}$  — контравариантный метрический тензор [6].

Сравнение (7) и (5) показывает, что метрика в  $R_4(x)$  должна быть согласована с законом распространения сигнала (5). Это согласование требует, чтобы

$$g^{ik} = \lambda a^{ik}, \quad (9)$$

где  $\lambda$  — общий масштабный множитель. Таким образом, метрический тензор  $g^{ik}$  будет функцией поля  $\varphi(x)$  и его производных:

$$g^{ik} = g^{ik}(\varphi, \varphi_i). \quad (10)$$

Метрика  $R_4(x)$  оказывается зависящей от поля  $\varphi$ .

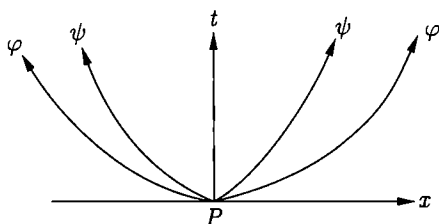


Рис. 2. Характеристики поля  $\varphi$  и  $\psi$ . Конус влияния  $\psi$  находится внутри конуса влияния  $\varphi$ , поэтому для разделения  $R_2(t, x)$  на пространство и время надо предпочесть сигнал поля  $\varphi$

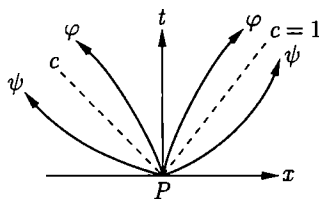


Рис. 3. Пунктиром с обозначен конус влияния СТО (скорость света в пустоте принята постоянной). Конус  $\varphi$  совместим с метрикой, принятой в СТО. Конус, определяемый полем  $\psi$ , на малых расстояниях от  $P$  требует изменения метрики СТО

Допустим теперь, что помимо поля  $\varphi$  существует еще и другое поле  $\psi$ , подчиняющееся также уравнению вида (2). Поле  $\varphi$ , если его использовать как сигнал для упорядочения событий в  $R_4(x)$ , определит другую метрику, отличную от (9). Какую метрику мы должны предпочесть?

Ясно, что мы должны назвать временем ту область, которая достигается любым сигналом ( $\psi$  или  $\varphi$ ). Иными словами, разделение  $R_4(x)$  на пространство и время должно быть осуществлено с помощью того сигнала, который имеет конус влияния, включающий в себя все остальные, возможные (см. рис. 2).

Естественно считать, что в области малых полей должна быть справедлива обычная метрика, принятая в СТО. Поэтому вдали от источника  $P$  характеристики должны выпрямляться, как это показано на рис. 3. Это выпрямление может происходить двумя существенно различными способами. Скорость сигнала может стремиться к скорости света  $c$  со стороны меньших скоростей (на рис. 3 случай  $\varphi$ ) или со стороны больших скоростей (на рис. 3

случай  $\psi$ ). В последнем случае метрика пространства-времени должна быть переопределена применительно к закону распространения этого поля вблизи точки  $P$ . Таким образом, поле  $\varphi$ , которое определяет метрику пространства, будет взаимодействовать со всеми другими полями через метрический тензор

$$g^{ik} = g^{ik}(\varphi, \varphi_i).$$

В заключение заметим, что уравнение Клейна

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_4^2} - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} \right) - m^2 \varphi = 0 \quad (11)$$

с отрицательным  $-m^2$  («мнимая масса»), как обычно считают, приводит к движению частиц со скоростью, большей скорости света  $c$ .

С точки зрения описанного выше определения времени (область, достигаемая сигналом (см. рис. 4)) в случае уравнения (10) следует считать, что мы имеем одну про-

странственную координату и три временных:  $x_1, x_2, x_3$ . Роль частоты должна играть величина  $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$ , так что  $\omega^2 = k_4^2 + m^2$ . При таком определении времени скорости частиц, описываемых уравнением (10), будут меньше скорости света  $c$ .

### Список литературы

1. Born M. // Proc. Roy. Soc. A. 1939. V. 143. P. 410.
2. Блохинцев Д. И. // ДАН СССР. 1956. Т. 82. С. 553. — Статья № 81 в наст. изд. — Прим. ред.
3. Блохинцев Д. И., Орлов В. В. // ЖЭТФ. 1953. Т. 25. С. 513. — Статья № 82 в наст. изд. — Прим. ред.
4. Blokhintsev D. I. // Nuovo Cim., Cim. Suppl. 1953. V. 3. P. 629.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. 1958.
6. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения, 1955.
7. Огиевецкий В. И., Полубаринов И. В. Препринт ОИЯИ Р-2106. Дубна, 1965.

Объединенный институт  
ядерных исследований

Поступила  
27 января 1956 г.

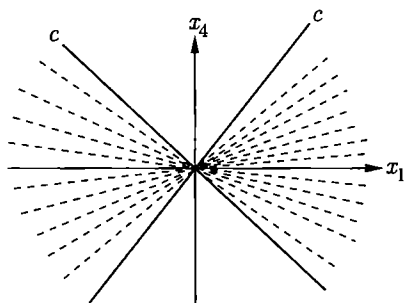


Рис. 4. Пунктиром заштрихована область влияния для уравнения Клейна с  $m^2 > 0$ . В этом случае измерение  $x_4$  следует считать пространством и измерение  $x_1$  (а также  $x_2$  и  $x_3$ ) — временем

## УСЛОВИЯ МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ПРИЧИННОСТИ ДЛЯ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ\*

*Совместно с Г. И. Колеровым*

Сформулировано условие макроскопической причинности для матрицы рассеяния. Рассмотрен пример унитарной, но нелокальной матрицы рассеяния, которая удовлетворяет требованиям макроскопической причинности.

### 1. Введение

В современной теории свойства матрицы рассеяния формулируются на основе локальной теории. Однако физическое значение матрицы рассеяния, как это было отмечено еще Гейзенбергом [1], может существенно выходить за узкие рамки локальной теории<sup>1</sup>. Это видно также и в аксиоматическом подходе [3], в котором явно проявляется произвол при экстраполировании матрицы рассеяния с массовой поверхности  $P_0^2 = P^2 + m^2$ .

Какой бы ни была эта экстраполяция, непосредственный физический смысл сохраняется только за матрицей рассеяния  $S$  на массовой поверхности. Поэтому мы применяем условия причинности только к этой величине, которая определена физически и мы называем это условие *макроскопической* причинностью в отличие от условия *микроскопической* причинности, связанной с понятием локального поля.

Применение условия причинности к матрице рассеяния сталкивается со следующей трудностью: матрица рассеяния преобразует состояния, заданные при  $t = -T$ , в состояния при  $t = +T$ , когда  $T \rightarrow \infty$ . В течение времени  $2T$  волны заполняют все пространство. В результате возникает стационарное состояние, которое, по своей сути, исключает условия, необходимые для формулировки причинной связи.

В разд. 2 мы покажем, что все же можно построить волновые пакеты, которые допускают приемлемую формулировку условий макроскопической причинности и которые совместимы с интерпретацией предела  $T \rightarrow \infty$  таким образом, что члены порядка  $1/R$  ( $R = vT$ ,  $v$  — скорость волнового пакета) предполагаются еще конечными, в то время как вкладами порядка  $1/R^2$

\* Nuovo Cimento. 1965. V. 44A, № 4. P. 974–983.

<sup>1</sup> См. также работу [2].

можно пренебречь. С помощью таких пакетов мы сможем сформулировать условие макроскопической причинности, которое можно рассматривать как обычное условие причинности, характерное для релятивистской метрики. События в точках  $\mathcal{P}(x')$  и  $\mathcal{P}(x'')$  могут быть причинно связаны только при выполнении следующих условий: а) интервал  $(x'' - x')^2$  является времени-подобным, т.е.  $(x'' - x')^2 \geq 0$  или б) событие в точке  $\mathcal{P}(x')$  предшествует (вызывает) событие (следствие) в точке  $\mathcal{P}(x'')$ , так что  $t'' > t'$ .

В разд.3 дан пример унитарной, но аказуальной матрицы рассеяния, которая удовлетворяет данному условию макроскопической причинности.

## 2. Формулировка условий макроскопической причинности

Рассмотрим два волновых пакета  $a$  и  $b$ , которые в момент времени  $t_1 = -T$  выходят из диафрагм  $A$  и  $B$  (см. рис. 1). Такое описание создания волновых пакетов воспроизводит наиболее точно реальную экспериментальную ситуацию.

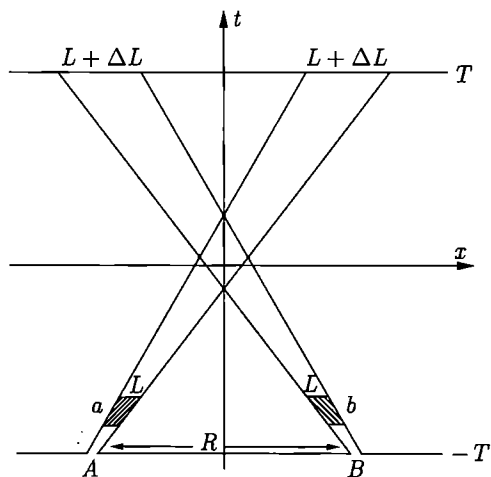


Рис. 1.  $A$  и  $B$  — диафрагмы;  $a$  и  $b$  — волновые пакеты в начальном состоянии (in-состояние). Начальный размер пакетов  $L$ ,  $R$  — расстояние между пакетами при  $t = -T$ ,  $\Delta L$  — уширение пакетов по прошествии времени  $2T$

Немного позже может произойти столкновение пакетов, но к моменту времени  $t_2 = +T$  они разлетаются. Пусть в момент времени  $t_1 = -T$  пакеты находятся на расстоянии  $R$ , которое намного больше, чем их размер  $L$  ( $R \gg L$ ). Мы будем предполагать, что пакеты имеют достаточно определенный импульс  $P$ , так что  $P \gg \Delta P \simeq \hbar/L$ . Теперь мы потребуем, чтобы пакеты не расплывались значительно за время  $2T$ , т.е. увеличение ширины пакета  $\Delta L$  не должно быть большим по сравнению с исходной шириной  $L$ . Дисперсия скорости пакета  $\Delta v$  равна

$$\Delta v = \frac{\partial^2 E}{\partial P^2} \Delta P = \frac{\Delta P}{E} \frac{m^2}{E^2}, \quad (1)$$

где  $m$  — масса частицы. Итак, мы имеем  $\Delta L = \Delta v \cdot T = \frac{\Delta P}{P} \frac{m^2}{E^2} R$ . С учетом условия  $L \gg \Delta L$  получаем

$$L > \frac{m}{E} \sqrt{R\lambda}, \quad (2)$$

где  $\lambda = \hbar/P$  — длина волны. Условие (2) совместимо с условием

$$R \gg L \gg \lambda, \quad (3)$$

если  $R \gg (\Lambda_0^2/\lambda^2) \lambda$  при  $\lambda < \Lambda_0$  или если  $R \gg (\lambda^2/\Lambda_0^2) \lambda$  при  $\lambda > \Lambda_0$ , здесь  $\Lambda_0 = \hbar/mc$ .

Таким образом, существуют пакеты, которые могут быть использованы в качестве in-состояний, трансформируемых в out-состояния с помощью  $S$ -матрицы:

$$\langle f|\mathbf{S}|i\rangle = \delta_{fi} - (2\pi)^4 i\delta^4(P_f - P_i)\langle f|\mathbf{T}|i\rangle, \quad (4)$$

где, как обычно,  $i$  — квантовые числа in-состояния, а  $f$  — то же самое для out-состояний. Матричный элемент  $\langle f|\mathbf{T}|i\rangle$  может быть представлен в более детальной форме

$$\langle f|\mathbf{T}|i\rangle = \frac{\langle P_m, P_{m-1}, \dots, P_{n+1}|\mathbf{I}|P_n, \dots, P_1\rangle}{\sqrt{2P_{0m}, 2P_{0m-1}, \dots, 2P_{01}}}, \quad (5)$$

где  $\langle P_m, P_{m-1}, \dots, P_{n+1}|\mathbf{I}|P_n, \dots, P_1\rangle$  — инвариантная функция 4-х импульсов  $P_m, P_{m-1}, \dots, P_1$ , а  $P_{0m}, P_{0m-1}, \dots, P_{01}$  — их временные компоненты. Далее мы ограничимся простейшим случаем парного столкновения двух частиц, когда в начальном состоянии ( $i$ ) имеются только две частицы, описываемые волновыми пакетами  $u_1(x_1)$  и  $u_2(x_2)$ , типа рассмотренных выше. Эти пакеты можно представить в интегральной форме

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{u}(\mathbf{P}) \exp(ipx) \frac{d^3P}{2P_0}, \quad (6)$$

где  $P_0 = +\sqrt{\mathbf{P}^2 + m^2}$ . Волновая функция начального состояния в импульсном представлении имеет вид

$$\Phi_{\text{in}}(P_2 P_1) = \frac{\tilde{u}_2(\mathbf{P}_2)}{\sqrt{2P_{02}}} \frac{\tilde{u}_1(\mathbf{P}_1)}{\sqrt{2P_{01}}}. \quad (7)$$

С помощью (4), (5) и (7) получаем

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{out}}(P_m, P_{m-1}, \dots, P_3) = & -(2\pi)^4 i \int \delta^4(P_m + P_{m-1} + \dots + P_3 - P_2 - P_1) \times \\ & \times \frac{\langle P_m, P_{m-1}, \dots, P_3|\mathbf{I}|P_2, P_1\rangle}{\sqrt{2P_{0m}, 2P_{0m-1}, \dots, 2P_{03}}} \tilde{u}_2(\mathbf{P}_2) \tilde{u}_1(\mathbf{P}_1) \frac{d^3P_2 d^3P_1}{2P_{02} 2P_{01}}, \end{aligned} \quad (8)$$

и для упругого рассеяния имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{out}}(P_4, P_3) = & \Phi_{\text{in}}(P_4, P_3) - (2\pi)^4 i \int \delta^4(P_4 + P_3 - P_2 - P_1) \times \\ & \times \frac{\langle P_4, P_3|\mathbf{I}|P_2, P_1\rangle}{\sqrt{2P_{04}, 2P_{03}}} \tilde{u}_2(\mathbf{P}_2) \tilde{u}_1(\mathbf{P}_1) \frac{d^3P_2 d^3P_1}{2P_{02} 2P_{01}}. \end{aligned} \quad (8')$$

Теперь мы перейдем в координатное представление. Для этого мы помножим левую часть уравнения (8) на

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2(m-2)}} \frac{\exp[i(P_m x_m + P_{m-1} x_{m-1} + \dots + P_3 x_3)]}{\sqrt{2P_{0m}, 2P_{0m-1} \dots 2P_{03}}}$$

и проинтегрируем по  $d^3 P_m, d^3 P_{m-1}, \dots, d^3 P_3$ . Далее с помощью (6) выразим  $\tilde{u}(\mathbf{P})$  через  $u(x)$ :

$$\frac{\tilde{u}(\mathbf{P})}{2P_0} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int u(x) \exp(-iPx) d^3 x. \quad (5')$$

Из формулы (8) получаем

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{out}}(x_m, x_{m-1}, \dots, x_3) = \\ = -(2\pi)^4 i \int g(x_m, x_{m-1}, \dots, x_3 | x_2, x_1) u_2(x_2) u_1(x_1) d^3 x_2 d^3 x_1 \end{aligned} \quad (9)$$

и аналогично из формулы (8')

$$\Phi_{\text{out}}(x_4, x_3) = \Phi_{\text{in}}(x_4, x_3) - (2\pi)^4 i \int g(x_4, x_3 | x_2, x_1) u_2(x_2) u_1(x_1) d^3 x_2 d^3 x_1. \quad (9')$$

В этом случае мы имеем

$$\begin{aligned} g(x_m, x_{m-1}, \dots, x_3 | x_2, x_1) = \\ = \int \delta^4(P_m + P_{m-1} + \dots + P_3 - P_2 - P_1) \langle P_m, P_{m-1}, \dots, P_3 | \mathbf{I} | P_2 P_1 \rangle \times \\ \times \frac{\exp[i(P_m x_m + \dots + P_3 x_3 - P_2 x_2 - P_1 x_1)]}{\sqrt{2P_{0m}, 2P_{0m-1} \dots 2P_{03}}} d^3 P_m d^3 P_{m-1} \dots d^3 P_1, \end{aligned} \quad (10)$$

или

$$g(x_m, x_m, x_{m-1}, \dots, x_3 | x_2, x_1) = -\frac{4\partial^2 g_0(x_m, x_{m-1}, \dots, x_3 | x_2, x_1)}{\partial t_2 \partial t_1}, \quad (11)$$

где  $g_0$  — инвариантная функция координат

$$\begin{aligned} g_0(x_m, x_{m-1}, \dots, x_3 | x_2, x_1) = \int \delta^4(P_m + P_{m-1} + \dots + P_3 - P_2 - P_1) \times \\ \times \langle P_m, P_{m-1}, \dots, P_3 | \mathbf{I} | P_2 P_1 \rangle \exp[i(P_m x_m + \dots + P_3 x_3 - P_2 x_2 - P_1 x_1)] \times \\ \times \frac{d^3 P_m d^3 P_{m-1} \dots d^3 P_1}{2P_{0m}, 2P_{0m-1} \dots 2P_{01}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Следует отметить, что благодаря  $\delta$ -функциям под знаком интеграла в  $g$  и  $g_0$  эти функции трансляционно-инвариантны и зависят только от разности переменных  $x_m, x_{m-1}, \dots, x_1$ .

Теперь мы можем сформулировать принцип макропричинности:

а) волновые пакеты  $u_2(x_2)$  ( $\Delta x_2 \sim L$ ) и  $u_1(x_1)$  ( $\Delta x_1 \sim L$ ), удаленные друг от друга на расстояние

$$|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| = |\mathbf{x}| = R > L \gg \lambda, \quad (13)$$

дают вклад в  $\Phi_{\text{out}}$  только при условии

$$x^2 = (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 > 0. \quad (14)$$

б) Далее  $\Phi_{\text{out}} = 0$ , если координаты частиц  $x_m, x_{m-1}, \dots, x_3$ , родившихся в столкновении, лежат вне будущих световых конусов с вершинами в точках  $x_2, x_1$ :

$$(x_s - x_2)^2 > 0, \quad (x_s - x_1)^2 > 0, \quad (15)$$

$$t_s > t_2, \quad t_s > t_1, \quad (15')$$

где  $s = m, m-1, \dots, 3$ . Таким образом, функция  $g(x_m, x_{m-1}, \dots, x_3 | x_2, x_1)$  должна обращаться в нуль, вне пространственно-временных областей, указанных выше, однако только асимптотически, т. е. для

$$R \rightarrow \infty, \quad (t_s - t_2), \quad (t_s - t_1) \rightarrow \infty. \quad (16)$$

С физической точки зрения эти условия идентичны с требованиями классической макроскопической причинности и означают предположения о том, что все частицы в конечном состоянии  $\Phi_{\text{out}}$  могут быть рождены (или могут изменить свое состояние) только после того, как начальные волновые пакеты обменяются квантом поля (см. рис. 2).

Обычная локальная теория, конечно, удовлетворяет сформулированному выше требованию макроскопической причинности (см., например, Приложение А). Это требование будет удовлетворено также любой матрицей рассеяния, в которой макропричинность нарушена только в малой локализованной пространственно-временной области.

В разд. 3 мы приведем пример акаузальной унитарной матрицы рассеяния, удовлетворяющей требованиям макроскопической причинности.

### 3. Акаузальная матрица рассеяния

Теперь мы обратимся к формальному построению нелокальной матрицы рассеяния, удовлетворяющей требованиям унитарной и макроскопической причинности.

Искомую  $S$ -матрицу представим в виде

$$S = \frac{1 - (i/2)K}{1 + (i/2)K}, \quad (17)$$

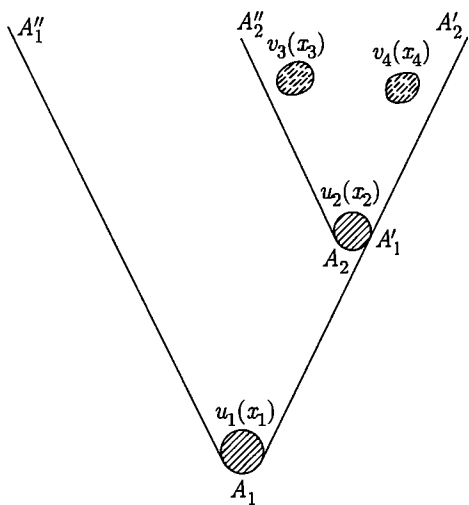


Рис. 2. Соотношения причинности:  $u_1(x_1), u_2(x_2)$  — начальные пакеты (in-состояния);  $v_3(x_3), v_4(x_4)$  — рассеянные волны (out-состояния);  $A_1' A_1 A_1'', A_2' A_2 A_2''$  — световые конусы



где  $\mathbf{K}$  — эрмитова матрица, т. е.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^\dagger. \quad (18)$$

Это условие гарантирует унитарность рассматриваемой матрицы  $\mathbf{S}$ . Чтобы изучить структуру  $\mathbf{S}$ -матрицы, предположим, что имеется малый параметр, который позволяет разложить нашу матрицу рассеяния в степенной ряд по этому параметру

$$\mathbf{S} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (i\mathbf{K})^n, \quad (19)$$

где  $a_n$  — действительные числа. После выделения инвариантных функций  $\tilde{F}$  матричные элементы матрицы  $K$  могут быть представлены в виде

$$K = \frac{\tilde{F}(P_1, \dots, P_n | P_{n+1}, \dots, P_m)}{\sqrt{2P_{01} 2P_{02} \dots 2P_{0m}}}, \quad (20)$$

где  $P_{0i} = +\sqrt{\mathbf{P}_i^2 + m^2}$ . Мы рассматриваем только скалярные частицы. Согласно СРТ-теореме, матричные элементы  $K$  удовлетворяют соотношению

$$K(P_1, \dots, P_n | P_{n+1}, \dots, P_m) = K(P_{n+1}, \dots, P_m | P_1, \dots, P_n), \quad (21)$$

и с учетом свойства (18)

$$K(P_1, \dots, P_n | P_{n+1}, \dots, P_m) = K^*(P_1, \dots, P_n | P_{n+1}, \dots, P_m). \quad (22)$$

Это означает, что функция  $\tilde{F}(P_1, P_2, \dots, P_m)$  должна быть вещественной. Теперь мы отметим следующие свойства функции  $\tilde{F}$ :

$$\tilde{F}(P_1, \dots, P_m) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}m}} \int F(x_1, x_2, \dots, x_m) \exp\left(i \sum_{j=1}^m P_j x_j\right) \prod_{f=1}^m d^4 x_j, \quad (23)$$

в этом случае

$$F(x_1, \dots, x_m) = F(-x_1, -x_2, \dots, -x_m).$$

Далее функция  $F(x_1, \dots, x_m)$  — трансляционно-инвариантная. В частности, она может быть представлена как функция переменных  $\xi_j = x_j - x_{j+1}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m-1$ . С учетом этого формула (23) может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} \tilde{F}(P_1, P_2, \dots, P_m) &= \delta^4(P_1 + P_2 + \dots + P_m) \times \\ &\times \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}(m-1)}} \int F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}) \exp\left(i \sum_{j=1}^m Q_j \xi_j\right) \prod_{j=1}^m d^4 \xi_j. \end{aligned} \quad (24)$$

Теперь мы обратимся к условию макроскопической причинности и для определенности ограничимся простейшим случаем упругого столкновения. Основываясь на (19), получаем

$$\begin{aligned} \langle P_1, P_2 | S | P_3, P_4 \rangle = & I - i \frac{\tilde{F}(P_1, P_2, P_3, P_4)}{\sqrt{2P_{01} 2P_{02} 2P_{03} 2P_{04}}} + \\ & + \int \frac{\tilde{F}(P_1, P_2, P', P'') \tilde{F}(P', P'', P_3, P_4)}{\sqrt{2P_{01} \dots 2P_{04}}} \delta(P'^2 - m^2) \times \\ & \times \theta(P) \delta(P''^2 - m^2) \theta(P) d^4 P' d^4 P''. \quad (25) \end{aligned}$$

В координатном представлении имеем

$$\begin{aligned} S(x_1, \dots, x_4) = & 1 - iF(x_1, \dots, x_4) + \int \int F(x_1, x_2, x', x'') \mathcal{D}^+(x' - y') \mathcal{D}^+(x'' - y'') \times \\ & \times F(y', y'', x_3, x_4) d^4 x' d^4 x'' d^4 y' d^4 y''. \quad (26) \end{aligned}$$

В обычной локальной теории функция  $S(x_1, \dots, x_4)$ , будучи построена с учетом микропричинности, удовлетворяет требованиям макроскопической причинности (14), (15) (ср. с Приложением А). Эта функция на световом конусе имеет особенности по переменным  $\xi_1 = x_1 - x_2$ ,  $\xi_2 = x_2 - x_3$ ,  $\xi_3 = x_3 - x_4$ ; природа этих сингулярностей существенно связана с причинностью. Это же относится и к функциям с большим числом аргументов. Обозначим соответствующие функции локальной теории через  $F_c(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ .

Условия макроскопической причинности (14), (15) не будут нарушены, если вместо причинных функций  $F_c(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$  мы введем акаузальные функции  $F_a(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ , которые будут отличаться от  $F_c(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$  только в малой пространственно-временной области вблизи вершины светового конуса  $\xi_j^2 = 0$ ,  $\Omega(\xi_j) \sim a^4$ . Величина  $a$  играет роль «элементарной длины». Функции  $F_a(\xi)$ , обладающие такими свойствами, как было показано в [4], могут быть построены путем усреднения возможных сингулярностей функции  $F_c(\xi)$  вблизи вершины светового конуса  $\xi^2 = 0$ :

$$F_a(\xi) = \int F_c(\xi - \xi') \varrho(\xi') d^4 \xi', \quad (27)$$

где  $\varrho(\xi', n)$  — весовая функция (формфактор), с помощью которой усредняются сингулярности в этой пространственно-временной области, где обычная причинность и обычная геометрия могут нарушаться.

Весовая функция  $\varrho(\xi, n)$  зависит от некоторого времениподобного вектора  $n$ , с помощью которого определяется инвариантным образом область  $\Omega(\xi) \sim a^4$ . В частности, можно предположить, что  $\varrho$  является функцией инварианта  $R$ :

$$R^2 = 2(\xi n)^2 - \xi^2 \geq 0, \quad (28)$$

и  $\varrho(R) \rightarrow 0$  для  $R \gg a$  (ср. с [4]).

Физический смысл вектора  $n$  может быть и иным, и это детально обсуждается в работе [5]. В принципе, допустимы два типа векторов  $n$ . Первая возможность: вектор  $n$  связан с системой взаимодействующих частиц («внутренний» вектор  $n$ )<sup>1</sup>. В этом случае нарушение геометрии происходит только внутри системы взаимодействующих частиц на чрезвычайно малых расстояниях и временных интервалах. Вторая возможность: вектор  $n$  связан с физическим вакуумом («внешний» вектор  $n$ ). В этом случае одна из систем отсчета, а именно, система отсчета «физического вакуума», оказывается выделенной (ср. [6, 7]).

Суммируя, необходимо подчеркнуть, что мы рассматриваем усреднение сингулярностей вблизи вершины светового конуса только лишь как средство формального описания ситуации на малых масштабах. Это может существенно отличаться от хорошо известного описания в современной теории.

## Приложение А

Для простейшего случая точечного взаимодействия  $W = \lambda \varphi^4$  функция  $\tilde{F}(P_1, \dots, P_4)$  (см. (25)) просто равна  $\delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - P_4)$ . Поэтому в первом приближении функция  $S(x_1, \dots, x_4)$  определяется формулой

$$S(x_1, \dots, x_4) = \lambda \int \exp [i(P_1 x_1 + P_2 x_2 - P_3 x_3 - P_4 x_4)] \times \\ \times \delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) \frac{d^3 P_1 d^3 P_2 d^3 P_3 d^3 P_4}{2P_{01} 2P_{02} 2P_{03} 2P_{04}}. \quad (\text{A.1})$$

Введем переменные

$$K = P_1, \quad u = P_1 + P_2 - P_3, \quad \xi = x_1 - x_2, \quad \xi_3 = x_3 - x_4, \\ q = P_1 + P_2, \quad K_4 = P_1 + P_2 - P_3 - P_4, \quad \xi_2 = x_2 - x_3. \quad (\text{A.2})$$

Теперь можем написать

$$S(x_1, \dots, x_4) = \lambda \int \exp [i(\xi K + \xi_2 q + \xi_3 u + x_4 K_4)] \times \\ \times \theta(K_0) \delta(K^2 - m^2) \theta(q_0 - K_0) \delta[(q - K)^2 - m^2] \theta(q_0 - u_0) \delta[(q - u)^2 - m^2] \times \\ \times \theta(u^0 + K_{04}) \delta[(u - K_4)^2 - m^2] \delta^4(K_4) d^4 K d^4 u d^4 q d^4 K_4. \quad (\text{A.3})$$

После интегрирования получаем

$$S(\xi, \xi_2, \xi_3) = \lambda \int \mathcal{D}^+(\xi - x) \mathcal{D}^-(x) \int \mathcal{D}^+(x + \xi_2 - y) \mathcal{D}^+(\xi_3 + y) d^4 y d^4 x. \quad (\text{A.4})$$

<sup>1</sup> Для сравнения нашей схемы с обычной нелокальной теорией см. Приложение Б.

Так как мы интересуемся зависимостью  $S$  от переменных  $\xi$ , то с помощью замены переменных

$$\xi_3 + y = \alpha, \quad x + \xi_2 + \xi_3 = \beta, \quad \xi_2 + \xi_3 = \varepsilon \quad (\text{A.5})$$

получаем

$$S(\xi) = \lambda \int \mathcal{D}^+(\xi + \varepsilon - \beta) \mathcal{D}^-(\beta - \varepsilon) \int \mathcal{D}^+(\beta - \alpha) \mathcal{D}^+(\alpha) d^4\beta d^4\alpha. \quad (\text{A.5})$$

Из уравнения (A.6) видно, что вне области будущего светового конуса функция  $S(\xi)$  экспоненциально убывает и оказывается важной только на расстояниях комптоновской длины волны.

## Приложение Б

Если предположить, что весовая функция  $\varrho(\xi, n)$  не зависит от вектора  $n$ , то в этом случае она будет функцией только  $\xi^2$ ,  $\varrho = \varrho(\xi^2)$  и совпадет с формфактором нелокальной теории [8].

Теперь роль вектора  $n$  (который необходим для локализации акаузальности) выполняет вектор момента или набор таких векторов, связанных с волновыми пакетами; т.е. вектор  $n$  в этом случае берется из начальных данных (т.е. из  $\Phi_{\text{in}}$ ). Как было показано в работе [9], поступая так, мы можем гарантировать макропричинность только для достаточно гладких волновых пакетов. В случае очень узких волновых пакетов макроскопическая причинность будет нарушаться. Действительно, мы рассматриваем волновой пакет, который соответствует квантовому переходу из состояния  $\psi_P(x, t) = \exp[iPx] \varphi_P(x - vt)$  в состояние  $\psi_{P'}(x, t) = \exp[iP'x] \varphi_{P'}(x - vt)$ . Временная компонента тока (т.е. плотность вероятности) для перехода  $P \rightarrow P'$  равна

$$\mathcal{J}_{0c} = \exp[i(P - P', x)] \varphi_P(x - vt) \varphi_{P'}^*(x - vt). \quad (\text{B.1})$$

Нелокальный образ этой плотности имеет вид

$$\mathcal{J}_{0\alpha} = \int \varrho(\tilde{S}^2) \mathcal{J}_{0c}(x't') dx' dt', \quad \text{где} \quad \tilde{S}^2 = (t - t')^2 - (x - x')^2. \quad (\text{B.2})$$

Если волновые пакеты  $\psi_P(x, t)$ ,  $\psi_{P'}(x, t)$  очень узкие (в предельном случае  $\delta$ -образные), то плотность  $\mathcal{J}_{0c}(x, t)$  отлична от нуля только в точке  $x = 0$ ,  $t = 0$  (в месте столкновения пакетов). Поэтому можно предположить

$$\mathcal{J}_{0\alpha}(x, t) = \exp[i(P - P', x)] \delta(x) \delta(t).$$

Тогда из формулы (B.2) получаем

$$\mathcal{J}_{0\alpha}(x, t) = \varrho(t^2 - x^2),$$

и причинность оказывается существенно нарушенной, так как  $\varrho(t^2 - x^2) \neq 0$  при  $t = \pm|x|$ , т.е. для сколь угодно больших значений  $|x|$ .

## Список литературы

1. *Heisenberg W.* // Zeits. f. Phys. 1943. Bd. 513. S. 673.
2. *Блохинцев Д. И.* // Ученые записки МГУ. 1945. Физ. сер. Т. 3, вып. 77. С. 101; см. также ЖЭТФ. 1948. Т. 16. С. 480; 1952. Т. 22. С. 354.
3. *Kristensen P., Møller C.* // Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Mat., Fys. Medd. 1952. V. 27, № 7.
4. *Blokhintsev D. I., Kolerov G. I.* // Nuovo Cimento. 1964. V. 34. P. 163.
5. Space, Time, Causality in Microworld. Review paper. JINR, D-1735. Дубна, 1964.
6. *Blokhintsev D. I.* // Phys. Lett. 1964. V. 12. P. 272.
7. *Phillips P. R.* // Phys. Rev. B. 1965. V. 139. P. 491.
8. *Bloch C.* // Dan. Mat. Fys. Medd. 1952. V. 27, No. 8.
9. *Chrétien M., Peierls P.* // Nuovo Cimento. 1953. V. 10. P. 668.

## ПОЧТИ ЛОКАЛЬНАЯ МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ\*

Совместно с Г. И. Колеровым

## § 1. Введение

В работах Н. Н. Боголюбова [1, 2] по теории матрицы рассеяния было показано фундаментальное значение принципа микроскопической причинности для построения  $S$ -матрицы. Равенство

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \left[ \frac{\delta\hat{S}}{\delta\varphi(y)} \hat{S}^+ \right] = 0 \quad \text{для} \quad x \lesssim y \quad (1)$$

является условием микропричинности (локальности), записанным непосредственно для  $S$ -матрицы. Здесь  $\varphi(x)$  и  $\varphi(y)$  — поля, от которых функционально зависит  $S$ -матрица; знак  $\lesssim$  означает, что точка  $x$  предшествует или пространственноподобна точке  $y$ .

В связи с развитием нелокальных теоретических схем, в которых в той или иной форме нарушается микроскопическая причинность, возникает вопрос о существовании  $S$ -матрицы, удовлетворяющей условию унитарности и некоторым ослабленным условиям причинности. Эти условия, в отличие от локального условия (1), могут быть сформулированы только на языке волновых пакетов, т. е. в той мере, в которой  $S$ -матрица допускает пространственно-временное описание. В настоящей работе показано существование нелокальной  $S$ -матрицы, близкой к некоторой локальной матрице  $\hat{S}$ .

## § 2. Макропричинность

Пусть дана матрица рассеяния

$$\hat{S} = 1 + i\hat{T}, \quad (1')$$

построенная на основе локальной теории. Эту матрицу можно представить в виде

$$\hat{S} = e^{i\hat{\eta}}, \quad (2)$$

\* Проблемы теоретической физики: Сб. статей, посвященный Николаю Николаевичу Боголюбову в связи с его шестидесятилетием. М.: Наука, 1969. С. 47–53.

где  $\hat{\eta}$  — эрмитов оператор фазы

$$\hat{\eta} = \hat{\eta}^+. \quad (3)$$

Условие (2) в явном виде обеспечивает унитарность матрицы  $S$ .

В импульсном представлении для реальных физических процессов матричные элементы матриц  $S$ ,  $T$  и  $\eta$  имеют вид

$$(p|\hat{S}|p') = \frac{\delta^4(\Sigma p - \Sigma p')}{\sqrt{2p_0} \dots \sqrt{2p'_0}} S(p, p') = \frac{S(p|p')}{\sqrt{2p_0} \dots \sqrt{2p'_0}}, \quad (4)$$

$$(p|\hat{T}|p') = \frac{\delta^4(\Sigma p - \Sigma p')}{\sqrt{2p_0} \dots \sqrt{2p'_0}} T(p, p') = \frac{T(p|p')}{\sqrt{2p_0} \dots \sqrt{2p'_0}}, \quad (5)$$

$$(p|\hat{\eta}|p') = \frac{\delta^4(\Sigma p - \Sigma p')}{\sqrt{2p_0} \dots \sqrt{2p'_0}} \eta(p, p') = \frac{\eta(p|p')}{\sqrt{2p_0} \dots \sqrt{2p'_0}}, \quad (6)$$

где  $S(p, p')$ ,  $T(p, p')$  и  $\eta(p, p')$  — инвариантные функции импульсов в начальном состоянии ( $p'$ ) и в конечном ( $p$ ). Точки  $p$  и  $p'$  даны в трехмерном пространстве Лобачевского  $\mathcal{R}_3(p)$ , кривизна которого определяется массой частиц.

Пусть падающая волна в координатном пространстве  $\mathcal{R}_4(x')$  дана в виде волнового пакета<sup>1</sup>  $\phi_{\text{in}}(x')$ . Тогда рассеянная волна определится преобразованием

$$\phi_{\text{out}}(x) = \phi_{\text{in}}(x) + \int \mathfrak{G}(x, x') \phi_{\text{in}}(x') d^3 x', \quad (7)$$

где

$$\mathfrak{G}(x, x') = \frac{\partial T(x, x')}{\partial x'_0} \quad (8)$$

и  $T(x, x')$  есть инвариантная функция в пространстве  $\mathcal{R}_4(x)$  и  $\mathcal{R}_4(x')$ , связанная с функцией  $T(p|p')$  (5) соотношением [3, 4].

$$T(x, x') = \int \frac{e^{ipx}}{2p_0} d^3 p T(p|p') \frac{e^{-ip'x'}}{2p'_0} d^3 p'. \quad (9)$$

Пусть радиус взаимодействия есть  $b$ , а время взаимодействия  $\tau = b/v$ ,  $v$  — относительная скорость частиц. Преобразование (6) предполагает, что начальный момент времени  $x'_0$  взят при  $x'_0 = -T$ , а конечный момент времени  $x_0$  — при  $x_0 = +T$  и  $T \rightarrow \infty$  в том смысле, что отношение  $\tau/T$  считается конечной величиной, а величины порядка  $(\tau/T)^2$  уже игнорируются как бесконечно малые<sup>2</sup>. В работах [3, 4] было показано, что процесс столкновения

<sup>1</sup> Обозначения  $(p)$ ,  $(p')$ ,  $(x)$ ,  $(x')$  означают сокращения  $p = (p_1, p_2 \dots p_s, \dots, p_N)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_s, \dots, x_N)$  и т. п., где  $p_s = (p_{0s}, \mathbf{p}_s)$  есть импульс  $s$ -й частицы  $p_{0s} = +\sqrt{\mathbf{p}_s^2 + m_s^2}$ , а  $x_s = (x_{0s}, \mathbf{x}_s)$  — ее координаты,  $N$  — число частиц.

<sup>2</sup> Случай кулоновского взаимодействия требует специального рассмотрения.

частиц может быть описан достаточно хорошо локализованными волновыми пакетами, если удовлетворены неравенства

$$\frac{\Delta^2}{\lambda} \gg T\bar{v} \gg \Delta \gg \lambda, \quad (10)$$

где  $\Delta$  — начальные размеры пакета (т. е. в момент его выхода из поглощающей диафрагмы, при  $x'_0 = -T$ ),  $\lambda$  — длина волны, характеризующая средний импульс пакета  $\bar{p} = \hbar/\lambda$ ,  $\bar{v} = \bar{p}/\bar{E}$  — средняя скорость пакета,  $\bar{E}$  — его средняя энергия [6, 7].

Использование локализованных пакетов позволяет сформулировать условие макроскопической причинности [3–5]. Это условие формулируется вне области взаимодействия, т. е. для расстояний  $R \gg b = \tau\bar{v}$  и не ближе волновой зоны, т. е. для  $R \gg \lambda$ . Это условие гласит: влияние начального пакета  $\Phi_{\text{in}}$  на рассеянный (рожденный) пакет в волновой зоне (или вне зоны взаимодействия, смотря по тому, что больше,  $\lambda$  или  $b$ ) должно исчезать вне сферы  $R = cT$  ( $c$  — скорость света) существенно быстрее  $1/R$ . Это ослабленное условие причинности в дальнейшем считается *достаточным*.

### § 3. Построение почти локальной матрицы

Пусть матрица рассеяния  $\hat{S}$  может быть представлена в виде ряда по степеням константы взаимодействия  $g$ :

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} g^n \hat{S}_n, \quad \hat{S}_0 = 1. \quad (11)$$

Представим в виде такого же ряда оператор фазы  $\eta$ :

$$\hat{\eta} = \sum_{s=0}^{\infty} g^{s+1} \hat{\eta}_s. \quad (12)$$

Подстановка (12) в (2) приводит к соотношению

$$\hat{S}_n = \sum_{m=0}^n \frac{i^m}{m!} N(m, m-k), \quad n \geq 1, \quad (13)$$

где  $N$  есть форма порядка  $k$ , составленная из операторов  $\hat{\eta}_a, \hat{\eta}_b, \dots, \hat{\eta}_c$ :

$$N(m, m-k) = \sum_{a,b,c} (\hat{\eta}_a, \hat{\eta}_b \dots \hat{\eta}_c) \delta_{a+b+\dots+c, n-m}. \quad (14)$$

В частности:

$$i\hat{\eta}_1 = \hat{S}_1, \quad (15)$$

$$i\hat{\eta}_2 = \hat{S}_2 + \frac{1}{2} \hat{S}_1^2, \quad (15')$$

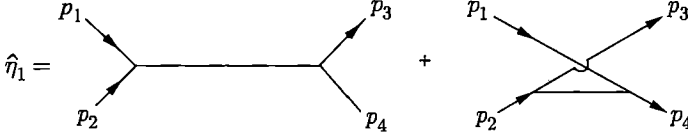


$$i\hat{\eta}_3 = \hat{S}_3 + \frac{1}{2!}(\hat{S}_2\hat{S}_1 + \hat{S}_1\hat{S}_2) + \frac{1}{3!}\hat{S}_1^3. \quad (15'')$$

Для построения скалярной матрицы в качестве простого примера возьмем исходную каузальную матрицу  $S_c$ , соответствующую кубичному взаимодействию:

$$W = g : \varphi^3 :, \quad (16)$$

и будем искать акаузальную матрицу  $S_{ac}$ , близкую к  $S_c$ . Матричные элементы оператора фазы  $\eta$  для взаимодействия (16) во втором приближении описываются диаграммами, показанными на рисунке.



Этот процесс упругого рассеяния описывается матричным элементом

$$\langle p | i\hat{\eta} | p' \rangle = i \frac{\delta^4(\Sigma p - \Sigma p')}{\sqrt{2p_0} \dots \sqrt{2p'_0}} \tilde{\mathcal{D}}_c(p - p') [\tilde{\mathcal{D}}_c(p_3 - p_1) + \tilde{\mathcal{D}}_c(p_1 + p_2)], \quad (17)$$

где  $\mathcal{D}_c(p)$  есть фурье-образ причинной функции.

Применим эти матричные элементы к преобразованию (7), имея в виду, что согласно (1), (15) и (17), с точностью до  $g^2$ ,  $T = \hat{\eta}_2$ . В результате получаем

$$\Phi_{\text{out}}(x_4, x_3) = \phi_{\text{in}}(x_4 x_3) + \int \mathfrak{G}(x_4, x_3 | x_2, x_1) \Phi_{\text{in}}(x_2, x_1) d^3 x_2 d^3 x_1, \quad (18)$$

где

$$\mathfrak{G}(x_4, x_3 | x_2, x_1) = \frac{\partial^2}{\partial x_2^0 \partial x_1^0} T(x_4, x_3 | x_2, x_1), \quad (19)$$

$$T(x_4, x_3 | x_2, x_1) = \int d^4 \alpha e^{i\alpha(p_4 + p_3 - p_2 - p_1)} \times \\ \times [\tilde{\mathcal{D}}_c(p_3 - p_1) + \tilde{\mathcal{D}}_c(p_4 - p_2)] e^{i(p_4 x_4 + p_3 x_3 - p_2 x_2 - p_1 x_1)} \frac{d^3 p_4 d^3 p_3}{2p_4^0 2p_3^0} \frac{d^3 p_2 d^3 p_1}{2p_2^0 2p_1^0}, \quad (20)$$

$$\phi_{\text{in}}(x_2, x_1) = u_2(x_2) u_1(x_1), \quad (21)$$

где  $u_2(x_2)$  и  $u_1(x_1)$  — волновые пакеты, возникающие при  $x_1^0, x_2^0 = -T$ . Подстановка (20) в (19) и (18) приводит к результату

$$\Phi_{\text{out}}(x_4, x_3) = \Phi_{\text{in}}(x_4, x_3) + \int \mathcal{D}^+(x_4 - x) \mathcal{D}^+(x_3 - y) \mathcal{D}_c(x - y) d^4 x d^4 y + \\ + \int \mathcal{D}^+(x_4 - y) \mathcal{D}_c(x - y) \Phi_{\text{in}}(x, x) d^4 x d^4 y. \quad (22)$$

Поскольку исходная матрица рассеяния предположена локальной, то эти преобразования основываются на принципе микропричинности для поля  $\varphi(x)$ :

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \mathcal{D}(x - y). \quad (23)$$

Следовательно, преобразования (22), безусловно, удовлетворяют более слабым требованиям макропричинности.

Мы теперь построим акаузальную  $S$ -матрицу, заменяя в (22)  $\mathcal{D}_c(x - y)$  на

$$\mathcal{D}_{ac}(x - y) = \int \mathcal{D}_c(x - y - \xi) \rho(\xi, n) d^4 \xi, \quad (24)$$

где  $\rho(\xi, n)$  есть формфактор, зависящий от единичного, времениподобного вектора  $n$ . Такой вектор<sup>1</sup> позволяет локализовать нарушение причинности в малой, пространственно-временной области в неопределенном пространстве Минковского  $\mathcal{R}_4(x)$ .

Именно, формфактор (или «псевдоисточник»)  $\rho(\xi, n)$  сильно убывает вне эллипсоида

$$2(\xi n)^2 - \xi^2 = a^2, \quad (25)$$

$a$  — «элементарная» длина. Из (24) имеем

$$\mathcal{D}_{ac}(x) = \int e^{ipx} \tilde{\mathcal{D}}_c(p) \tilde{\rho}(p, n) d^4 p, \quad (25')$$

где

$$\tilde{\rho}(p, n) = \int \rho(\xi, n) e^{-ip\xi} d^4 \xi. \quad (26)$$

В качестве примера можно взять<sup>2</sup>

$$\tilde{\rho}(p, n) = \frac{M^2}{2(pn)^2 - p^2 - M^2}, \quad M = \frac{1}{a}. \quad (27)$$

Тогда

$$\rho(\xi, n) \simeq \frac{e^{-MR}}{R^2}. \quad (28)$$

Вычислим теперь  $\mathcal{D}_{ac}(x)$ . Избегая длинных выкладок, предположим, что  $m = 0$ . Тогда

$$\mathcal{D}_c(x) = \frac{1}{r} \delta^+(t - r) + \frac{1}{r} \delta^-(t + r), \quad (26')$$

где

$$\delta^\pm(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^A e^{\pm i\nu z} d\nu, \quad A \rightarrow \infty. \quad (27')$$

<sup>1</sup> По поводу выбора вектора  $n$  см. [3, 8, 9–11].

<sup>2</sup> Другие примеры см. в [9].

Достаточно рассмотреть первый член в (26'). Тогда мы получим  $\mathcal{D}_{ac}^+(x)$ :

$$\mathcal{D}_{ac}^+(x) = \int \mathcal{D}_c^+(x - \xi) \rho(\xi, n) d^4 \xi.$$

Заменим в (26')  $t$  на  $t - \tau$ , ( $\tau = \xi_4$ ) и  $r(x)$  на  $r(\mathbf{x} - \xi) = r(\mathbf{x}) + \alpha \xi$ , где  $\alpha$  — единичный вектор, параллельный  $\mathbf{x}$ . Получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ac}^+(x) &= \frac{1}{r} \int \rho(\xi, n) d^3 \xi d\tau \int_0^A e^{i\nu(t-\tau-\tau-\alpha\xi)} d\nu = \\ &= \frac{1}{r} \int_0^A e^{i\nu(t-r)} \tilde{\rho}(\nu, \alpha\nu, n) d\nu = \frac{1}{r} \int_0^A e^{i\nu(t-r)} \frac{M^2}{2\nu^2 + M^2} d\nu = \\ &= \frac{1}{r} \Delta^+(t - r, A, M), \quad A \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (29)$$

Эта последняя функция аппроксимирует  $\delta^+(t - r)$ :

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \Delta^+(t - r, A, M) = \delta^+(t - r). \quad (30)$$

Поэтому *макроскопическая причинность не нарушена*.

Возвращаясь к импульсному представлению для  $\hat{\eta}_2$ , имеем

$$\begin{aligned} \langle p_4 p_3 | \hat{\eta}_2 | p_2 p_1 \rangle &= \frac{\delta^4(p_4 + p_3 - p_2 - p_1)}{\sqrt{2p_4^0 2p_3^0 2p_2^0 2p_1^0}} \times \\ &\times [\tilde{\mathcal{D}}_c(p_3 - p_1) \tilde{\rho}(p_3 - p_1, n) + \tilde{\mathcal{D}}_c(p_4 - p_2) \tilde{\rho}(p_4 - p_2, n)]. \end{aligned} \quad (31)$$

Таким образом, если

$$\tilde{\rho}(p_3 - p_1, n) = \tilde{\rho}^*(p_1 - p_3, n), \quad (32)$$

$$\tilde{\rho}(p_4 - p_2, n) = \tilde{\rho}^*(p_2 - p_4, n), \quad (32')$$

то при условии симметрии вектора  $n$  при перестановках импульсов  $p_3, p_1, p_4, p_2$  матрица  $\tilde{\rho}(p, n)$  будет эрмитовой. Поэтому и оператор  $\hat{\eta}_2$  также будет эрмитовым. Необходимая симметрия  $n$  может быть обеспечена, если положить

$$n = \frac{\mathcal{P}}{\sqrt{\mathcal{P}^2}}, \quad (33)$$

где  $\mathcal{P}$  — полный импульс системы.

Таким образом, переход от  $\mathcal{D}_c(x)$  к  $\mathcal{D}_{ac}(x)$  (24) не нарушает эрмитовости оператора  $\eta$  и тем самым сохраняет унитарность  $S$ -матрицы. Заметим, что введение формфактора (27) не приводит к появлению существенно особых

точек на бесконечности. Действительно, дополнительные множители в (31)  $\tilde{\rho}(p_3 - p_1, n)$  и  $\tilde{\rho}(p_4 - p_2, n)$  равны  $\tilde{\rho}(q, n)$  (27) и сводятся в системе центра масс к простому выражению

$$\tilde{\rho}(q, n) = \frac{M^2}{q^2 + M^2} = \frac{M^2}{M^2 - t},$$

а в лабораторной системе  $\tilde{\rho}(q, n)$  для рассеяния вперед равно

$$\tilde{\rho}(q, n) = \frac{M^2}{(E - m)^2 + M^2}. \quad (34)$$

Поэтому рассмотренная нами акаузальная матрица при достаточно большой величине  $M = 1/a$  близка к каузальной — она «почти» каузальная. Можно ли рассмотренной акаузальной матрице сопоставить какое-либо физическое поле (или «почти» поле) — составит предмет дальнейших исследований.

### Список литературы

1. Боголюбов Н. Н. // Изв. АН СССР, сер. физ. 1963. Т. 19. С. 237.
2. Боголюбов Н. Н. // УФН. 1955. Т. 55. С. 199.
3. Blokhintsev D. I., Kolerov G. I. // Nuovo Cim. 1966. V. 44. P. 974. — Статья № 94 в наст. изд. — Прим. ред.
4. Blokhintsev D. I. Preprint IC/67/36. Treiste, JINR, 1967.
5. Blokhintsev D. I. JINR Preprint E2-3293. Dubna, 1967.
6. Блохинцев Д. И. // Физика высоких энергий и частиц: Сб. Киев: Наукова думка, 1967.
7. Blokhintsev D. I. // Acta Phys. Sc. 1967. V. 22. P. 307.
8. Blokhintsev D. I., Kolerov G. I. // Nuovo Cim. 1964. V. 34. P. 163.
9. Blokhintsev D. I. // Phys. Lett. 1964. V. 12. P. 272.
10. Блохинцев Д. И. // Ат. энергия. 1963. Т. 14. С. 105. — Статья № 90 в наст. изд. — Прим. ред.
11. Ingraham R. L. Renormalization theory of quantum field theory with a cutoff. Gordon Breach. N. Y.—London, 1968.

## О КВАНТОВАНИИ СУЩЕСТВЕННО-НЕЛИНЕЙНОГО ПОЛЯ\*

Под существенно-нелинейным полем понимается поле, подчиняющееся уравнению с характеристиками, зависящими от самого поля или его производных. Сначала рассматривается простейший пример квантования существенно нелинейной системы с одной степенью свободы. Далее описывается метод квантования существенно нелинейного поля типа поля Борна-Инфельда.

### Введение

Рассмотрим класс скалярных полей  $\varphi(x, t)$ , подчиняющихся уравнению, вытекающему из релятивистски-инвариантного лагранжиана

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{K}), \quad \mathcal{K} = \frac{1}{2}(\varphi_t^2 - \varphi_x^2) \quad (1)$$

(здесь  $\varphi_t = \partial\varphi/\partial t$ ,  $\varphi_x = \partial\varphi/\partial x$ ). Само уравнение гласит

$$A\varphi_{tt} + 2B\varphi_{tx} + C\varphi_{xx} = 0, \quad (2)$$

где  $\varphi_{tt}$ ,  $\varphi_{tx}$ ,  $\varphi_{xx}$  — вторые производные, а коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  суть функции  $\varphi_t$  и  $\varphi_x$ . Поле  $\varphi(x, t)$ , подчиняющееся этому уравнению, в широком классе функций  $\mathcal{L}(\mathcal{K})$  не содержит сингулярностей, а важнейшие интегральные величины, как то энергия, импульс и т.п. оказываются конечными<sup>1</sup>. Уравнение (2) радикально отличается от рассмотренных до сих пор в квантовой теории поля тем, что имеет криволинейные характеристики. Чтобы подчеркнуть это отличие, мы называем его «существенно нелинейным полем». В локальной системе координат, где коэффициент  $B = 0$ , скорость распространения сигнала (взаимодействия) есть

$$u = \sqrt{-\frac{C}{A}} = u(\varphi_t, \varphi_x) \quad (3)$$

и зависит от производных поля  $\varphi_t, \varphi_x$ . Подобная ситуация имеет место и в гравитационном поле. В зависимости от конкретного вида лагранжиана (1) и начальных данных эта скорость может быть:

а) всюду меньше скорости света в пустоте  $c$ ;

б) в некоторых областях пространства-времени при больших  $\varphi_t/b$ ,  $\varphi_x/b$  (здесь  $b$  — поле, изменяющее масштаб нелинейности)  $|u|$  может быть больше  $c$ ;

в) возможно, что в некоторой области скорость  $u$  станет мнимой — это состояние можно назвать «световым коллапсом»<sup>1</sup>.

Ясно, что в случае а) применимы обычные правила квантовой теории поля и квантование могло быть введено посредством канонического правила<sup>2</sup>

$$[\hat{\Pi}(x', 0), \hat{\varphi}(x'', 0)] = i\hbar\delta(x' - x''), \quad (4)$$

где  $\hat{\Pi}$  — оператор канонического импульса, а  $\hat{\varphi}$  — оператор поля и, как обычно:  $[\hat{A}\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ . Возникающая при этом задача нахождения собственных значений оператора Гамильтона  $H$  или задача вычисления  $S$ -матрицы представляет исключительные трудности.

В последнее время имеется успех в решении классической задачи Коши для уравнений поля, вытекающих из лагранжиана (1) [4].

В этой ситуации нам представляется полезным сначала привести методику решения квантово-механической задачи с одной степенью свободы, имеющей также «существенно-нелинейный» лагранжиан, подражающий лагранжиану (1).

## 1. Простейшая существенно-нелинейная система

Под такой системой мы будем подразумевать систему с одной степенью свободы, описываемую лагранжианом

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\hat{\mathcal{K}}), \quad \hat{\mathcal{K}} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 - U(q), \quad (5)$$

где  $\hat{p}^2/2$  есть оператор кинетической энергии,  $\hat{p} = d\hat{q}/dt$  — оператор скорости,  $U(q)$  — оператор потенциальной энергии; предполагается, что функция  $U(q) = 0$  для  $|q| > a$  и интегрируема в интервале  $(-a, +a)$ . Определим канонический импульс  $\hat{\Pi}$  формулой

$$\hat{\Pi} = \frac{1}{2}[M(\hat{\mathcal{K}})\hat{p} + \hat{p}M(\hat{\mathcal{K}})], \quad (6)$$

здесь

$$M(\hat{\mathcal{K}}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\mathcal{K}}} \quad (7)$$

<sup>1</sup> Ранее я называл это особое состояние «комком событий», см. [2, 3]

<sup>2</sup> Чаще всего в правой части формулы (4) (см. также (14)) выбирается знак минус. Однако это непринципиально и постулирование коммутационных соотношений (4) для осциллятора означает следующую связь фоковских операторов  $a$  и  $a^+$  с операторами  $p$  и  $q$ :  $a = (p + i\omega q)/\sqrt{2\omega\hbar}$ ,  $a^+ = (p - i\omega q)/\sqrt{2\omega\hbar}$ ,  $[p, q] = i\hbar$ ,  $[a, a^+] = 1$ . — Прим. ред.

есть оператор массы. Симметризованный оператор функции Гамильтона в соответствии с функцией Лагранжа (5) имеет вид

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{\Pi}\hat{p} + \hat{p}\hat{\Pi}) - \mathcal{L}(\hat{\mathcal{K}}), \quad (8)$$

или

$$\hat{H} = T(\hat{\mathcal{K}}) + \frac{1}{2}[UM(\hat{\mathcal{K}}) - M(\hat{\mathcal{K}})U], \quad (8')$$

где

$$T(\hat{\mathcal{K}}) = M(\hat{\mathcal{K}})2\hat{\mathcal{K}} - \mathcal{L}(\hat{\mathcal{K}}). \quad (9)$$

Далее, согласно каноническому правилу квантования имеем

$$[\hat{\Pi}, \hat{q}] = i\hbar. \quad (10)$$

Формулы (5), (6), (7) вместе с квантовым условием (10) определяют рассматриваемую механическую систему. Задача заключается в нахождении собственных значений и собственных функций оператора гамильтона  $\hat{H}$  (8').

Из формулы (6) видно, что в рассматриваемой задаче масса является оператором. Поэтому связь между скоростью частицы  $\hat{p} = d\hat{q}/dt$  и каноническим импульсом  $\hat{\Pi}$  оказывается стохастической. Это обстоятельство можно рассматривать и с иной точки зрения. Именно, можно считать, что масса осталась постоянной (равной 1), а изменилась метрика времени; именно, элемент времени изменяется теперь согласно формуле<sup>1</sup>

$$d\tau = \frac{1}{M(\mathcal{K})}dt. \quad (11)$$

Это соотношение подсказывает, что наиболее целесообразным представлением для решения поставленной задачи является представление, в котором оператор  $\hat{\mathcal{K}}$  диагонален (« $\mathcal{K}$ »-представление) или другое представление, близкое к нему.

## 2. Приведение гамильтониана к диагональному виду

Обратимся к « $\mathcal{K}$ »-представлению. В этом представлении из (6) и (7) следует

$$(\mathcal{K}'|\hat{\Pi}|\mathcal{K}'') = \frac{1}{2}[M(\mathcal{K}') + M(\mathcal{K}'')](\mathcal{K}'|\hat{p}|\mathcal{K}''), \quad (6')$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathcal{K}''} \frac{1}{2}[M(\mathcal{K}') + M(\mathcal{K}'')](\mathcal{K}'|\hat{p}|\mathcal{K}'')(\mathcal{K}'''|\hat{q}|\mathcal{K}'') - \\ & - \sum_{\mathcal{K}'''} \frac{1}{2}(\mathcal{K}''')(\mathcal{K}'|\hat{q}|\mathcal{K}''')[M(\mathcal{K}''') + M(\mathcal{K}'')](\mathcal{K}'')(\mathcal{K}'''|\hat{p}|\mathcal{K}'') = i\hbar\delta_{\mathcal{K}'\mathcal{K}''}. \quad (7') \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Сходная ситуация имеет место в теории относительности, где вместо  $t$  можно рассматривать собственное время  $d\tau = (m_0/m)dt$ , здесь  $m$  — зависящая от скорости масса частицы, а  $m_0$  — постоянная. [Правильное соотношение между  $\tau$  и  $t$  мы получим в том случае, если  $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , где  $v$  — скорость частицы в лабораторной системе. — Прим. ред.]

Перепишем теперь (7) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [M(\mathcal{K}') + M(\mathcal{K}'')] (\mathcal{K}' | \widehat{p} \widehat{q} - \widehat{q} \widehat{p} | \mathcal{K}'') + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{K}'''} \{ M(\mathcal{K}''') - M(\mathcal{K}'') \} (\mathcal{K}' | \widehat{p} | \mathcal{K}''') (\mathcal{K}''' | \widehat{q} | \mathcal{K}'') - \\ - [M(\mathcal{K}''') - M(\mathcal{K}')] (\mathcal{K}' | \widehat{q} | \mathcal{K}''') (\mathcal{K}''' | \widehat{p} | \mathcal{K}'') = i\hbar \delta_{\mathcal{K}' \mathcal{K}''}. \quad (7'') \end{aligned}$$

Исходное приближение заключается в пренебрежении в (7'') членами, содержащими разности масс  $M(\mathcal{K}''') - M(\mathcal{K}'')$  и  $M(\mathcal{K}''') - M(\mathcal{K}')$ , по сравнению с членами, содержащими сумму масс; разумеется, это приближение возможно не при всех видах лагранжиана  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{K})$  и потенциальной энергии  $U(q)$ . Оно будет тем лучше, чем меньше недиагональные члены  $(\mathcal{K}' | \widehat{q} | \mathcal{K}'')$  по сравнению с диагональными: в этом приближении соотношение (7'') принимает вид

$$(\mathcal{K}' | \widehat{p} \widehat{q} - \widehat{q} \widehat{p} | \mathcal{K}'') = \frac{i\hbar}{M(\mathcal{K})} \delta_{\mathcal{K}' \mathcal{K}''}, \quad (7''')$$

или иначе

$$[\widehat{p}, \widehat{q}] = i\hbar^*, \quad (12)$$

где

$$\hbar^* = \frac{\hbar}{M(\mathcal{K})}. \quad (13)$$

Эта формула является ключевой. Она показывает, что в первом приближении дело сводится к замене постоянной Планка на эффективную «постоянную»  $\hbar^*$ , являющуюся функцией  $\mathcal{K}$ . Величина  $M(\mathcal{K})$  играет роль переменной массы.

Из (12) и (13) видно, что при больших значениях величины  $M(\mathcal{K})$  система «расквантовывается», так как в этом случае  $\hbar^* \rightarrow 0$ . Напротив, при малых  $M(\mathcal{K})$  эффективная постоянная  $\hbar^*$  становится большой, квантовые флуктуации величин  $\widehat{p}$  и  $q$  также становятся большими, и мы приходим к крайнему квантовому случаю. В этом случае исходное приближение становится сомнительным. Если вернуться к аналогии с квантовым полем  $\varphi(x, t)$ , описываемым уравнением (2), то случай  $\hbar^* \rightarrow 0$  соответствовал бы сильным флуктуациям в скорости распространения сигнала  $u$ , или в переводе на язык геометрии сильным квантовым флуктуациям метрики<sup>1</sup>. Такая исключительная особенность этого случая дает нам право выделить его из других и дать ему особое название случая «суперквантового поля» (или «суперквантовой системы»).

Обратимся теперь к приведению оператора  $\mathcal{K}$  к диагональному виду. Из эффективного соотношения неопределенностей (12) следует, что оператор  $\widehat{p}$  в координатном представлении может быть записан в виде

$$\widehat{p} = i\hbar^* \frac{d}{dq}. \quad (14)$$

<sup>1</sup> Связь существенно нелинейной теории с метрикой была уже намечена в работе [6] и описана подробнее в работах [7] и [8].



Из (5) следует, что в этом представлении оператор  $\hat{\mathcal{K}}$  равен

$$\hat{\mathcal{K}} = -\frac{\hbar^{*2}}{2} \frac{d^2}{dq^2} - U(q), \quad (15)$$

так что уравнение для собственных функций этого оператора  $\Psi_{\mathcal{K}}(q)$  запишется в виде

$$\left[ \frac{\hbar^{*2}}{2} \frac{d^2}{dq^2} + U(q) \right] \Psi_{\mathcal{K}}(q) = -\mathcal{K} \Psi_{\mathcal{K}}(q). \quad (16)$$

В силу принятых ранее ограничений на потенциал  $U$  функции  $\Psi_{\mathcal{K}}(q)$  имеют асимптотический вид

$$\Psi_{\mathcal{K}}(q) \simeq N_{\mathcal{K}} e^{\pm i p q}, \quad (17)$$

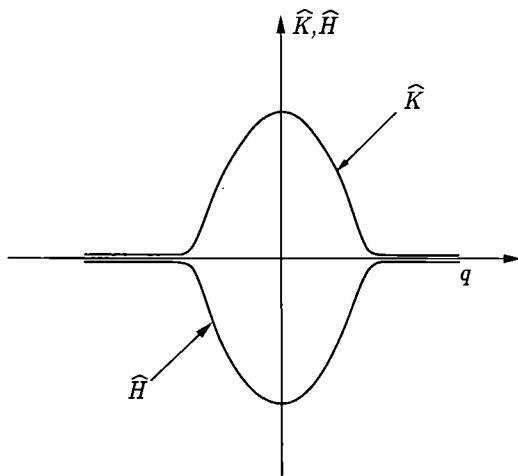
где

$$p = \sqrt{2\mathcal{K}} / \hbar^* \quad (18)$$

и  $N_{\mathcal{K}}$  есть нормировочный множитель, который может быть найден обычным методом; функции  $\Psi_{\mathcal{K}}(q)$  образуют ортонормированную систему функций:

$$\int \Psi_{\mathcal{K}'}^*(q) \Psi_{\mathcal{K}''}(q) dq = \delta(\mathcal{K}' - \mathcal{K}'') \quad (19)$$

(при условии, что спектр оператора  $\hat{\mathcal{K}}$  непрерывный), соответствующий этому предположению вид операторов  $\hat{\mathcal{K}}$  и  $\hat{H}$  условно (при  $p = 0$ ) изображен на рисунке. Оператор  $\hat{H}$  может иметь и дискретный спектр. Из формулы (8)



следует, что уравнение для собственных функций  $\Psi_E(\mathcal{K})$  оператора гамильтониана  $\hat{H}$

$$\hat{H} \Psi_E = E \Psi_E \quad (20)$$

в « $\mathcal{K}$ »-представлении будет иметь вид

$$T(\mathcal{K}') \Psi_E(\mathcal{K}') + \frac{1}{2} \int [M(\mathcal{K}') + M(\mathcal{K}'')] (\mathcal{K}' | \hat{U} | \mathcal{K}'') \Psi_E(\mathcal{K}'') d\mathcal{K}'' = E \Psi_E(\mathcal{K}'), \quad (21)$$

где матричный элемент потенциальной энергии равен

$$(\mathcal{K}'|\hat{U}|\mathcal{K}'') = \int \Psi_{\mathcal{K}'}^*(q)U(q)\Psi_{\mathcal{K}''}(q)dq. \quad (22)$$

Уравнение (21) является линейным и может быть решено обычными приемами.

В частности, если  $U(q)$  мало, то в первом приближении получим для собственных значений энергии

$$E = T(\mathcal{K}) \quad (23)$$

и собственных функций

$$\Psi_E(\mathcal{K}) = \varphi_E(\mathcal{K})\delta^+(E - T(\mathcal{K})), \quad (24)$$

причем функция  $\varphi_E(\mathcal{K})$  определится формулой

$$\begin{aligned} \varphi_E(\mathcal{K}) = \frac{1}{2} \int [M(\mathcal{K}) + M(\mathcal{K}')] (\mathcal{K}|U|\mathcal{K}') \times \\ \times \left\{ \frac{1}{E - T(\mathcal{K}')} + i\pi\delta[E - T(\mathcal{K}')] \right\} d\mathcal{K}'. \end{aligned} \quad (25)$$

Рассмотренный простой пример показывает, что в задаче о квантовании существенно нелинейного поля главная проблема заключается в выборе благоприятного приближения для метрики пространства-времени, которая становится стохастичной в силу стохастичности основной метрической величины — скорости распространения сигнала  $u(\varphi_x, \varphi_l)^1$ .

### 3. Квантование существенно-нелинейного поля

Обратимся теперь к квантованию поля, описываемого лагранжианом типа (1). Непосредственное применение метода, описанного в разд. 2, требовало бы приведения к диагональному виду оператора

$$\hat{\mathcal{K}} = \frac{1}{2}(\hat{\varphi}_t^2 - \hat{\varphi}_x^2) \quad (26)$$

в каждой точке пространства-времени  $x = (\mathbf{x}, t)$ , расположенной на какой-либо пространственноподобной поверхности  $\sigma(x)$ . Эта задача встречается с трудностью рационального определения оператора частоты

$$\hat{\omega} = \sqrt{-\nabla^2 + m^2} \delta(\mathbf{x})$$

<sup>1</sup> Это соображение подтверждается также результатами работы [4], где показано, что успех в решении существенно нелинейной задачи основывается на переходе от декартовой системы координат  $(x, t)$  к криволинейной  $(\alpha, \beta)$ , оси которой совпадают с направлениями характеристических кривых.

в координатном пространстве  $\mathfrak{R}_3(\mathbf{x})$ . Поэтому мы избираем другой путь, основанный на том обстоятельстве, что в определенном классе лагранжианов (1) и начальных данных эффективная постоянная Планка  $\hbar^*$  может оказаться малой, а следовательно, система будет находиться в состоянии, близком к возможному состоянию классического поля. Это соображение позволяет применить для решения задачи о квантовании существенно нелинейного поля метод функционального интегрирования по путям [8]. Согласно этому методу волновая функция  $\Psi\{v(x), t_2|u(x), t_1\}$ , описывающая состояние, в котором поле  $\varphi(x, t_2) = v(x)$  в момент времени  $t = t_2$ , если в момент времени  $t = t_1$  имелось состояние с  $\varphi(x, t_1) = u(x)$ , равна

$$\Psi\{v(x), t_2|u(x), t_1\} = \int e^{\frac{i}{\hbar} S\{\varphi(x, t)\}} d\Omega\{\varphi(x, t)\}, \quad (27)$$

где

$$S\{\varphi(x, t)\} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int dx \mathcal{L}(\mathcal{K}) \quad (28)$$

есть классическое действие, а  $\mathcal{L}(\mathcal{K})$  есть классический лагранжиан (1). Функциональное интегрирование в (27) производится по всем «путям» (по всем полям  $\varphi(x, t)$ , ведущим от поля  $\varphi(x, t_1) = u(x)$  к полю  $\varphi(x, t_2) = v(x)$ ).

Полагая, что поле мало отличается от классического, положим

$$\varphi(x, t) = \bar{\varphi}(x, t) + \psi(x, t), \quad (29)$$

где  $\bar{\varphi}(x, t)$  есть классическое поле, и разложим лагранжиан (1) в ряд

$$\mathcal{L}(\mathcal{K}) = \bar{\mathcal{L}}(\mathcal{K}) + \frac{1}{1!} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \mathcal{K}} (\bar{\varphi}_t \psi_t - \bar{\varphi}_x \psi_x) + \frac{M}{2!} Q(\psi_t \psi_x) + \dots \quad (30)$$

Здесь  $Q(\psi_t \psi_x)$  есть квадратичная форма

$$Q(\psi_t \psi_x) = g^{tt} \psi_t^2 + 2g^{tx} \psi_t \psi_x + g^{xx} \psi_x^2, \quad (31)$$

а  $g^{tt}, g^{tx}, g^{xx}$  — компоненты контравариантного тензора, равные

$$g^{tt} = \varepsilon(1 + \alpha \bar{\varphi}_t^2), \quad g^{tx} = -\varepsilon \alpha \bar{\varphi}_t \bar{\varphi}_x, \quad g^{xx} = -\varepsilon(1 - \alpha \bar{\varphi}_x^2), \quad (32)$$

где

$$\alpha = \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{L}} / \partial \mathcal{K}^2}{\partial \bar{\mathcal{L}} / \partial \mathcal{K}}, \quad \varepsilon = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}} / \partial \mathcal{K}}{M}, \quad (33)$$

а  $M$  есть среднее значение по времени величины  $\partial \bar{\mathcal{L}} / \partial \mathcal{K}$  на классической траектории (ср. с (7)).

Заметим, что уравнение

$$Q\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0 \quad (34)$$

определяет семейство поверхностей  $f(x, t) = \text{const}$ , которые есть поверхности фронта распространения сигнала (слабого разрыва, см. [2, 3, 6]) в пространстве с метрикой

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{tx}dtdx + g_{xx}dx^2, \quad (35)$$

где  $g_{tt}, g_{tx}, g_{xx}$  есть компоненты ковариантного метрического тензора в отличие от компонент контравариантного тензора (32).

При подстановке функции Лагранжа, взятой в виде ряда (30), в (28) второй член, содержащий производные в первой степени, исчезает в силу классических уравнений поля (2), поэтому, пользуясь (27), (28) и (30), получим

$$\Psi\{v(x), t_2 | u(x), t_1\} \equiv e^{\frac{i}{\hbar} S_{\text{кл}}} \int e^{\frac{i}{\hbar} \int Q(\psi_t, \psi_x) dtdx} d\Omega\{\psi(t, x)\}, \quad (36)$$

где, как и в (13), положено  $\hbar^* = \hbar/M$ .

Если известно классическое решение<sup>1</sup>, то, как следует из (36), задача сводится к гауссовым квадратурам в функциональном пространстве  $\mathfrak{R}\{\psi(x, t)\}$ . При этом целесообразно ввести такую систему координат  $(\xi, \tau)$ , в которой элемент длины  $ds^2$  принимает вид

$$ds^2 = d\tau^2 - d\xi^2. \quad (37)$$

В этом случае кривые  $\tau = \tau(x, t)$  и  $\xi = \xi(x, t)$  являются характеристиками уравнения (2). Из (36) видно, что классические приближения тем точнее, чем меньше эффективная постоянная Планка<sup>2</sup>.

### Список литературы

1. Born M. // Proc. Roy. Soc. A. 1934. V. 143. P. 410.
2. Блохинцев Д. И. // ДАН СССР. 1952. Т. 82. С. 553. — Статья № 81 в наст. изд. — Прим. ред.
3. Блохинцев Д. И., Орлов В. В. // ЖЭТФ. 1953. Т. 25. С. 513. — Статья № 82 в наст. изд. — Прим. ред.
4. Барбашов Б. М., Черников Н. А. // ЖЭТФ. 1966. Т. 51. С. 658.
5. Blochintsev D. I. // Nuovo Cim., Suppl. 3. Ser. X. 1956. P. 629.
6. Блохинцев Д. И. // ДАН СССР. 1966. Т. 168. С. 774. — Статья № 93 в наст. изд. — Прим. ред.
7. Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьеу // Препринт ОИЯИ Р2-4605. Дубна, 1969.
8. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по путям. М.: Мир, 1968.

Объединенный институт  
ядерных исследований

Поступила  
16 марта 1970 г.

<sup>1</sup> См. работу [4].

<sup>2</sup> См. работу [4].

## СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ И СУЩЕСТВЕННО-НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ\*

### Введение

Мой доклад является, в основном, обзором работ, выполненных в Дубне, по проблемам нелокальной и нелинейной теории поля. Эти проблемы находятся в тесной связи с проблемой теории гравитации.

Я начну с хорошо известных вещей, которые следует напомнить: если мы используем такие основные принципы как метрику пространства-времени, определенную в специальной теории относительности, и квантово-механическую динамику, то через несколько шагов мы приходим к заключению, что функции, определяющие распространение взаимодействия (распространение «сигналов») имеют особенности на световом конусе  $t^2 - \mathbf{x}^2 = 0$ . Здесь я имею в виду функции типа функции Грина  $\mathcal{G}(x)$  или причинной функции Фейнмана  $D_c(x)$ .

Эти особенности частично известны из макроскопической физики. Однако в макрофизике источники поля распределены в пространстве и поэтому особенности классических функций Грина на приводят к трудностям.

В квантовой теории поля в силу того, что элементарные частицы являются в первом приближении точечными частицами, особенности в вершине светового конуса оказываются довольно опасными: они ведут к бесконечному значению собственной энергии элементарной частицы, бесконечной поляризации вакуума и т. д. [1, 2].

Существует класс квантово-полевых моделей, в рамках которых эти трудности можно устранить с помощью перенормировки. Однако этот класс моделей очень ограничен.

По этой причине квантовая теория поля вероятно не является полной теорией.

Однако важно иметь в виду, что эти трудности локальной теории поля не следуют из эксперимента, а они остаются нерешенными проблемами самосогласованности теории.

---

\* Fundamental Problems of the Elementary Particle Theory: Proc. of the Seminar in the Course of the XV-th Intern. Rochester Conf. on High Energy Physics, Kiev, Aug. 29, 1970. — Kiev: ITP, 1970. — P. 41–58. — (ITP, 70–99). То же: 15-я Международная конференция по физике высоких энергий, Киев, 26 авг.–4 сент. 1970: Материалы: В 2 т. — Дубна, 1970. — Т. 2 — С. 827–841. — (ОИЯИ, 5481).

Более точно, из экспериментальных данных по электромагнитным и сильным взаимодействиям следует, что нет расхождений с предсказаниями локальной теории [3, 4] вплоть до расстояний  $10^{-14} - 10^{-15}$  см. Поэтому стремясь быть наиболее последовательным, мы должны сказать, что мы не знаем, являются ли трудности локальной теории следствием неадекватности основных принципов или же они обусловлены плохим выбором аппроксимаций (плохая математика).

Я склоняюсь рассматривать нелокальную теорию как попытку использовать лучшее приближение.

## 1. Основная проблема нелокальной или существенно-нелинейной теории

В нелокальной теории вводится некоторая элементарная длина  $a$  или некоторый абсолютный масштаб напряженности поля  $b$ , который позволяет ограничить пространственно-временную область  $\sim a^4$ , внутри которой предполагается в той или иной форме отказ от метрических соотношений, принятых в специальной теории относительности, в частности, отказ от принципа причинности в его классической формулировке. Но при этом предполагается, что обычная причинность выполняется на больших расстояниях  $|t|, r \gg a$  [2, 5, 6, 7]. Такая редуцированная причинность будет называться *макропричинностью*. Более точно *условие макропричинности* может быть сформулировано следующим образом: акаузальный сигнал, то есть сигнал, распространяющийся со скоростью большей чем скорость света  $c$  или имеющий неправильное направление по времени, должен убывать с расстоянием существенно быстрее, чем  $1/r$  [6, 7]. В данном докладе я не буду входить в детали этого чрезвычайно важного принципа (ср. [6, 7]).

Но я хотел бы подчеркнуть, что для выполнения условия макропричинности мы должны выполнить ряд условий.

I. Ограничить нелокальность малой пространственно-временной областью, не нарушая при этом лоренцевскую инвариантность. Нетривиальность этого условия состоит в том, что в локальной теории, как это было отмечено выше, сингулярности функций влияния расположены на световом конусе  $s^2 = 0$ , что не позволяет провести разделение на малые и большие расстояния без нарушения лоренцевской инвариантности. Релятивистски-инвариантная функция, локализованная в ограниченной области четырехмерного пространства-времени, не может быть функцией только интервала

$$s^2 = t^2 - \mathbf{x}^2 \quad (1)$$

(см. [2, 7]).

II. Если используется  $S$ -матричный формализм, то нелокальная акаузальная  $S_a$ -матрица должна быть унитарной

$$S_a S_a^+ = I. \quad (2)$$

III. Если рассматриваются заряженные частицы, то матрица рассеяния  $S_a$  должна быть калибровочно-инвариантной.

После этих общих замечаний я останавлиюсь на более специальной проблеме нелокальной теории, а именно, на построении нелокальной теории возмущений. Эта проблема заслуживает внимания еще и потому, что ее решение может оказаться полезным для исследования высших поправок в неперенормируемой теории поля.

Хорошо известно, что для построения последовательных приближений в локальной теории достаточно знать «причинный» пропагатор  $D_c(x - y)$ . Идея о том, что на малых расстояниях  $|\mathbf{x}| \simeq a$  и на малых временных интервалах  $|t| \simeq a$  закон распространения возмущения может меняться, была положена в основу различных вариантов нелокальной теории возмущений, разрабатываемых в нашей лаборатории.

## 2. Метод нелокального «обрезания»

Вначале я останавлиюсь на специальной технике построения теории возмущений, которая основывается на замене локальной причинной функции  $D_c(x)$  нелокальной функцией  $D_a(x)$ , определяемой формулой

$$D_a(x) = \theta(x_0)D_-(x, n, a) - \theta(-x_0)D_+(x, n, a), \quad (3)$$

где  $D_{\pm}(x, n, a)$  — нелокальные положительно- и отрицательно-частотные  $D$ -функции

$$D_{\pm}(x, n, a) = \int D_{\pm}(x - \xi)\rho(\xi, n, a)d^4\xi. \quad (4)$$

Здесь  $D_{\pm}(x - \xi)$  — «источник» (или «формфактор»), локализованный в евклидовой области  $|\xi| \leq a$ ,  $n$  — единичный времениподобный вектор, который позволяет локализовать  $\rho$  вблизи вершины светового конуса  $s^2 = 0$ . В качестве этого вектора можно взять 4-вектор скорости центра масс для каждой связной диаграммы Фейнмана [9]. Матрица рассеяния  $S_a$ , построенная в этом подходе, удовлетворяет условиям I и II.

## 3. Обобщение $T$ -произведения

Другой очень перспективной и, как я думаю, более элегантный метод построения нелокальной теории возмущения был недавно развит Г.В.Ефимовым. Его идея также основывается на обобщении функции  $D_c(x)$ . При этом используется следующий факт. Вакуумное среднее от  $T$ -произведения локальных полей  $\varphi(x)$  и  $\varphi(y)$ , взятых в разных мировых точках  $x$  и  $y$

$$D_c(x - y) = \langle 0|T(\varphi(x)\varphi(y))|0\rangle, \quad (5)$$

не определено в точке  $t_x = t_y$  и позволяет добавить в правую часть формулы (5) квазилокальный оператор [10–13]

$$K(x - y) = \sum_{n=0}^N c_n \square^n \delta(x - y), \quad (6)$$

где  $\square$  — оператор Даламбера. Новая гипотеза предполагает, что  $T$ -произведение может быть переопределено не только в совпадающих точках  $x = y$ , но также и в некоторой области вблизи этой точки.

Математически эта гипотеза реализуется путем добавки к (5) нелокального оператора

$$K(x - y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \square^n \delta(x - y), \quad (7)$$

вместо квазилокального (6). Предполагается также, что фурье-образ этого оператора  $\tilde{K}(p^2)$  является целой аналитической функцией в плоскости комплексной переменной  $p^2$ , причем ее порядок роста при  $|p^2| \rightarrow \infty$  равен или больше чем  $1/2$ <sup>1</sup>.

Новая «причинная» функция  $D_a(x)$  имеет вид

$$D_a(x - y) = D_c(x - y) + iK(x - y), \quad (8)$$

а ее фурье-образ определяется формулой

$$\tilde{D}_a(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} + \tilde{K}(p^2) = \frac{V(p^2)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad (9)$$

$$V(m^2) = 1. \quad (10)$$

Функция  $V(p^2)$  может рассматриваться как нелокальный формфактор, обеспечивающий сходимость интегралов в теории возмущений. Условие (10) является основой доказательства унитарности  $S$ -матрицы. Причинность оказывается выполненной благодаря тому, что акаузальная часть  $D_a(x - y)$ , т. е.  $iK(x - y)$ , не дает вклада в распространение сигнала от источника  $Q(y)$  в точку  $x$ . Функция  $\bar{Q}(x)$

$$\bar{Q}(x) = i \int K(x - y) Q(y) d^4 y \quad (11)$$

оказывается локализованной вблизи точки  $x = y$  на расстояниях порядка элементарной длины  $a$ . Разработанный метод применим к неперенормируемым и нелокальным полевым теориям.

#### 4. Суперпропагатор Волкова

Теперь я хочу перейти к методу, предложенному М. К. Волковым. Этот метод позволяет работать с неперенормируемыми и нелокальными теориями поля. Его идею можно понять, рассматривая нелинейный лагранжиан

$$\mathcal{L}(\varphi) = g \sum_n a_n \varphi^n, \quad (12)$$

<sup>1</sup> При меньших порядках роста оператор  $K(x)$  остается локальным.



где  $g$  — константа взаимодействия. Уже во втором порядке теории возмущений здесь возникает  $T$ -произведение, ведущее к суперпропэгатору

$$\Delta_c(c-y) = \sum_m \sum_n a_m a_n \langle 0 | T \varphi^m(x) \varphi^n(y) | 0 \rangle = \sum_n (-1)^n c_n D_c^n(x-y), \quad (13)$$

где  $D_c(x-y)$  — обычная причинная функция и  $c_n = n!a^2$ . Последовательный метод перехода в этой формуле в импульсное пространство был разработан в работах [14–16]. Метод базируется на представлении суммы в (13) интегралом следующего вида:

$$\Delta_c(x) = \frac{1}{2i} \int_{\alpha+i\infty}^{\alpha-i\infty} \frac{dz}{\sin \pi z} c(z) [D_c(x)]^z, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (14)$$

Это представление позволяет построить фурье-образ суперпропэгатора, не содержащий расходимостей:

$$\tilde{\Delta}_c(p) = 2\pi i \int_{\alpha+i\infty}^{\alpha-i\infty} dz \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \frac{c(z)}{(4\pi)^{2z}} \frac{(-p^2 + i\varepsilon)^{z-2}}{\Gamma(z)\Gamma(z-1)}. \quad (15)$$

Было показано, и это существенно, что 1) в высших приближениях расходимости не возникают и 2)  $S$ -матрица, построенная с использованием суперпропэгатора (15), унитарна.

Работы Г. В. Ефимова и М. К. Волкова, представленные на данную конференцию (секция 19), являются, вероятно, наиболее важными достижениями, полученными за последнее время при разработке методов работы с нелокальными и нелинейными теориями поля. Техника суперпропэгаторов, развиваемая М. К. Волковым, была использована А. Саламом в его интересной работе, посвященной выяснению роли гравитации как регулятора квантованных полей [17].

## 5. Существенно-нелинейные поля

Несмотря на достигнутый прогресс, современная нелокальная теория является скорее методом обрезания расходящихся интегралов в локальной теории, а не самосогласованной полевой теорией без расходимостей.

Представляет несомненный интерес получить теорию без расходимостей исходя из полевой динамики. В принципе, такая возможность существует в нелинейной полевой теории с неплоскими характеристиками. Далее поля такого типа будут называться существенно-нелинейными полями.

Поле Борна–Инфельда и гравитационное поле в ОТО дают пример таких полей в классической физике.

В теории нелинейного поля Борна–Инфельда «элементарная длина» возникает из масштаба поля, а именно,  $a = \sqrt{g/b}$ , где  $g$  — константа взаи-

модействия,  $b$  — заряд частицы. В теории гравитации такую роль играет гравитационный радиус  $r_g$

$$r_g = \frac{2m\gamma}{c^2}, \quad (16)$$

где  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{с}^2$  — гравитационная константа,  $m$  — масса тела. Недавно благодаря интересным идеям М. А. Маркова, только что доложенным [21], изучение возможной роли гравитации в мире элементарных частиц стало опять актуальной проблемой. Ниже я буду обсуждать более детально нелинейную теорию типа Борна–Инфельда, которая, вероятно, является простейшим случаем существенно-нелинейной полевой теории. Полевая модель, которую я имел в виду, описывается в простейшем случае лагранжианом<sup>1</sup>

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(K, I), \quad (17)$$

где два инварианта  $K$  и  $I$  определяются формулами

$$K = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right], \quad I = \frac{1}{2} \varphi^2. \quad (18)$$

Можно показать, что поверхность распространения волны (фронт сигнала) в этой теории,  $F(x, t)$ , определяется уравнением

$$A \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)^2 + 2B \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x} + C \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 = 0, \quad (19)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — функции поля  $\varphi$  и его производных  $\partial \varphi / \partial t$ . В области, где эти величины сравнимы с критическим полем  $b$ , линии, по которым распространяется сигнал, больше не лежат на световом конусе  $t^2 - x^2 = 0$ .

Скорость распространения сигнала  $u$  оказывается зависящей от поля и его производных. В частности, в локальной системе координат, где функция  $B$  равна нулю, эта скорость равна

$$u = \sqrt{-\frac{C}{A}}. \quad (20)$$

В связи с этим метрика, построенная по принципу постоянства скорости света, уже не адекватна полевой динамике (ср. [22]).

В зависимости от типа лагранжиана и набора начальных данных можно выделить три случая: 1) скорость сигнала  $u$  везде меньше скорости света  $c = 1$ ; 2) скорость  $u$  может быть больше, чем 1 и 3) скорость  $u$  оказывается мнимой.

В первом случае мы полностью остаемся в рамках обычной локальной теории. Важно, что в этом случае лагранжиан может быть выбран так, что

<sup>1</sup> Детальное обсуждение этого лагранжиана можно найти в работах [18, 19]. Соответствующая классическая задача Коши решена в [20]. См. также монографию [7].

сингулярности не возникают в классическом варианте этой теории. Во втором случае макропричинность нарушается, но она может быть восстановлена путем введения новой метрики [22]. И, наконец, в третьем случае причинность полностью нарушается: причинная последовательность теряет свое значение, и мы имеем дело с «кучей» событий, которые зависят друг от друга, но не вытекают однозначно одно из другого [18]. Возникает световой коллапс как экстремальный случай причинности. Я полагаю, что результаты, полученные нами в решении этой проблемы, являются только первым шагом в данной области.

Оказывается, можно указать приближенный метод решения квантовой задачи для системы с одной степенью свободы  $q$ , описываемой лагранжианом

$$L = L(\hat{K}), \quad \hat{K} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 - U(q), \quad (21)$$

где  $\hat{p} = dq/dt$ . Метод основывается на приведении «свободного» лагранжиана  $K$  к диагональному виду. В таком « $K$ »-представлении удастся найти приближенное решение (энергетические уровни и волновые функции) в том случае, когда величина  $\hbar^*$ , которую я называю «эффективной» постоянной Планка,

$$\hbar^* = \frac{\hbar}{M(K)} \quad (22)$$

мала. Здесь

$$M(K) = \frac{\partial L}{\partial K}, \quad (23)$$

и коммутационные соотношения принимают вид

$$[\hat{p}, \hat{q}] = i\hbar^*. \quad (24)$$

Следует отметить, что в классическом случае канонически сопряженный импульс равен

$$\Pi = M \frac{dq}{dt} = Mp. \quad (25)$$

Это соотношение поясняет физический смысл формулы (24): если константа  $\hbar^*$  мала, то и квантовые флуктуации скорости  $dq/dt$  малы.

В полевой теории нет аналогичного  $K$ -представления. Тем не менее можно развить метод, который применим для исследования случая, когда существенно-нелинейное поле  $\varphi$  может быть приближенно разделено на две части

$$\varphi = \bar{\varphi} + \psi. \quad (26)$$

Здесь  $\bar{\varphi}$  — квазиклассическая часть, которая задает пространственно-временную метрику для квантовой части  $\psi$ . Далее я использую представление  $S$ -матрицы в виде фейнмановского функционального интеграла

$$S = \int d\varphi(x) \exp \left( \frac{i}{\hbar} \int \mathcal{L} dx dt \right). \quad (27)$$

Разлагая лагранжиан

$$\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}} + \frac{1}{2} M \overline{g}_{ik} \psi_i \psi_k + \dots, \quad (28)$$

где  $\psi_i = \partial\psi/\partial x_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ),  $\overline{M} = \partial\mathcal{L}/\partial K$ , мы приходим к метрическому тензору  $\overline{g}_{ik}$  с компонентами

$$\overline{g}_{ik} = g_{ik}^0 + \left( \frac{\overline{\partial^2 \mathcal{L}}}{\partial K^2} / \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} \right) \overline{\varphi}_i \overline{\varphi}_k. \quad (29)$$

Эта метрика совпадает с пространственно-временной метрикой в задаче о распространении нелинейного сигнала (19).

Критерий применимости этого метода точно такой же, как и в простейшем случае, рассмотренном выше:

$$\hbar^* = \frac{\hbar}{M} \ll \hbar. \quad (30)$$

Кратко рассмотренный пример возникновения динамической нелокальности очень интересен, однако на этом пути встречаются существенные математические трудности.

В заключение я хотел бы отметить следующее обстоятельство. Правомерность использования концепции поля может быть поставлена под сомнение в тех случаях, когда мы пытаемся работать вне рамок теории возмущений или же обращаемся к чрезвычайно малым пространственно-временным масштабам.

Однако я полагаю, что по крайней мере сейчас нет причин для отказа от эвристической значимости исследований, использующих понятие квантового поля.

## Список литературы

1. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. Научное изд-во технико-теоретической литературы, 1957.
2. Блохинцев Д. И. // АЭ. 1963. Т. 14. С. 105. — Статья № 90 в наст. изд. — *Прим. ред.*
3. Yennie D. // Сб. докл. симп. «Электромагнитные взаимодействия». М.: Мир, 1969. С. 123.
4. Блохинцев Д. И. // УФН. 1957. Т. 61. С. 137. — Статья № 84 в наст. изд. — *Прим. ред.*
5. Каржнец Д. А. // УФН. 1965. Т. 90. С. 129.
6. Blokhintsev D. I., Kolerov G. I. // Nuovo Cim. A. 1966. V. 44, № 4. P. 974. — Статья № 94 в наст. изд. — *Прим. ред.*
7. Блохинцев Д. И. Пространство, время в микромире. М.: Наука, 1970.
8. Blokhintsev D. I., Kolerov G. I. Почти локальная матрица рассеяния // Сб. «Проблемы теоретической физики», посвящ. Николаю Николаевичу Боголюбову в связи с его шестидесятилетием. М.: Наука, 1969. С. 47. — Статья № 95 в наст. изд. — *Прим. ред.*

9. Блохинцев Д. И., Колеров Г. И. Препринт ОИЯИ P2-4952. Дубна, 1970.
10. Efimov G. V. // Commun. Math. Phys. 1968. V. 7. P. 138.
11. Efimov G. V. // Commun. Math. Phys. 1967. V. 5. P. 42.
12. Efimov G. V. Preprint CERN TH-1087, 1969.
13. Efimov G. V. // Тр. II Междунар. совещ. по нелокальной теории поля, Азау, 15–25 марта 1970. Дубна: ОИЯИ 2-5400, 1970.
14. Volkov M. K. // Commun. Math. Phys. 1968. V. 7. P. 289.
15. Volkov M. K. // Ann. Phys. (N. Y.). 1968. V. 49. P. 202.
16. Volkov M. K. // Commun. Math. Phys. 1968. V. 15. P. 69.
17. Salam A. Rep. at the XV Conf. on High-Energy Physics, Kiev, Aug. 1970. (Section 20).
18. Блохинцев Д. И. // ДАН СССР. 1952. Т. 82, № 4. С. 553. — Статья № 81 в наст. изд. — Прим. ред.
19. Blokhintsev D. I. // Nuovo Cim. 1965. V. 3, No. 4. P. 629.
20. Барбашов Б. М., Черников Н. А. // ЖЭТФ. 1966. Т. 50, вып. 5. С. 1296; Т. 51, вып. 2(8). С. 658.
21. Markov M. A., Frolov V. P. JINR Preprint E2-4880. Dubna, 1970.
22. Блохинцев Д. И. // ДАН СССР. 1966. Т. 168, № 4. С. 774. — Статья № 93 в наст. изд. — Прим. ред.
23. Блохинцев Д. И. Препринт ОИЯИ P2-4941. Дубна, 1970. См. также Тр. II Междунар. совещ. по нелокальной квантовой теории поля, Азау, 15–25 марта 1970. Дубна: ОИЯИ 2-5400, 1970.

## СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА\*

Вычисляются флуктуации фазы волны, распространяющейся в стохастически однородной среде, в частности в физическом вакууме. Введено понятие стохастического пространства. Показано, что в релятивистском случае для получения сходящихся результатов необходимо вводить обрезаящий формфактор.

### Введение

Эта работа является развитием метода расчета распределения волн в среде со случайными характеристиками, ранее описанного в работе [1]. Здесь приводится более совершенный метод интегрирования уравнений для случайной фазы; далее, усовершенствовано усреднение по фазам случайного поля и, наконец, дано приложение к проблемам квантовой теории поля.

В ряде случаев оказывается целесообразным ввести понятие стохастического пространства [2]. Этим обстоятельством и обусловлено название статьи.

### 1. Распространение плоской волны

В качестве исходного образа мы рассматриваем плоскую волну

$$\Psi_p(x) = u(p) e^{ipx}, \quad (1)$$

где  $px = p^\alpha x_\alpha = Et - \mathbf{p}\mathbf{x}$ ,  $p = (E, \mathbf{p})$  есть импульс волны,  $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}$ , причем в квантовой теории параметр  $M$  играет роль массы частицы;  $u(p)$  — амплитуда волны.

Если эта волна распространяется в среде со случайными характеристиками, то, чтобы учесть влияние этой среды, в первом приближении мы внесем поправку в фазу волны (1), полагая ее равной

$$S(x) = px + \hat{\sigma}(x), \quad (2)$$

где  $\hat{\sigma}$  есть линейная функция некоторого случайного поля  $\hat{\varphi}(x)$ . Нетрудно показать, что эта добавочная фаза в линейном приближении удовлетворяет уравнению (см. [1])<sup>1</sup>

$$\frac{d\hat{\sigma}(x)}{d\tau} + \hat{F}(x) = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\tau = nx$  и  $n$  — вектор с компонентами  $n^\alpha = p^\alpha/M$ ; очевидно, что  $n^2 = 1$ . Поэтому  $\tau$  является собственным временем волны или в квантовой теории собственным временем частицы, имеющей импульс  $p$  и массу  $M$ .  $\hat{F}(x)$  есть линейная функция случайного поля  $\hat{\varphi}(x)$ , которая в общем случае может быть записана в виде

$$\hat{F}(x) = gn^\alpha n^\beta \dots \hat{\varphi}_{\alpha\beta} \dots(x), \quad (4)$$

где  $g$  — некоторая константа связи, а величина  $\hat{\varphi}_{\alpha\beta} \dots(x)$  есть компонента поля  $\hat{\varphi}(x)$ , которая может иметь различную тензорную размерность<sup>1</sup>. Это поле разложим в ряд Фурье

$$\hat{\varphi}_{\alpha\beta} \dots(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} e^{\lambda_{\alpha\beta} \dots} [\hat{a}_{k\lambda}^+ e^{ikx} + \hat{a}_{k\lambda} e^{-ikx}], \quad (5)$$

причем  $e^{\lambda_{\alpha\beta} \dots}$  — тензор, определяющий поляризацию ( $\lambda$ ) волны, а  $\hat{a}_{k\lambda}^+/\sqrt{2\omega_k}$ ,  $\hat{a}_{k\lambda}/\sqrt{2\omega_k}$  суть случайные амплитуды ряда Фурье. Вектор  $k$  имеет компоненты  $k = (\omega_k, \mathbf{k})$ , причем  $\omega_k = \omega(\mathbf{k})$ . В частности, для поля, удовлетворяющего уравнению Клейна,  $\omega_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}$ , где  $\mu$  — масса частиц поля  $\hat{\varphi}(x)$ ;  $V = L^3$  есть нормировочный объем. Позднее этот объем будет считаться бесконечно большим. Представляя  $x$  в виде  $x = x_{\parallel} + x_{\perp}$ ,  $x_{\parallel} = n(nx) = n\tau$ , получим из (1) с помощью (4) и (5)

$$\hat{\sigma}(x) = ig \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \frac{1}{\Omega_k(p)} (n^\alpha n^\beta \dots e^{\lambda_{\alpha\beta} \dots}) [\hat{a}_{k\lambda}^+ e^{ikx} + \hat{a}_{k\lambda} e^{-ikx}] f(\tau_0, x_{\perp}), \quad (6)$$

где  $f(\tau_0, x_{\perp})$  — произвольная функция от  $x_{\perp}$ , зависящая от выбора начальных условий при  $\tau = \tau_0$ . В дальнейшем мы будем считать, что  $\tau_0 = -\infty$  и  $f(-\infty, x_{\perp}) = 0$ . Величина  $\Omega_k(p)$  есть инвариантная частота

$$\Omega_k(p) = \frac{1}{M}(kp). \quad (7)$$

Во всех случаях, за исключением случая скалярного поля, величина  $\hat{\sigma}(x)$  может быть представлена в виде

$$\hat{\sigma}(x) = p^\alpha \hat{\xi}_\alpha(x), \quad (8)$$

где  $\hat{\xi}_\alpha(x)$  имеет смысл случайного смещения координаты  $x$ . Это обстоятельство позволяет рассматривать, помимо исходного пространства  $\mathfrak{R}_4(x)$ , которое мы назовем реперным, еще и стохастическое пространство  $\mathfrak{R}_4(\hat{X})$ . Координаты этого пространства  $\hat{X}$  связаны с координатами точек реперного пространства преобразованием

$$\hat{X} = x + \xi(x) \quad (9)$$

<sup>1</sup> Мы не рассматриваем здесь спинорное поле. Линейная зависимость  $F(x)$  от спинора  $\varphi(x)$  была бы невозможной.

и являются случайными величинами, зависящими от случайного поля  $\widehat{\varphi}(x)$ . В силу этого маркировка событий в стохастическом пространстве является вероятностной.

Понятие стохастического пространства или более обще стохастической геометрии может иметь значение, далеко выходящее за пределы рассматриваемого в этой статье вопроса (см. по этому поводу [2], § 41, 44, 45).

## 2. Вычисление средних

Представим амплитуду Фурье  $\widehat{a}_{k\lambda}$ , поля  $\widehat{\varphi}(x)$  в виде

$$\widehat{a}_{k\lambda}^+ = \widehat{A}_{k\lambda} e^{i\widehat{\Theta}_{k\lambda}}, \quad \widehat{a}_{k\lambda} = \widehat{A}_{k\lambda} e^{-i\widehat{\Theta}_{k\lambda}}, \quad (10)$$

где  $\widehat{A}_{k\lambda}$  и  $\widehat{a}_{k\lambda}$  — действительные величины. Тогда (6) можно переписать в виде

$$\widehat{\sigma}(x) = -2 \sum_k N_k^\lambda \widehat{A}_{k\lambda} \sin(kx + \widehat{\Theta}_{k\lambda}), \quad (11)$$

где

$$N_k^\lambda = \sigma \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \frac{1}{\Omega_k(p)} (n^\alpha n^\beta \dots e_{\alpha\beta}^\lambda). \quad (12)$$

В теории классических полей распределение случайного поля задается аддитивным функционалом  $d\omega\{\widehat{\varphi}(x)\} \geq 0$ . Мы предположим, что этот функционал имеет вид

$$d\omega\{\widehat{\varphi}(x)\} = \prod_k e^{-A_k^2/\Delta_k^2} \frac{dA_k}{\sqrt{\pi} \Delta_k} \frac{d\Theta_k}{2\pi}, \quad (13)$$

т.е. имеем нормальное распределение амплитуд  $A_k$  с дисперсией  $\Delta_k$  и равномерное распределение фаз  $\Theta_k$  (заметим, что ради упрощения записи мы опустим шапочки и индекс поляризации  $\lambda$  у амплитуд  $\widehat{A}_{k\lambda}$  и фаз  $\widehat{\Theta}_{k\lambda}$ ).

По определению величины  $d\omega\{\varphi(x)\}$  имеем для средних значений:

а) волны  $\Psi_p(x)$

$$\langle \Psi_p(x) \rangle = u_p e^{ipx} \int e^{i\widehat{\sigma}(x)} d\omega\{\widehat{\varphi}(x)\}, \quad (14)$$

б) интерференционной корреляции двух волн  $\Psi_{p'}^*(y)$  и  $\Psi_p(x)$

$$\langle \Psi_{p'}^*(y) \Gamma \Psi_p(x) \rangle = (u_{p'} \Gamma u_p) e^{-i(p'y - px)} \int e^{-i\widehat{\sigma}_{p'}(y)} e^{i\widehat{\sigma}_p(x)} d\omega\{\varphi(x)\}, \quad (15)$$

где  $\Gamma$  — любой спинорный оператор. Заметим, что корреляция (15) при  $x = y$  и  $\Gamma = \gamma^\mu$  ( $\gamma^\mu$  — матрица Дирака) совпадает с так называемой «вершинной» частью, известной из теории квантовых полей.

Подставляя теперь в (14) распределение (13) и выполняя интегрирование по амплитудам  $A_k$  и  $Q_k$ , получим

$$\int e^{i\widehat{\sigma}(x)} d\omega\{\varphi(x)\} = e^{-Q_p(x)} = \prod_k R_k, \quad (16)$$



где

$$R_k = \exp \left\{ -\frac{g^2}{2} \Delta_k^2 N_k^2 + \ln I_0 \left( \frac{\Delta_k^2 N_k^2}{4} \right) \right\}. \quad (17)$$

Здесь  $I_0(z)$  — бесселева функция. Согласно (12) величины  $N_k \sim 1/\sqrt{V}$ , поэтому при  $V \rightarrow \infty^3$  сумма от  $\ln I_0$  по  $k$  имеет порядок  $O(1/V^2)$  и ее можно опустить; это обстоятельство оправдывает наивную операцию замены  $\cos \Theta_k$  и  $\sin \Theta_k$  в экспоненте на их средние значения, которые равны нулю. Подставляя  $R_k$  в (16) и переходя к пределу, получим

$$Q_p(x) = \frac{g^2}{2} \int \frac{d^3 k}{2\omega_k} \frac{\Delta_k^2}{\Omega_k^2(p)} (n^\alpha n^\beta \dots e_{\alpha\beta\dots}^\lambda)^2. \quad (18)$$

Это выражение релятивистски инвариантно, если  $\omega_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}$  и если дисперсия  $\Delta_k^2$  есть инвариант. Если с полем  $\widehat{\varphi}(x)$  не связано никакого выделенного направления в пространстве Минковского  $Q_4(z)$ , то единственная возможность — считать, что  $\Delta_k^2 = \text{const}$ , т.е. амплитуды  $A_k$  имеют один и тот же закон распределения независимо от вектора  $k$ . Это предположение немедленно ведет к расходимостям в интеграле (18), именно

$$Q_p(x) \sim \frac{g^2}{2} \ln \frac{p_{\max}}{M} \quad (19)$$

и  $p_{\max} \rightarrow \infty$ . При  $\mu^2 = 0$  возникает еще и расходимость на нижнем пределе. Подобным же образом вычисляется и корреляция (15). Ради упрощения выкладок приводим результат для  $x = y$

$$\int \exp\{-i\widehat{\sigma}_{p'}(x)\} \exp\{i\widehat{\sigma}_p(x)\} dw\{\widehat{\varphi}(x)\} = \exp\{-Q_{p'p}(x)\}, \quad (20)$$

причем

$$Q_{p'p}(x) = \frac{g^2}{2} \int \frac{d^3 k}{2\omega_k} \Delta_k^2 \sum_\lambda \left\{ e_{\alpha\beta\dots}^\lambda \left[ \frac{n'^\alpha n'^\beta}{\Omega_k(p')} - \frac{n^\alpha n^\beta}{\Omega_k(p)} \right] \right\}. \quad (21)$$

Эта корреляция так же, как и величина (18), при  $\Delta_k^2 = \text{const}$  оказывается расходящейся. Заметим, что  $\Delta_k^2$  можно рассматривать как формфактор, обеспечивающий сходимость интегралов в (18) и (21). Если его считать функцией инварианта  $\Omega_k(p)$  (остальные инварианты, образованные из  $k$  и  $p$ , суть постоянные), то величины  $Q_p(x)$  и  $Q_{p'p}(x)$  — тоже инварианты (что и должно иметь место в релятивистски инвариантной теории), причем  $Q_p(x)$  будет просто числом, а  $Q_{p'p}(x)$  — функцией только  $q^2$ ,  $q = p' - p$  (если  $p$  и  $p'$  лежат на массовой поверхности, инвариант  $qp = 0$ ).

### 3. Квантовое поле

В этом случае случайные амплитуды  $\widehat{a}_{k\lambda}^+$  и  $\widehat{a}_{k\lambda}$  суть операторы, подчиняющиеся перестановочным соотношениям

$$[\widehat{a}_{k\lambda}, \widehat{a}_{k'\lambda'}^+] = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (22)$$

Далее, среднее по мере  $dw\{\widehat{\varphi}(x)\}$  должно быть теперь заменено на усреднение по волновому функционалу  $\Omega_0\{\widehat{\varphi}(x)\}$ , который является аналогом величины  $\sqrt{dw\{\widehat{\varphi}(x)\}} \exp iS_0(\widehat{\varphi})$ ; здесь  $S_0(\widehat{\varphi})$  — фаза функционала, а значок 0 указывает, что подразумевается вакуумное состояние поля  $\varphi(x)$ . Применяя для этого среднее обычные обозначения, перепишем формулы (16) и (20) в виде

$$\exp\{-Q_p(x)\} = \langle 0 | e^{i\widehat{\sigma}_p(x)} | 0 \rangle, \quad (16')$$

$$\exp\{-Q_{p'p}(x)\} = \langle 0 | e^{-i\widehat{\sigma}_{p'}(x)} e^{i\widehat{\sigma}_p(x)} | 0 \rangle, \quad (20')$$

где  $\langle 0 | L | 0 \rangle$  означает усреднение величины  $L$  по вакууму поля  $\widehat{\varphi}(x)$ . Дальнейшие выкладки основываются на соотношениях

$$\langle 0 | e^{\widehat{A}_k^+ + \widehat{A}_k} | 0 \rangle = \exp \left\{ \frac{1}{2} [\widehat{A}_k, \widehat{A}_k^+] \right\},$$

$$\langle 0 | \exp\{\widehat{A}_k^+ + \widehat{A}_k\} \exp\{\widehat{A}_{k'}^+ + \widehat{A}_{k'}\} | 0 \rangle = \exp \left\{ \frac{1}{2} [\widehat{A}_k, \widehat{A}_k^+] + \frac{1}{2} [\widehat{A}_{k'}, \widehat{A}_{k'}^+] + [\widehat{A}_k, \widehat{A}_{k'}^+] \right\}, \quad (23)$$

где  $[\widehat{A}, \widehat{B}]$  означает скобку Пуассона, которая считается  $c$ -числом. Вычисление средних в (16') и (20') с использованием (23), (23') и выражения для  $N_{k\lambda}$  (12) приводит в точности к формулам классической теории (18) и (21) при  $\Delta_k^2 = 1$ .

Таким образом, расходящийся результат является следствием предположения об *изотропности вакуума*, которое вытекает из требования релятивистской инвариантности.

Формула (21) тесным образом связана с теорией так называемых «когерентных состояний» [5]. Рассматриваемая в этой последней теории модель вершинной части отличается от рассмотренных здесь флуктуаций координаты спинорной частицы под действием поля  $\widehat{\varphi}(x)$  предположением, что преобладающее значение имеет нулевая гармоника, так что смещение  $\xi(x)$  считается не зависящим от  $x$ .

Далее, полезно заметить, что в случае векторного поля  $\widehat{\varphi}_\alpha(x)$  средний квадрат смещения  $\xi(x)$ , определенный формулой (8), равен

$$\langle \xi_\alpha^2(x) \rangle = \frac{g^2}{M^2} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} \frac{1}{\Omega_k^2(p)} \sum_\lambda (e_\alpha^\lambda)^2. \quad (24)$$

При  $|\mathbf{p}| \ll M$  получаем

$$\langle \xi_\alpha^2(x) \rangle = \frac{g^2}{M^2} \int \frac{d^3k}{2\omega_k^3} \sum_\lambda (e_\alpha^\lambda)^2. \quad (24')$$

Если положить  $g = e$  — заряду электрона, а под  $M$  разумеать его массу, то (24') совпадает с величиной квадрата смещения координаты электрона  $\langle \xi_\alpha^2(x) \rangle$ , которое определяет лэмбовский сдвиг уровня в атоме водорода (см. [5, 6]).

## 4. Гравитация

В работе [3] было показано, что если рассматривать флуктуации гравитационного поля, которые вызваны флуктуациями тензора импульса-энергии вакуумных полей, то мы приходим к сильно расходящимся выражениям для флуктуаций метрики (длины и времени).

Развитый здесь метод позволяет вычислить флуктуации фазы волны, вызванные нулевыми колебаниями *свободного* гравитационного поля.

Нетрудно показать, что в этом случае функция  $\hat{F}(x)$  равна

$$\hat{F}(x) = \frac{M}{2} \hat{h}^{\alpha\beta}(x) n_\alpha n_\beta, \quad (25)$$

где

$$\hat{h}^{\alpha\beta}(x) = \hat{g}^{\alpha\beta}(x) - g_0^{\alpha\beta} \quad (26)$$

и  $g_0^{\alpha\beta}$  есть метрический тензор в отсутствие гравитационных волн. Среди величин  $\hat{h}^{\alpha\beta}(x)$  только четыре независимых. Имея в виду эти компоненты, представим  $\hat{h}^{\alpha\beta}(x)$  в виде ряда

$$\hat{h}^{\alpha\beta}(x) = \frac{\gamma}{\sqrt{V}} \sum_k e^{\alpha\beta} (a_{k\lambda}^+ e^{ikx} + a_{k\lambda} e^{-ikx}). \quad (27)$$

Причем в отличие от (5) здесь введена константа  $\gamma$ , которая определяется таким образом, чтобы энергия гравитационной волны имела вид  $\sum_k n_k \hbar \omega_k$ ,

где  $n_k$  — целые числа, а  $\hbar \omega_k$  — энергия гравитона. С другой стороны, эта энергия выражается через интеграл от псевдотензора энергии-импульса (см., например, [7]). Это обстоятельство позволяет определить константу  $\gamma$ :  $\gamma^2 = 8\pi k/c^2$ , где  $k$  есть гравитационная постоянная ( $k = 6,67 \times 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ ). Выполняя вычисления, аналогичные описанным, в разд. 2, мы приходим к формулам (18) и (21) при  $\Delta_k^2 = 1$  и с константой  $g^2 = \gamma^2 M^2$ . Если восстановить обычную размерность, то легко убедиться, что величины  $Q_p(x)$  и  $Q_{p'p}(x)$  для случая гравитационного поля пропорциональны  $\Lambda_g^2$ ,  $\Lambda_g = \sqrt{(8\pi k/c^2)(\hbar/c)} = 0,8210^{-32} \text{ см}$  есть характерная длина, определяющая масштабы, за пределами которых флуктуации метрики могут стать существенными. Из приведенных расчетов видно, что без искусственного введения обрезającego формфактора флуктуации фазы  $\hat{\sigma}(x)$  оказываются неограниченными; то же можно сказать и о флуктуациях стохастической координаты  $\hat{X}$  (9). Это чрезмерное расплывание средних значений  $\langle \hat{\sigma}_p^2(x) \rangle$  и  $\langle \xi_p^2(x) \rangle$  обусловлено требованием однородности вакуума ( $\Delta_k^2 = \text{const}$ ). Физически ясно, что ограничить рассматриваемые флуктуации можно только учетом обратного влияния частицы на вакуум, иными словами, учетом возможной деформации вакуума в окрестности частицы. Упомянутое выше введение обрезającego формфактора может рассматриваться как формальный прием для учета этого влияния.

В заключение автор выражает благодарность В. А. Матвееву за полезное обсуждение.

## Список литературы

1. *Блохинцев Д. И.* // ДАН СССР. 1966. Т. 166. С. 574. — Статья № 92 в наст. изд. — *Прим. ред.*
2. *Блохинцев Д. И.* Пространство и время в микромире. М.: Наука, 1970.
3. *Blokhitsev D.* // Nuovo Cim. 1968. V. 16. P. 382.
4. *Matveev V. A., Tavkhelidze A. N.* JINR Preprint E2-5141. Dubna, 1970.
5. *Сморodinский Я. А.* // УФН. 1949. Т. 39. С. 325.
6. *Вельтон Т.* // Вопросы причинности в квантовой механике: Сб. М.: ИЛ, 1955;  
*Welton T.* // Phys. Rev. 1948. V. 74. P. 457.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Физматгиз, 1960. § 100.

Объединенный институт  
ядерных исследований

Поступила  
12 июля 1971 г.

## ПРИМЕНЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ И ТЕОРИИ ПОЛЯ\*

*Совместно с Б. М. Барбашовым*

### Введение

Создание инвариантной теории возмущений и приспособленного к ней метода перенормировок дало возможность построить согласующуюся с опытом количественную теорию квантовых электромагнитных процессов, которая в принципе позволяет вычислять физические величины с точностью до любого порядка по константе  $e^2/\hbar c = 1/137$ . Однако проблема сильных взаимодействий и изучение процессов с элементарными частицами высоких энергий, а также вопросы математической структуры квантовой теории поля (КТП) потребовали разработки новых методов, не связанных с теорией возмущений. В этом направлении был достигнут значительный успех, прежде всего связанный с разработкой аксиоматического подхода в КТП. Одним из бесспорных достижений такого подхода явилось открытие и обоснование дисперсионных соотношений, а также выяснение ряда важных физических свойств амплитуд реакций сильно взаимодействующих частиц на основе установленной в рамках аксиоматического подхода аналитической структуры этих амплитуд.

Несмотря на успехи, в аксиоматической формулировке КТП остается принципиальным вопрос о построении нетривиальных моделей КТП, сформулированных на языке полевых операторов, которые удовлетворяли бы всем требованиям аксиоматического метода.

В настоящее время физические величины, полученные методом теории возмущений, остаются единственными объектами, на которых проверяются или угадываются общие физические свойства теории сильных взаимодействий, такие, как аналитические, асимптотические свойства амплитуд и т. д. Таким образом, ряды теории возмущений остаются пока той «мастерской», где физики-теоретики опробуют новые методы или выводы аксиоматического подхода.

В связи с этим большой интерес представляет нахождение точно решаемых модельных примеров в КТП или, еще важнее, разработка прибли-

женных методов решения уравнения КТП, не опирающихся на разложение по константе связи. Одним из таких методов, представляющих собой кардинальную попытку выхода за рамки теории возмущений, является метод функционального интегрирования, или, иначе, «метод интегрирования по траекториям», впервые предложенный Фейнманом. Этот метод базируется на идее о движении микрочастицы как последовательности квантовых переходов по ненаблюдаемым траекториям. Это представление квантовой механики эквивалентно в принципиальном отношении обычному, однако физическая наглядность и изящество математической формулировки основной задачи квантовой теории — вычисления вероятностных амплитуд для квантовых переходов, характерные для этого нового метода, привлекли к нему внимание многих исследователей.

Целью настоящего обзора является краткое описание существа этого еще недостаточно популярного метода и рассмотрение важных физических результатов, которые были получены на этом пути в КТП. Как и всякий метод, претендующий на решение задач квантовой теории, метод функциональных интегралов не является универсальным и имеет свои проблемы и трудности. Эти трудности связаны, во-первых, с нахождением решения уравнений квантовых частиц в произвольном внешнем поле и, во-вторых, с функциональным усреднением этих решений по внешним полям с соответствующим весовым функционалом. Как первая, так и вторая задачи представляют в общем случае проблемы большой математической сложности. Дело в том, что в математике мы до сих пор не имеем разработанной теории и техники функционального интегрирования; единственный вид интегралов, поддающихся вычислению — это гауссовы интегралы или приводимые к ним путем замены функционального аргумента.

В этом обзоре мы ограничиваемся физическими результатами и оставляем в стороне вопросы строгого математического обоснования применяемых в описываемом методе приемов. Читателя, интересующегося математической стороной задачи интегрирования в функциональных пространствах, мы отсылаем к математическим обзорам Гельфанда и Яглома [1], Ковальчика [2] и к книге Каца [3].

## 1. Цепи Маркова в квантовой механике

В 1948 г. появилась теперь хорошо известная статья Фейнмана [4], в которой предлагалась новая формулировка нерелятивистской квантовой механики (КМ). В отличие от шредингеровской формы КМ, где основным объектом является волновая функция  $\psi(x, t)$ , подчиняющаяся уравнению Шредингера, в новой формулировке таким объектом стал пропагатор  $K(x', t'; x^0, t^0)$  волновой функции, знание которого позволяет определить  $\psi(x', t')$  в любой момент времени  $t'$  по начальному значению  $\psi(x^0, t^0)$ :

$$\psi(x', t') = \int K(x', t'; x^0, t^0) \psi(x^0, t^0) d^3 x^0. \quad (1)$$

Из (1) видно, что если в момент времени  $t^0$  частица находилась в точке  $x^0$  (это означает, что  $\psi(x^0 - x, t^0) = \delta(x^0 - x)$ ), то волновая функция  $\psi(x', t')$  попросту равна пропагатору  $K(x', t'; x^0, t^0)$ . Следовательно, пропагатор может рассматриваться как амплитуда вероятности перехода частицы из точки  $x^0$ , где она находилась в момент  $t^0$ , в точку  $x'$  к моменту времени  $t'$ , а эта вероятность  $P(x', t'; x^0, t^0)$ , согласно основному принципу КМ, равна

$$P(x', t'; x^0, t^0) = |\psi(x', t')|^2 = |K(x', t'; x^0, t^0)|^2. \quad (2)$$

С другой стороны, из самого определения пропагатора следует, что

$$K(x', t'; x^0, t^0) = \int K(x', t'; x'', t'') K(x'', t''; x^0, t^0) dx''. \quad (3)$$

Таким образом, амплитуда перехода из точки  $(x^0, t^0)$  в точку  $(x', t')$  может рассматриваться как результат перехода частицы из точки  $(x^0, t^0)$  в любую промежуточную точку  $x''$  в некоторый момент времени  $t''$  и последующего перехода из точки  $x''$  в точку  $x'$  к моменту времени  $t'$ . Рис. 1 иллюстрирует сказанное. Это важное свойство пропагатора, насколько нам известно, впервые было отмечено Дираком<sup>1</sup>.

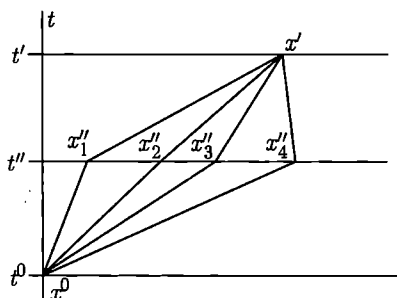


Рис. 1

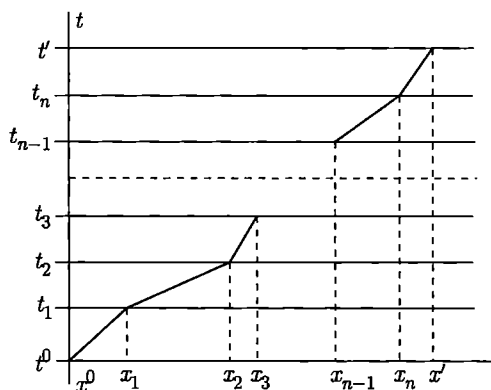


Рис. 2

Заметим, что в классической теории, например, в теории броуновского движения, вместо (2) мы имели бы для вероятности перехода

$$P(x', t'; x^0, t^0) = \int P(x', t'; x'', t'') P(x'', t''; x^0, t^0) dx'', \quad (4)$$

т.е. вероятность перехода из точки  $x^0$  в точку  $x'$  за время  $t' - t^0$  равна произведению вероятностей частицы попасть в любую промежуточную точку

<sup>1</sup> Р. А. М. Дирак. The Lagrangian in Quantum Mechanics. Phys. Z. Sowjetunion. 1933. Bd. 3. S. 64–72. Имеется перевод: П. А. М. Дирак. К созданию квантовой теории поля. М.: Наука, 1990. С. 209. См. также П. Дирак. Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979. § 32. — Прим. ред.

$x''$  за время  $t'' - t^0$  (ясно, что  $t' > t'' > t^0$ ), а затем из точки  $x''$  за время  $t' - t''$  «окончательно» попасть в точку  $x'$ .

Дробя промежутки времени и вводя новые промежуточные точки, получим из формулы (4)

$$P(x', t'; x^0, t^0) = \int_1 \dots \int_n P(x', t'; x_n, t_n) dx_n P(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}) \dots \dots P(x_2, t_2; x_1, t_1) dx_1 P(x_1, t_1; x^0, t^0), \quad (5)$$

в которой переход из точки  $(x^0, t^0)$  в точку  $(x', t')$  рассматривается как результат подобных же переходов через последовательность промежуточных точек  $(x_1, t_1)$ ,  $(x_2, t_2)$ , ...,  $(x_n, t_n)$ .

Такая последовательность называется цепью Маркова. В квантовой теории из выражения (3) для пропагатора мы можем получить формулу, аналогичную (5), именно:

$$K(x', t'; x^0, t^0) = \int_1 \dots \int_n K(x', t'; x_n, t_n) dx_n K(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}) \dots \dots K(x_2, t_2; x_1, t_1) dx_1 K(x_1, t_1; x^0, t^0). \quad (6)$$

Таким образом, в КМ цепь Маркова образована не вероятностями, а амплитудами вероятностей. Эта особенность квантовой теории («интерференция вероятностей») является чертой, радикально отличающей ее от классических теорий. Заметим, что различные попытки положить в основу КМ механику классическую терпят неудачу именно в этом пункте. На рис. 2 изображена одна из «траекторий», ведущих частицу из точки  $(x^0, t^0)$  в точку  $(x', t')$ ; времена  $t_j$  взяты эквидистантными так, что  $t_j = \Delta t j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Слово «траектория» взято в кавычки, так как по самому смыслу цепи Маркова каждый отрезок  $(x_j, t_j; x_{j-1}, t_{j-1})$  можно разбивать на более мелкие ломаные. Стало быть, наша «траектория» не имеет производной, как не имеет ее траектория частицы, совершающей броуновское движение.

В основе метода функционального интегрирования (или «интегрирования по путям») лежит предположение, что фаза пропагатора  $K(x_{j+1}, t_{j+1}; x_j, t_j)$ , равного амплитуде вероятности перехода из точки  $x_j, t_j$  в точку  $x_{j+1}$  в соседний момент времени  $t_{j+1} = t_j + \Delta t$  ( $\Delta t > 0$  и мало) определяется классическим действием  $W[x_{j+1}(t), x_j(t)]$ , равным

$$W[x_{j+1}, t_{j+1}; x_j, t_j] = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \mathcal{L}(\dot{x}(t), x(t)) dt, \quad (7)$$

где  $\mathcal{L}(\dot{x}, x)$  — лагранжиан классической системы, выписанный здесь для системы с одной степенью свободы. Подробнее, в нерелятивистском случае:

$$\mathcal{L}(\dot{x}, x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) - U(x(t)),$$



где  $m$  — масса частицы,  $\dot{x}(t)$  — ее скорость,  $U$  — потенциальная энергия, зависящая от координаты частиц  $x(t)$ . В малом промежутке времени  $\Delta t$  кривую  $x(t)$  заменим отрезком ломаной  $\tilde{x}(t)$ , проходящей через точки  $x(t_{j+1}) = x_{j+1}$  и  $x(t_j) = x_j$ . Тогда  $\dot{x}(t) \approx (x_{j+1} - x_j)/\Delta t$  и вместо (7) получим

$$W[x_{j+1}, t_{j+1}; x_j, t_j] = [m(x_{j+1} - x_j)^2/2\Delta t] - U(x_j)\Delta t.$$

Фейнмановский постулат квантования заключается в предположении, что

$$K(x_{j+1}, t_{j+1}; x_j, t_j) = (m/2\pi i \hbar \Delta t)^{1/2} \exp[(i/\hbar)\{[m(x_{j+1} - x_j)^2/2\Delta t^2] - U(x_j)\}\Delta t], \quad (8)$$

причем стоящий перед экспонентой множитель выбран так, что

$$K(x_{j+1}, t_{j+1}; x_j, t_j)_{\substack{t_{j+1} \rightarrow t_j \\ \Delta t \rightarrow 0}} = \delta(x_{j+1} - x_j).$$

Чтобы получить пропагатор, относящийся к конечному промежутку времени, построим цепь Маркова согласно формуле (6):

$$K(x', t'; x^0, t^0) = \int K(x', t'; x_{n-1}, t_{n-1}) dx_{n-1} \int K(x_{n-1}, t_{n-1}; x_{n-2}, t_{n-2}) dx_{n-2} \dots \int K(x_2, t_2; x_1, t_1) dx_1 K(x_1, t_1; x^0, t^0), \quad (9)$$

где  $x' = x_n$ ,  $t' = t_n$ ,  $x(t^0) = x^0, \dots$ , и предположим, что  $t_j = t_0 + j\Delta t$ ,  $\Delta t > 0$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ , так что  $t' = t_n > t_{n-1} > \dots > t_{n-r} > \dots > t_1 > t_0$ .

Перейдем теперь к пределу  $\Delta t \rightarrow 0$  и  $n \rightarrow \infty$  (при фиксированных  $t_n = t'$  и  $t_0$ ). Тогда каждый из пропагаторов в (9) может быть представлен в виде (8), и мы получим

$$K(x', t'; x^0, t^0) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \left[ (m/2\pi i \hbar \Delta t)^{n/2} \int dx_1 \int dx_2 \dots \int dx_{n-1} \right] = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^n \left[ \frac{m}{2} \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{\Delta t} - U(x_j)\Delta t \right] \right\} = \int \delta x \exp \left( \frac{i}{\hbar} W\{x(t)\} \right), \quad (10)$$

где  $\delta x = (m/2\pi i \hbar \Delta t)^{n/2} dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1}$ , а

$$W\{x(t)\} = \int_{t^0}^{t'} \mathcal{L}(\dot{x}(t), x(t)) dt, \quad (11)$$

и интеграл взят по всем возможным путям, соединяющим точки  $x', t'$  и  $x^0, t^0$ . Из этих траекторий только одна, именно, отвечающая минимуму функции действия

$$\delta W\{x(t)\} = 0, \quad (12)$$

является классической траекторией частицы, движущейся из  $x^0, t^0$  в  $x', t'$ . Из (12) следуют уравнения движения частицы в лагранжевой форме.

Интеграл (10), являющийся пределом последовательности  $n$ -кратных интегралов, есть функциональный интеграл или интеграл по путям. Его существование в смысле указанного предела доказано в математической литературе [5] для широкого класса потенциалов  $U(x)$ .

Как известно, пропагатор  $K(x', t'; x^0, t^0)$  может быть выражен через собственные функции  $\varphi_n(x)$  и собственные значения  $E_n$  оператора энергии  $\hat{\mathcal{H}}$ :

$$K(x', t'; x^0, t^0) = \sum_n \varphi_n(x') \varphi_n^*(x^0) e^{-iE_n(t'-t^0)/\hbar}. \quad (13)$$

Фейнман дает новое определение этой величины, которое одновременно является его постулатом квантования.

Важно отметить, что для построения квантовой величины  $K$  необходимо знать лагранжиан  $\mathcal{L}$  классической системы, а не гамильтониан  $\mathcal{H}$ , как в шредингеровской схеме. Кроме того, нет канонического постулата квантования, который требует замены классических  $c$ -числовых величин на операторы  $\hat{x}$  и  $\hat{p}$ .

Далее мы хотим остановиться на гамильтоновой форме интеграла Фейнмана. В работах [6] было показано, что вместо функционального интеграла по траекториям (10) в конфигурационном пространстве  $\{x(t)\}$  в некоторых случаях более удобно рассматривать представление для пропагатора  $K(x', t'; x^0, t^0)$  в виде функционального интеграла, содержащего функцию Гамильтона  $\mathcal{H}(x, p)$ , где интегрирование ведется по траекториям в фазовом пространстве  $\{x(t), p(t)\}$ :

$$K(x', t'; x^0, t^0) = C \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t^0}^{t'} [p(t)\dot{x}(t) - \mathcal{H}(x(t), p(t))] dt \right\} \delta^3 x \delta^3 p. \quad (14)$$

Для простейшего гамильтониана  $\mathcal{H} = (p^2/2m) + U(x)$  (и вообще для  $\mathcal{H}$ , квадратично зависящего от  $p$ ) легко доказывается эквивалентность (10) и (14). Действительно, в показателе экспоненты (14) стоит опять интеграл действия, выраженный через гамильтоновскую функцию. Разбивая, как и раньше, отрезок  $[t^0, t']$  на  $n$  равных интервалов  $\Delta t$  и аппроксимируя функции  $x(t)$  и  $p(t)$  кусочно-линейными и кусочно-постоянными функциями соответственно, мы можем записать (14) как предел  $2n + 1$ -кратного интеграла (на концах траекторий значения импульсов  $p_1, p_n$  не фиксированы; по ним также ведется интегрирование):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} & \left[ (1/2\pi\hbar)^{3n} \int \dots \int d^3 p_1 d^3 p_2 \dots d^3 p_n d^3 x_1 \dots d^3 x_{n-1} \times \right. \\ & \times \exp \left\{ (i/\hbar) \sum_{j=1} [p_j(x_j - x_{j-1}) - (p_j^2/2m)\Delta t - U(x_j)\Delta t] \right\} \Big] = \\ & = K(x', t'; x^0, t^0). \quad (15) \end{aligned}$$

Теперь интегрируем по всем  $p_j$ , что легко сделать, если заметить следующее:

$$p_j \Delta x_j - \frac{p_j^2}{2m} \Delta t = -\frac{\Delta t}{2m} \left( p_j - \frac{m}{\Delta t} \Delta x_j \right)^2 + \frac{m}{2} \left( \frac{\Delta x_j}{\Delta t} \right)^2,$$

где  $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ ;

$$\int d^3 p_j \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \frac{\Delta t}{2m} \left( p_j - \frac{m}{\Delta t} \Delta x_j \right)^2 \right] = \left( \frac{2\pi \hbar m}{i \Delta t} \right)^{3/2}$$

В результате получаем, что оба определения  $K$  совпадают:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ (1/2\pi \hbar)^{3n} \int \dots \int d^3 p_1 d^3 p_2 \dots d^3 p_n d^3 x_1 \dots d^3 x_{n-1} \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^n \left[ p_j (x_j - x_{j-1}) - \frac{p_j^2}{2m} \Delta t - U(x_j) \Delta t \right] \right\} \right] = K(x', t'; x^0, t^0) = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{3n/2} \int d^3 x_1 \dots \int d^3 x_{n-1} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^n \left[ \frac{m}{2} \frac{\Delta x_j^2}{\Delta t} - U(x_j) \Delta t \right] \right\} \right] = \\ = C \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t^0}^{t'} \left[ \frac{m}{2} \dot{x}^2(t) - U(x(t)) \right] dt \right\} \delta x. \end{aligned}$$

## 2. Уравнение Шредингера

Вывод уравнения Шредингера для  $\psi(x', t')$  в лагранжевой и гамильтоновой формах записи  $K(x', t'; x^0, t^0)$  осуществляется следующим образом. Рассмотрим равенство (1), когда времена  $t^0$  и  $t'$  отличаются на бесконечно малую величину  $\Delta t$ ,  $t' = t^0 + \Delta t$ ; тогда

$$\psi(x', t^0 + \Delta t) = \int K(x', t^0 + \Delta t; x^0, t^0) \psi(x^0, t^0) d^3 x^0. \quad (16)$$

Возьмем для  $K(x', t^0 + \Delta t; x^0, t^0)$  лагранжеву форму (8):

$$K(x', t^0 + \Delta t; x^0, t^0) = \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{3/2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \Delta t \left[ \frac{m}{2} \frac{(x' - x^0)^2}{\Delta t^2} - U(x') \right] \right\};$$

разлагая по малой величине  $\Delta t$  в (16), имеем

$$\begin{aligned} \psi(x', t^0) + \Delta t \frac{\partial \psi(x', t^0)}{\partial t^0} = \left[ 1 - \frac{i}{\hbar} \Delta t U(x) \right] \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{3/2} \times \\ \times \int \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \Delta t \frac{(x' - x^0)^2}{\Delta t^2} \right] \psi(x^0, t^0) d^3 x^0. \quad (17) \end{aligned}$$

Введем замену  $\xi = x' - x^0$ ; тогда

$$\psi(x^0, t^0) = \psi(x', t^0) - \xi \nabla \psi(x', t^0) + (\xi^2/2) \nabla^2 \psi(x', t^0) + \dots \quad (18)$$

Интегрируя по  $\xi$  в (17) с учетом замены, замечаем, что последующие члены разложения в (18) дают более высокие порядки по  $\Delta t$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \int d^3 \xi \exp [(im/2\hbar \Delta t) \xi^2] &= (2\pi \hbar i \Delta t/m)^{3/2}, \\ \int d^3 \xi \xi \exp [(im/2\hbar \Delta t) \xi^2] &= 0, \\ \int d^3 \xi \xi^2 \exp [(im/2\hbar \Delta t) \xi^2] &= (2\pi \hbar i \Delta t/m)^{5/2}. \end{aligned}$$

В результате получаем уравнение Шредингера

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi(x', t^0)}{\partial t^0} = \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - U(x') \right] \psi(x', t^0). \quad (19)$$

В гамильтоновой формулировке для случая, когда  $t' = t^0 + \Delta t$ , имеем

$$\begin{aligned} \psi(x', t^0 + \Delta t) &= \\ &= \int d^3 x^0 \int \frac{d^3 p}{(2\pi \hbar)^3} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ p(x' - x^0) - \frac{p^2 \Delta t}{2m} - \Delta t U(x') \right] \right\} \psi(x^0, t^0), \end{aligned} \quad (20)$$

и, учитывая малость  $\Delta t$ , можно по  $p$  интегрировать не точно, как в (11), а разлагая до  $\Delta t$ ; тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi \hbar)^3} \int d^3 p e^{(i/\hbar)p(x' - x^0)} \left\{ 1 - \Delta t \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{p^2}{2m} + U(x') \right] \right\} &= \\ &= \delta^3(x' - x^0) + \Delta t \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - U(x') \right] \delta^3(x' - x^0). \end{aligned} \quad (20')$$

Подставляя это выражение для  $K(x', t^0 + \Delta t; x^0, t^0)$  в (20) и интегрируя по  $x^0$ , вновь приходим к уравнению Шредингера:

$$\psi(x', t^0 + \Delta t) = \psi(x', t^0) + \Delta t (i/\hbar) \left[ (\hbar^2/2m) \nabla^2 - U(x') \right] \psi(x', t^0),$$

откуда получаем (19).

Схема квантования с помощью функциональных интегралов приводит к необходимости рассматривать объекты, теория которых недостаточно разработана с математической точки зрения и требует введения новых математических понятий, но она обладает по сравнению с канонической процедурой квантования, как уже отмечалось, рядом преимуществ. Одним из них

является то, что в обычной схеме мы должны задавать правила расстановки некоммутирующих величин, в то время как здесь такая неопределенность отсутствует, так как порядок следования  $p$  и  $x$  в самом функционале несуществен, поскольку это  $c$ -числовые функции; особенность схемы, по-видимому, важна при квантовании нелинейных систем [7, 8].

В этой связи следует отметить, что в недавно появившейся работе Березина [9] было указано на важную особенность функциональных интегралов в фазовом пространстве  $p, x$ . Автор привел ряд примеров, показывающих, что пределы конечномерных интегралов (см. формулу (15)), аппроксимирующих функциональный интеграл (14), могут стремиться к разным значениям при  $n \rightarrow \infty$  в зависимости от способа разбиения  $p(t)$  и  $x(t)$  на дискретные значения  $p_k, x_k$ , и указал на связь проблемы расстановки операторов  $\hat{p}$  и  $\hat{x}$  в обычной квантовой теории и способа построения аппроксимирующих конечномерных интегралов. Таким образом, вопрос о том, что в рамках функционального метода проблемы расстановки операторов не существует, остается открытым, во всяком случае для интегралов в фазовом пространстве  $p, x$ .

### 3. Преобразования функциональных аргументов

Как видно из предыдущих формул, функциональные интегралы записывались в декартовых координатах  $x_j(t), p_j(t)$ , однако для расширения круга практического применения этого метода необходимо выражение таких величин в криволинейных координатах и в первую очередь в сферических, что существенно для рассмотрения квантовых задач со сферической симметрией. Правильная форма интеграла в полярных координатах была получена в работе [10]; в работе Эдвардса и Гуляева [11] указывалось на трудности этой проблемы. Действительно, если в декартовых координатах при каноническом квантовании справедливо соответствие  $p_j \rightarrow -i(\partial/\partial x_j)$ , то в полярных это уже не так. Авторы работы [10] рассматривают частицу массы  $m$  в центральном поле  $U(|\mathbf{x}|)$ . Для малого интервала  $\Delta t = t_j - t_{j-1}$  и близких значений  $x_j, x_{j-1}$  функция действия (7) в полярных координатах

$$\mathbf{x}_j = \{r_j \sin \theta_j \sin \varphi_j, r_j \sin \theta_j \cos \varphi_j, r_j \cos \theta_j\} \quad (21)$$

может быть записана так:

$$W(x_j, x_{j-1}) = (m/2)[(r_j^2 + r_{j-1}^2)/\Delta t] - m(r_j r_{j-1}/\Delta t) \cos \Theta_j - \Delta t U(r_j); \quad (22)$$

здесь учтено, что  $\cos \Theta_j = \cos \theta_j \cos \theta_{j-1} + \sin \theta_j \sin \theta_{j-1} \cos(\varphi_j - \varphi_{j-1})$ ,

$$(x_j - x_{j-1})^2 = r_j^2 + r_{j-1}^2 - 2r_j r_{j-1} \cos \Theta_j.$$

Если использовать разложение по полиномам Лежандра

$$e^{u \cos \Theta} = \left(\frac{\pi}{2u}\right)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \Theta) I_{l+1/2}(u),$$

где  $I_{l+1/2}$  — функция Бесселя, то величину  $\exp \left[ (i/\hbar) \sum_j W_j \right]$ , входящую в (10), можно представить в виде

$$\exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_j W(x_j, x_{j-1}) \right] = \prod_{j=1}^n \sum_{l_j=0}^{\infty} (2l_j + 1) P_{l_j}(\cos \Theta_j) R_{l_j}(r_j; r_{j-1});$$

здесь  $R_{l_j}$  — радиальная часть выражения

$$R_{l_j}(r_j; r_{j-1}) = \left( \frac{i\pi\Delta t}{2mr_j r_{j-1}} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{r_j^2 + r_{j-1}^2}{\Delta t} - \Delta t U(r_j) \right] \right\} I_{l_j+1/2} \left( \frac{m\hbar}{i\Delta t} r_j r_{j-1} \right).$$

После изменения порядка суммирования и умножения в этой формуле получаем для функции  $K(x', t'; x^0, t^0)$

$$K(x', t'; x^0, t^0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{3n/2} \sum_{l_1, l_2, \dots, l_n} \int \prod_{j=1}^n [(2l_j + 1) P_{l_j}(\cos \Theta_j) R_{l_j}(r_j, r_{j-1})] \times \right. \\ \left. \times \prod_{i=1}^{n-1} r_i^2(t) dr_i(t) \sin \theta_i(t) d\theta_i(t) d\varphi_i(t) \right\}.$$

Далее оказывается, что для рассматриваемой угловой зависимости (22) можно выполнить точно интегрирование по всем угловым переменным; для этого достаточно учесть только следующие равенства:

$$P_{l_j}(\cos \Theta_j) = \frac{4\pi}{2l_j + 1} \sum_{n_j=-l_j}^{l_j} Y_{l_j}^{n_j*}(\theta_j, \varphi_j) Y_{l_j}^{n_j}(\theta_{j-1}, \varphi_{j-1}),$$

где  $Y_l^n$  — сферические гармоники и

$$\int \int Y_l^{n*}(\theta, \varphi) Y_{l'}^{n'}(\theta, \varphi) d\varphi \sin \theta d\theta = \delta_{ll'} \delta_{nn'}. \quad (23)$$

Поэтому

$$\int \dots \int \prod_{j=1}^n [(2l_j + 1) P_{l_j}(\cos \Theta_j)] \prod_{i=1}^{n-1} \sin \theta_i d\theta_i d\varphi_i = \\ = (4\pi)^n \delta_{l_n} \prod_{j=1}^n \delta_{l_{j+1} l_n} \sum_{n=-1}^l Y_l^{n*}(\theta', \varphi') Y_l^n(\theta^0, \varphi^0),$$

$$x' = x'(r', \theta', \varphi'), \quad x^0 = x^0(r^0, \theta^0, \varphi^0).$$

В результате для каждого квантового числа  $l$  радиальный и угловые вклады в пропагатор  $K$  разделяются:

$$K(x', t'; x^0, t^0) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-l}^l K_l(r', t'; r^0, t^0) Y_l^{n*}(\theta', \varphi') Y_l^n(\theta^0, \varphi^0). \quad (24)$$

Радиальная часть пропагатора для  $l$ -волны дается функциональным интегралом только по переменной  $r(t)$ :

$$K(x', t'; x^0, t^0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ (4\pi^n) \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{3n/2} \int \prod_{j=1}^n R_l(r_j; r_{j-1}) \prod_{i=1}^{n-1} r_i^2 dr_i \right], \quad (25)$$

и его вычисление уже определяется конкретным видом потенциала  $U(r)$ .

Таким образом, возможность для данного  $W$  выполнить функциональные квадратуры по угловым переменным по  $\theta(t)$  и  $\varphi(t)$  в сферически-симметричной задаче дает возможность записать для  $K$  функциональный интеграл только по радиальной переменной  $r(t)$  в форме (24) и (25).

Для гамильтоновой формы интеграла в сферических координатах можно написать аналогичное выражение [10]:

$$K(x', t'; x^0, t^0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left( \frac{1}{2\pi \hbar} \right)^{3n} \int \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t^0}^{t'} (p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\varphi \dot{\varphi} - \mathcal{H}) dt \right] \times \right. \\ \left. \times \prod_{j=1}^n (dp_{r_j} dp_{\theta_j} dp_{\varphi_j}) \prod_{i=1}^{n-1} (r_i^2 \sin \theta_i dr_i d\theta_i d\varphi_i) \right\},$$

и после выполнения интегрирования по  $dp_{\theta_j}$ ,  $dp_{\varphi_j}$ ,  $d\theta_j$ ,  $d\varphi_j$  получаем в результате формулу (24) с радиальной функцией

$$R_l(r', t'; r^0, t^0) = \frac{1}{r' r^0} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left( \frac{m \hbar}{2\pi i \Delta t} \right)^{3n/2} \times \right. \\ \left. \times \int \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t^0}^{t'} (p \dot{r} - \mathcal{H}_l) dt \right] \prod_{j=1}^n dp_j \prod_{i=1}^n r_i^2 dr_i \right\},$$

где

$$\mathcal{H}_l(r_j, p_j) = (2m)^{-1} \{p_j^2 + [l(l+1)/r_j^2]\} + U(r_j).$$

Если, например, рассматривается частица в притягивающем потенциале  $U(r) = k^2/r^2$ , то интегрирование по всем  $r_j$  в формуле (25) может быть выполнено (см. [10]), и тогда имеем замкнутое выражение

$$K(x', t'; x^0, t^0) = [m/i(t' - t^0)(r'r^0)^{1/2}] \exp [im(r'^2 + r^{02})/2(t' - t^0)] \times \\ \times \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-1}^l I_{\lambda(l)}(mr'r^0/i(t' - t^0)) Y_l^{n*}(\theta', \varphi') Y_l^n(\theta^0, \varphi^0), \\ \lambda(l) = [(l + 1/2)^2 + k^2]^{1/2}.$$

В заключение отметим, что, к сожалению, этот изящный способ интегрирования по угловым переменным в функциональном интеграле оказывается не эффективным для более сложных функционалов, с которыми мы встречаемся в теории поля. Например, для интеграла [12]

$$\int \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t^0}^{t'} D(t_1 - t_2) \mathbf{x}(t_1) \mathbf{x}(t_2) dt_1 dt_2 + i \frac{g}{\hbar} \int_{t^0}^{t'} U(\mathbf{x}^2) dt \right] \delta \mathbf{x}$$

введение полярных координат  $r, \theta, \varphi$ :

$$\int \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t^0}^{t'} \int D(t_1 - t_2) r(t_1) r(t_2) \cos \theta(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \right. \\ \left. + i \frac{g}{\hbar} \int_{t^0}^{t'} U(r^2(t)) dt \right] \prod_{i=1}^n d\varphi_i r_i^2 dr_i \sin \theta_i d\theta_i,$$

где

$$\cos \theta(t_1, t_2) = \cos \theta(t_1) \cos \theta(t_2) + \sin \theta(t_1) \sin \theta(t_2) \cos (\varphi(t_1) - \varphi(t_2)),$$

приводит при разложении по сферическим гармоникам к выражению

$$\exp \left( \frac{i}{\hbar} \sum_{j,k=1}^n D_{jk} r_j r_k \cos \theta_{jk} \right) = \sum_{j,k} 4\pi \left( \frac{\pi \hbar}{i D_{jk} r_j r_k} \right)^{1/2} \times \\ \times \sum_{l_{jk}=0} I_{l_{jk}+1/2} \left( \frac{i}{\hbar} D_{jk} r_j r_k \right) \sum_{n_{jk}=-l_{jk}}^{l_{jk}} Y_{l_{jk}}^{n_{jk}*}(\theta_j, \varphi_j) Y_{l_{jk}}^{n_{jk}}(\theta_k, \varphi_k), \quad (26)$$

которое интегрировать по  $\theta_j, \varphi_j$  чрезвычайно затруднительно, так как при каждом фиксированном угле  $\theta_j, \varphi_j$  интегрируется произведение  $n$  сомножителей  $Y_{l_{jk}}^{n_{jk}}(\theta_j, \varphi_j)$  и формула (23) неприменима. Это связано с тем, что



квадратичная форма в показателе экспоненты в (19) по  $x(t)$  зависит от двух времен,  $t_1, t_2$ , и при одном фиксированном  $t_1 = t_j$  у нас остается сумма в экспоненте или произведение сомножителей в (26) по  $t_2 = t_k$ .

В функциональной записи более наглядно проступает связь канонических преобразований в классической и квантовой механике.

Рассмотрим простой, но важный частный случай канонического преобразования [6]

$$x \rightarrow p, \quad p \rightarrow -x.$$

Выражение для пропагаторов (15) переходит при этом в следующее:

$$K(p', t'; p^0, t^0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3n}} \int \dots \int d^3 x_1 \dots d^3 x_n d^3 p_1 \dots d^3 p_n \times \right. \\ \left. \times \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \left( \int x dp + \int \mathcal{H} dt \right) \right] \right\}.$$

Если по-прежнему  $\mathcal{H} = (p^2/2m) + U(x)$  и рассматривать случай, когда  $t' = t^0 + \Delta t$ , то, поступая как и при выводе (20'), получаем

$$K(p', t^0 + \Delta t; p^0, t^0) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3 x \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} x(p' - p^0) - \frac{i}{\hbar} \Delta t \left[ \frac{p^2}{2m} + U(x) \right] \right\}.$$

Далее, предполагая, что потенциал  $U(x)$  можно разлагать в ряд:  $U(x) = U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + \dots$ , находим

$$K(p', t^0 + \Delta t; p^0, t^0) = \delta^3(p' - p^0) - \\ - \frac{i}{\hbar} \Delta t \left[ \frac{p^2}{2m} + U_0 + U_1 \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \right) + U_2 \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \right)^2 + \dots \right] \delta(p' - p^0).$$

Отсюда для волновой функции  $\psi(p', t^0)$  следует уравнение Шредингера, но в импульсном представлении.

В литературе [6, 8] имеются доказательства, что линейным каноническим преобразованиям в классической механике соответствуют в фейнмановской формулировке КМ унитарные преобразования. Изучение нелинейных канонических преобразований вызывает в рамках функциональной формулировки КМ затруднения, поскольку не разработаны математические вопросы нелинейных преобразований для функциональных интегралов (см. [1, 2]).

Недавно Фаддеев [8] указал на важное применение фейнмановского метода квантования при помощи функционального интеграла в гамильтоновой форме к ситуациям, в которых канонический метод сталкивается с трудностями.

Дело в том, что классическая система может иметь лагранжиан  $\mathcal{L}(\dot{q}, q)$ , для которого соотношения

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

не разрешимы относительно  $\dot{q}_j$ , т.е. мы не можем выразить  $\dot{q}$  через  $p$  и  $q$ , что необходимо для написания функции Гамильтона  $\mathcal{H}(q, p)$ . Такие лагранжианы в работе [8] называются сингулярными. Наиболее интересные примеры систем с сингулярными лагранжианами дает теория поля для калибровочно-инвариантных полей (электромагнитное поле, поле Янга-Миллса, гравитационное поле). Все они описываются сингулярными лагранжианами с дополнительными условиями или связями на канонические переменные. Поэтому в  $n$ -мерном случае классической механики канонические переменные  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  и  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  не пробегают все  $2n$ -мерное фазовое пространство из-за связей

$$\varphi_\alpha(q, p) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m), \quad m < n.$$

Квантованию таких систем в канонической схеме были посвящены работы Дирака [13]. Его схема содержит ряд трудностей, и прежде всего трудность с расстановкой или, по терминологии Фейнмана, упорядочением операторных множителей.

Учет дополнительных условий в гамильтоновой форме функционального интеграла производится следующим образом. Если соотношения  $\varphi_\alpha(q, p)$  можно разрешить относительно  $m$  координат и выразить в виде

$$q_\alpha = q_\alpha(q^*, p)$$

( $q^*$  — суть  $n-m$  независимых координат), то для этого необходимо, чтобы  $\det |\partial \varphi_\alpha / \partial q_\beta| \neq 0$ . Далее оказывается, что наблюдаемые выражаются не через все  $n$  импульсов  $p_j$ , а только через  $n-m$ , т.е. существуют еще  $m$  соотношений (калибровочных условий):  $f_\alpha(q, p) = 0$ . Поэтому после канонического преобразования, в котором новые импульсы равны  $p_\alpha^* = f_\alpha(q, p)$ , у нас будет  $2(n-m)$  независимых канонических переменных ( $q_1^*, q_2^*, \dots, q_{n-m}^*$ ), ( $p_1^*, p_2^*, \dots, p_{n-m}^*$ ), с помощью которых записывается функциональный интеграл:

$$K(q', t'; q^0, t^0) = \int \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t^0}^{t'} \left( \sum_{j=1}^{n-m} p_j^* \dot{q}_j^* - \mathcal{H} \right) dt \right] \prod_{t, j=1}^{n-m} \frac{dp_j^*(t) dq_j^*(t)}{(2\pi\hbar)^{n-m}}.$$

Можно также записать  $K$  в форме интеграла по всем  $2n$  переменным с учетом связей и дополнительных условий:

$$K = \int \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t^0}^{t'} \left( \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} \right) dt \right] \times \\ \times \prod_{t, \alpha, \beta=1}^m \delta(\varphi_\alpha(q, p)) \delta(f_\alpha(q, p)) (\det \|(\varphi_\alpha, f_\beta)\|)^{1/2} \prod_{t, j=1}^n \frac{dp_j(t) dq_j(t)}{(2\pi\hbar)^n}.$$

[Здесь  $\|(\varphi_\alpha, f_\beta)\|$ ,  $1 \leq \alpha, \beta \leq m$  — матрица  $m \times m$ , элементами которой являются скобки Пуассона между связями и калибровочными условиями

$(\varphi_\alpha, f_\beta)$ . Мера интегрирования в окончательной формуле для  $K$  содержит помимо  $\delta$ -функций определитель Фаддеева–Попова  $(\det \|(\varphi_\alpha, f_\beta)\|)^{1/2}$ . Вклад этого определителя оказывается существенным при квантовании неабелевых калибровочных полей и гравитации. — *Прим. ред.*]

В заключение этой главы укажем на один интересный численный расчет функционального интеграла, дающий значение основного уровня атома гелия. Еще в работе Гельфанда и Ченцова [14] был дан метод вычисления функционального интеграла Винера, который состоит в следующем. Функциональный интеграл аппроксимируется конечно кратными интегралами Римана или Стилтеса, последние вычисляются методом Монте-Карло на электронно-вычислительной машине. Так был сосчитан низший энергетический уровень полярона. Для этого считались 190-кратный и 280-кратный аппроксимирующие интегралы. Результаты таковы: 300 траекторий — 0,9912, 400 тр. — 0,9940; 600 тр. — 0,9999; точное значение 1,0000 в соответствующих единицах.

В работе Евсеева [15] рассчитывалась таким способом величина интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x', t'; x^0, 0) e^{(i/\hbar)Et'} dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{(i/\hbar)Et'} \int e^{(i/\hbar)W[x', t', x^0]} \delta x,$$

где  $W$  — классическое действие двух электронов в поле ядра гелия. Поскольку, с другой стороны, по формуле (13) имеем

$$\int e^{(i/\hbar)Et'} K(x', t'; x^0, 0) dt' = \sum_n \varphi_n(x') \varphi_n^*(x^0) 2\pi \delta(E_n - E),$$

приближенный расчет  $K$  дает при интегрировании по  $t$  максимумы (вместо  $\delta(E_n - E)$ ) в точках  $E_n$ . Интегрирование в  $m$ -кратном аппроксимирующем интеграле по  $x_i$  ведется в пределах от  $-a$  до  $+a$  ( $a = \hbar/me^2$  — радиус первой боровской орбиты), поскольку функция  $e^{iW/\hbar}$  при больших  $x$  быстро осциллирует и дает малый вклад в интеграл. Для основного уровня гелия было получено значение  $2,92 \pm 0,05$ , которое отличается от экспериментального 2,90351 на 0,57 %.

#### 4. Континуальное представление функций Грина в теории квантованных полей

Обратимся теперь к КТП. Фундаментальную роль в КТП играют функции Грина квантованных полей, знание которых позволяет находить физические характеристики взаимодействующих полей; в частности, они дают возможность находить и амплитуды рассеяния (на этом вопросе мы далее остановимся подробнее).

Многими авторами [16, 17] с помощью функциональных интегралов были получены замкнутые выражения для функций Грина. Например, одночастичная функция Грина фермионного поля представляется следующим образом:

$$G(x, y) = \int G(x, y|A) S_0(A) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int \int d^4\xi d^4\eta D_{\mu\nu}^{-1}(\xi - \eta) A_\mu(\xi) A_\nu(\eta) \right] \delta^4 A \times \\ \times \left\{ \int S_0(A) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int \int d^4\xi d^4\eta D_{\mu\nu}^{-1}(\xi - \eta) A_\mu(\xi) A_\nu(\eta) \right] \delta^4 A \right\}^{-1} \quad (27)$$

Здесь  $\delta^4 A = \prod_x d^4 A(x)$ ,  $G(x, y|A)$  — функция Грина фермиона в классическом внешнем поле  $A_\mu$ ,  $S_0(A)$  — среднее по фермионному вакууму от  $S$ -матрицы, где операторы бозонного (электромагнитного) поля заменены на классические функции поля;  $D_{\mu\nu}^{-1}$  — обратная функция к свободной функции распространения бозона:

$$\int D_{\mu\nu}^{-1}(x - z) D_{\nu\lambda}(z - y) d^4 z = \delta^4(x - y) \delta_{\mu\lambda}.$$

Первая задача, возникающая при вычислении (27), — это нахождение функции  $G(x, y|A)$  для произвольного внешнего поля  $A_\mu$ . Для электронно-позитронного поля  $G$  подчиняется уравнению Дирака

$$[i\gamma_\mu \partial_\mu - m + e\gamma_\nu A_\nu(x)]G(x, y|A) = -\delta^4(x - y). \quad (28)$$

Уже решение этого уравнения с произвольным полем  $A_\mu(x)$  в математике представляется проблемой огромной трудности. Однако, как впервые было показано Фейнманом [4], решение этого уравнения может быть формально представлено также в виде функционального интеграла (таким путем получают функции Грина уравнений Клейна–Гордона, Дирака и Шредингера [16, 18, 19] для произвольного внешнего поля). В случае, если внешнее поле допускает замкнутое решение уравнения (28), функциональные квадратуры могут быть выполнены [18]. Удачным в этом подходе является то, что функция Грина  $G(x, y|A)$ , полученная таким способом, позволяет, если пренебречь в формуле (27) вакуумными вкладами (положив  $S_0(A) = 1$ ), выполнить функциональное усреднение по внешним полям и получить квантовую функцию  $G(x, y)$  без учета поляризации фермионного вакуума. Как будет следовать из дальнейшего, рассматриваемый формализм имеет полностью ковариантную форму, поскольку, в отличие от предыдущих формул, выделенной переменной здесь является не время  $t$ , а собственное время  $\tau$ .

Рассмотрим этот формализм на примере уравнения Дирака (28) и введем, как обычно, функцию Грина  $\mathcal{G}$  квадратированного уравнения Дирака:

$$G(x, y|A) = [i\gamma_\mu \partial_\mu + m + e\gamma_\mu A_\mu(x)]\mathcal{G}(x, y|A).$$

Тогда для  $\mathcal{G}$  имеется уравнение

$$[(i\partial_\mu + eA_\mu(x))^2 - m^2 + e\sigma_{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu(x)]\mathcal{G}(x, y|A) = -\delta^4(x - y). \quad (29)$$

Применяя предложенное Фоком [20] и развитое Фейнманом [21] представление обратного оператора в экспоненциальном виде, запишем решение (29) в операторной форме:

$$\mathcal{G}(x, y|A) = i \int_0^\infty d\tau e^{-im^2\tau} \exp \left\{ i \int_0^\tau d\xi [(i\partial_\mu(\xi) + eA_\mu(\xi))^2 + e\sigma_{\mu\nu}(\xi)\partial_\mu(\xi)A_\nu(\xi)] \right\} \delta^4(x - y); \quad (30)$$

здесь экспонента, в показателе которой стоят некоммутирующие операторы  $\partial_\mu$ ,  $A_\mu$ ,  $\sigma_{\mu\nu}$  понимается как  $T_\tau$ -экспонента [21], где упорядочивающий индекс  $\tau$  имеет смысл собственного времени, деленного на массу  $m$ . Все операторы в (30) считаются коммутирующими функциями, зависящими от параметра  $\tau$ . Понизим теперь степень оператора дифференцирования  $\partial_\mu$  в показателе экспоненты в (30) с помощью формального преобразования, содержащего функциональный интеграл<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \exp \left\{ i \int_0^\tau d\xi [(i\partial_\mu(\xi) + eA_\mu(x, \xi))^2] \right\} = \\ = C \int \delta^4\nu \exp \left\{ -i \int_0^\tau \nu_\mu^2(\xi) d\xi + 2i \int_0^\tau \nu_\mu(\xi) [i\partial_\mu(\xi) + eA_\mu] d\xi \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\delta^4\nu = \prod_\xi d^4\nu(\xi), \quad C = 1 / \exp \left[ -i \int_0^\tau \nu_\mu^2(\xi) d\xi \right].$$

Имея теперь первую степень оператора  $\partial_\mu$  в показателе (31), можем подействовать им как оператором сдвига согласно правилам «выпутывания» [21]; в результате получим следующее выражение для  $\mathcal{G}(x, y|A)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, y|A) = i \int_0^\infty d\tau e^{-im^2\tau} C \int \delta^4\nu \exp \left\{ -i \int_0^\tau d\xi \left[ \nu_\mu^2(\xi) - 2e \left[ \nu_\mu(\xi) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu}(\xi) \partial_\nu(\xi) A_\mu \left( x - 2 \int_\xi^\tau \nu(\eta) d\eta \right) \right] \right] \right\} \delta^4 \left( x - y - 2 \int_0^\tau \nu(\eta) d\eta \right). \end{aligned} \quad (32)$$

В этом выражении операторы  $\sigma_{\mu\nu}(\xi)$  остаются, по терминологии Фейнмана, не «распутанными»<sup>2</sup>, т. е. они зависят от  $\xi$  как от упорядочивающего индекса и для них остается  $T_\tau$ -упорядочение.

<sup>1</sup> Фактически это есть фейнмановское интегрирование по путям. — *Прим. ред.*

<sup>2</sup> Проблема «распутывания» дираковских матриц при решении уравнения Дирака в произвольном внешнем поле рассмотрена в работе Фрадкина [22].

Функция Грина для уравнения Клейна–Гордона получается из (32) при  $\sigma_{\mu\nu} = 0$ . Для сходимости интеграла по  $\tau$  на верхнем пределе считается, что масса  $m$  имеет отрицательную мнимую добавку  $-i\epsilon$ ; таким образом, формула (32) определяет причинную функцию Грина уравнений Дирака или Клейна–Гордона.

Аналогичным образом может быть получена запаздывающая функция Грина уравнения Шредингера [19] с произвольным потенциалом  $U(\mathbf{x}, t)$ :

$$G(x', t'; x^0, t^0) = i\theta(t' - t^0)C \int \delta^3\nu \times \\ \times \exp \left[ \frac{im}{2} \int_0^{t'-t^0} \nu^2(\xi) d\xi \right] \exp \left[ -i \int_0^{t'-t^0} U \left( t' + \xi; \mathbf{x}^0 + 2 \int_0^\xi \nu(\eta) d\eta \right) d\xi \right] \times \\ \times \delta^{(3)} \left( \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 - 2 \int_0^{t'-t^0} \nu(\eta) d\eta \right). \quad (33)$$

Оба выражения, (32) и (33), легко привести к виду фейнмановского интеграла по траекториям от  $e^{iW}$ , где  $W$  в обоих случаях будет интегралом действия. Для этого достаточно перейти от интегрирования по  $\nu_\mu(\xi)$  к новым функциональным переменным  $\dot{x}_\mu(\xi) = 2\nu_\mu(\xi)$ . Детерминант этого преобразования равен единице, и для релятивистской функции  $\mathcal{G}$  получаем

$$\mathcal{G}(x, y|A) = \\ = iC \int \delta^4 x \int_0^\infty d\tau \exp \left\{ -i \int_0^\tau d\xi [\dot{x}_\mu^2(\xi) - 2e\dot{x}_\mu(\xi)A_\mu(x) + m^2 - i\sigma_{\mu\nu}\partial_\nu A_\mu] \right\} \quad (34)$$

(из-за  $\delta^4$ -функции в (32) мы положили  $x_\mu(\tau) = x$  и  $x_\mu(0) = y$ ). В показателе экспоненты (34) стоит релятивистская функция действия заряженной частицы в поле  $A_\mu$ :

$$W = \int_0^\tau [\dot{x}_\mu^2(\xi) - 2e\dot{x}_\mu A_\mu(x) - m^2] d\xi$$

и спиновая часть  $i\sigma_{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu$ , не имеющая аналога в классике. Интеграл берется по всем траекториям, соединяющим  $x$  и  $y$ . Для шредингеровской функции (33) делается замена  $\nu(\xi) = \dot{x}(\xi)$ , где  $\xi$  уже просто время.

В работе [18] даны примеры конкретных полей  $A_\mu(x)$ , для которых интегрирование по  $\nu_\mu$  в (32) может быть выполнено точно.

## 5. Приближенные методы в функциональном интегрировании

Для приближенного вычисления функциональных интегралов в КМ и КТП многие авторы [4, 19, 23] рассматривали, во-первых, метод стационар-

ной фазы, развитый в математике для обыкновенных интегралов. Его применимость можно считать оправданной, когда действие  $W \gg \hbar$ , однако пока еще не существует оценки этого метода даже для простейших функциональных интегралов [23, 24]. В этом методе ищутся экстремальные траектории (классические, см. (12)) из условия

$$\delta W[x^{\text{кл}}] = 0. \quad (35)$$

Действие разлагается около этих траекторий:

$$W[x] = W[x^{\text{кл}}] + \frac{1}{2}\delta^2 W[x^{\text{кл}}] + \frac{1}{6}\delta^3 W[x^{\text{кл}}] + \dots,$$

где, например,

$$\delta^2 W[x^{\text{кл}}] = \int_{t^0}^t dt \left\{ \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} \right|_{x=x^{\text{кл}}} (x - x^{\text{кл}})^2 + \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial \dot{x}} \right|_{x=x^{\text{кл}}} (x - x^{\text{кл}})(x - \dot{x}^{\text{кл}}) \right\}$$

— квадратичный функционал относительно  $x(t)$ . Уравнение (35) на классические траектории в случае релятивистской задачи (34) (без члена  $\sigma_{\mu\nu}\partial_\nu A_\mu$ ) выглядит так:

$$\frac{\partial^2 x_\mu^{\text{кл}}(\xi)}{\partial \xi^2} = e \frac{\partial x_\mu^{\text{кл}}(\xi)}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu^{\text{кл}}} - \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x_\mu^{\text{кл}}} \right]. \quad (36)$$

Для уравнения Шредингера имеем (см. [19])

$$m\ddot{\mathbf{x}}^{\text{кл}} = \frac{\partial U(t^0 + \xi, \mathbf{x}^{\text{кл}}(\xi))}{\partial \mathbf{x}^{\text{кл}}}. \quad (37)$$

Уравнения (36) и (37) отличаются от уравнений движения классической частицы тем, что в начальный момент задаются не координата и скорость, а два значения координаты на концах интервала  $[t^0, t']$ :

$$\mathbf{x}^{\text{кл}}(t' - t^0) = \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}^{\text{кл}}(0) = \mathbf{x}^0.$$

К сожалению, для произвольных полей  $A_\mu$  и потенциалов  $U$ , которые нужно рассматривать для построения квантовой функции  $G(x, y)$  согласно (27), найти решения уравнений (36) и (37) точно не удастся. Поэтому практическая польза от этого квазиклассического приближения для функционального интеграла может быть получена там, где (36) и (37) могут быть решены тем или иным способом вне рамок теории возмущений.

В работе [25] было обращено внимание на то, что вычисления функциональных интегралов методом стационарной фазы может быть применено для квантования полей, описываемых лагранжианами вида  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(K, I)$ , где  $K = \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi / 2$  — лагранжиан свободного поля, а  $I = \varphi^2 / 2$ . Такие поля были названы одним из авторов (Д. Б.) существенно-нелинейными. В ци-

тированной работе было показано, что если в практически важной области пространства-времени безразмерная величина  $M = \partial\mathcal{L}/\partial K \gg 1$ , то возможно применение метода стационарной фазы. При этом действие  $W\{\varphi(x)\}$  может быть взято в виде

$$W\{\varphi(x)\} = W\{\varphi_{\text{кл}}(x)\} + \frac{M}{2!}Q\{\psi(x)\} + \dots,$$

где  $\varphi(x) = \varphi_{\text{кл}}(x) + \psi(x)$ . Квадратичная форма  $Q\{\psi(x)\}$  есть действие для свободного квантового поля  $\psi(x)$ , однако распространяющегося в пространстве с кривой метрикой. Эта метрика определяется полем  $\varphi(x)$  и его первыми производными. Оказывается, что это приближение эквивалентно введению в квантовые скобки Пуассона

$$[\psi(x), \psi(x')] = i\hbar^* \delta(x - x')$$

эффективной постоянной Планка  $\hbar^* = \hbar/\overline{M}$ , где  $\overline{M}$  — среднее значение  $M$ , в предположении, что  $\overline{M} \gg 1$ . В этом случае квантовые флуктуации величин  $\dot{\psi}(x)$  и  $\psi(x)$  малы и квантовое поле становится близким к классическому.

Перейдем к рассмотрению другого способа аппроксимации функциональных интегралов частного вида, который дает возможность получать асимптотику в инфракрасной области квантовой электродинамики, а также изучать асимптотическое поведение некоторых процессов рассеяния частиц при высоких энергиях и малых передачах импульса. Чтобы не усложнять задачи, мы рассмотрим простую релятивистски-инвариантную модель [18] взаимодействия двух скалярных полей:  $\varphi$  с массой  $\mu$  и  $\psi$  с массой  $m$ . Лагранжиан взаимодействия этой системы имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g\psi^2(x)\varphi(x).$$

Функция Грина частицы поля  $\psi$  в классическом внешнем поле  $\varphi(x)$  удовлетворяет уравнению

$$[i^2\partial_\mu^2 - m^2 + g\varphi(x)]G(x, y|\varphi) = -\delta^4(x - y).$$

Повторяя процедуру, изложенную в гл. 4, имеем

$$G(x, y|\varphi) = i \int_0^\infty d\tau e^{-im^2\tau} \exp \left\{ i \int_0^\tau [i^2\partial_\mu^2 + g\varphi(x, \xi)] d\xi \right\} \delta^4(x - y). \quad (38)$$

Аналогично (31) преобразуем

$$\exp \left[ i \int_0^\tau d\xi i^2\partial_\mu^2(\xi) \right] = C \int \delta^4\nu \exp \left[ -i \int_0^\tau \nu_\mu^2(\xi) d\xi + 2i \int_0^\tau \nu_\tau(\xi) \partial_\mu(\xi) d\xi \right].$$



Подставляя это выражение в (38) и «выпутывая» оператор дифференцирования  $\partial_\mu$ , будем иметь

$$G(x, y|\varphi) = -i \int_0^\infty d\tau e^{-im^2\tau} \times \\ \times C \int \delta^4\nu \exp \left\{ -i \int_0^\tau \left[ \nu_\mu^2(\xi) - g\varphi \left( x - 2 \int_\xi^\tau \nu(\eta) d\eta \right) \right] d\xi \right\} \times \\ \times \delta^4 \left( x - y - 2 \int_0^\tau \nu(\eta) d\eta \right). \quad (39)$$

Далее нам потребуется фурье-образ функции  $G$ :

$$G(x, y|\varphi) = \int d^4x d^4y e^{ipx - iqy} G(x, y|\varphi) - \\ - i \int d^4y e^{i(p-q)y} \int_0^\infty d\tau e^{i(p^2 - m^2)\tau} C \int \delta^4\omega \times \\ \times \exp \left\{ -i \int_0^\tau \left[ \omega_\mu^2 - g\varphi \left( x + 2p\xi + 2 \int_0^\xi \omega(\eta) d\eta \right) \right] d\xi \right\}; \quad (40)$$

здесь сделана замена функциональной переменной  $\nu_\mu(\xi) = p_\mu + \omega_\mu(\xi)$ ; интеграл по  $d^4x$  снимается  $\delta^4$ -функцией в (39). При  $g = 0$  из (38) следует свободная функция распространения

$$G_0(p) = (2\pi)^4 \delta^4(p - q) / (p^2 - m^2 + i\epsilon),$$

так как

$$C \int \delta^4\omega \exp \left[ -i \int_0^\tau \omega_\mu^2(\eta) d\eta \right] = 1.$$

Если нас интересует инфракрасная область в этой модели при  $\mu = 0$ , то доказано [26, 28], что вкладом поляризации вакуума поля  $\psi$  можно пренебречь,  $S_0(\varphi) = 1$ , и из формулы (27) получаем квантовую функцию  $G(p)$ , интегрируя по  $\varphi$  согласно (27) и (40):

$$G(p) = i \int_0^\infty d\tau e^{i\tau(p^2 - m^2)} C \int \delta^4\omega \exp \left\{ -i \int_0^\tau d\xi \omega_\mu^2(\xi) - \frac{ig_1^2}{2} \int_0^\tau \int_0^\tau d\xi_1 d\xi_2 \Delta(\xi_1, \xi_2|\omega) \right\}, \quad (41)$$

где

$$\Delta(\xi_1, \xi_2|\omega) = \int d^4k D(k) \exp \left[ -2ikp|\xi_1 - \xi_2| - 2ik \int_{\xi_1}^{\xi_2} \omega(\eta) d\eta \right],$$

$$D(k) = 1/(k^2 + i\epsilon), \quad g_1 = g(2\pi)^2.$$

а) *Инфракрасная асимптотика функции Грина.* Точное выполнение интегрирования по  $\delta\omega$  в (41) не представляется возможным, поэтому займемся приближенным вычислением интеграла в изучаемой инфракрасной области (эффективно виртуальные импульсы  $k$  малы). Для этого выясним, какова роль функционального аргумента  $\omega$  в  $\Delta(\xi_1, \xi_2|\omega)$ .

Если рассматривать ряд теории возмущений, раскладывая (41) по  $g_1^2$ , то функциональные интегралы легко берутся, поскольку возникают выражения типа

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(\xi_1, \xi_2) &= C \int \delta^4\omega \exp \left[ -i \int_0^\tau \omega^2(\eta) d\eta \right] \Delta(\xi_1, \xi_2|\omega) = \\ &= \int d^4k D(k) \exp [-i(2pk + k^2)|\xi_1 - \xi_2|]. \end{aligned} \quad (42)$$

Отсюда видно, что функциональный аргумент в  $\Delta(\xi_1, \xi_2|\omega)$  приводит после интегрирования к появлению квадратичной зависимости от виртуальных импульсов  $k$ . Поэтому, если нас интересует низкоэнергетическая область, где  $k$  эффективно малы, можно пренебречь в  $\Delta$  зависимостью от  $\omega$ . Результаты, относящиеся к инфракрасной области в таком приближении, но другим методом, были получены Фрадкиным [16] и Милехиным [27]. Однако такое приближение существенно меняет поведение  $\bar{\Delta}(\xi_1, \xi_2)$  при больших импульсах  $k$  и, в частности, приводит к более сильным расходимостям неперенормированных величин, поэтому мы не будем пренебрегать этой зависимостью, а прибегнем к другой процедуре аппроксимации интегралов по  $\omega$ .

Для выяснения смысла этой аппроксимации рассмотрим разложение в ряд по  $g_1^2$  величины

$$\begin{aligned} A &= C \int \delta^4\omega \exp \left[ -i \int_0^\tau \omega_\mu^2(\xi) d\xi \right] \exp \left[ -\frac{ig_1^2}{2} \int_0^\tau \int_0^\tau d\xi_1 d\xi_2 \Delta(\xi_1, \xi_2|\omega) \right] = \\ &= 1 - \frac{ig_1^2}{2} \int_0^\tau \int_0^\tau d\xi_1 d\xi_2 \bar{\Delta}_1(\xi_1 - \xi_2) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{ig_1^2}{2} \right)^2 \int_0^\tau \dots \int_0^\tau d\xi_1 \dots d\xi_4 \bar{\Delta}_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) + \dots; \end{aligned} \quad (43)$$

$\overline{\Delta}_1(\xi_1, \xi_2)$  определено в (42), а

$$\begin{aligned}\overline{\Delta}_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &= C \int \delta^4 \omega \exp \left[ -i \int_0^\tau \omega^2(\eta) d\eta \right] \Delta_1(\xi_1, \xi_2 | \omega) \Delta_1(\xi_3, \xi_4 | \omega) = \\ &= \int d^4 k_1 \int d^4 k_2 D(k_1) D(k_2) \exp \{ i(k_1^2 + 2pk_1) |\xi_1 - \xi_2| + \\ &\quad + i(k_2^2 + 2pk_2) |\xi_3 - \xi_4| + 2ik_1 k_2 \theta(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \}, \quad (44)\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\theta(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &= \xi_1 [\theta(\xi_3 - \xi_1) - \theta(\xi_4 - \xi_1)] + \xi_2 [\theta(\xi_4 - \xi_2) - \theta(\xi_3 - \xi_2)] + \\ &\quad + \xi_3 [\theta(\xi_1 - \xi_3) - \theta(\xi_2 - \xi_3)] + \xi_4 [\theta(\xi_2 - \xi_4) - \theta(\xi_3 - \xi_4)], \\ \theta(x) &= \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Возьмем в качестве аппроксимации функционала  $\Delta(\xi_1, \xi_2 | \omega)$  в инфракрасной области его среднее значение  $\overline{\Delta}(\xi_1 - \xi_2)$ , определенное в (42). Перепишем (43) теперь в виде

$$\begin{aligned}A &= \exp \left[ -\frac{ig_1^2}{2} \int_0^\tau \int_0^\tau \overline{\Delta}(\xi_1 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] \times \\ &\quad \times C \int \delta^4 \omega \exp \left\{ -i \int_0^\tau \omega^2(\eta) d\eta - \frac{ig_1^2}{2} \int_0^\tau \int_0^\tau (\Delta - \overline{\Delta}) d\xi_1 d\xi_2 \right\},\end{aligned}$$

и разложим экспоненту под интегралом в ряд по разности  $\Delta - \overline{\Delta}$ . Тогда получим для  $A$  вместо разложения (43) новый ряд с выделенным экспоненциальным фактором:

$$\begin{aligned}A &= \exp \left[ -\frac{ig_1^2}{2} \int_0^\tau \int_0^\tau \overline{\Delta}(\xi_1 \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] \times \\ &\quad \times C \int \delta^4 \omega \exp \left[ -i \int_0^\tau \omega^2(\eta) d\eta \right] \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{ig_1^2}{2} \right)^n (n!)^{-1} \left[ \int_0^\tau \int_0^\tau (\Delta - \overline{\Delta}) d\xi_1 d\xi_2 \right]^n. \quad (45)\end{aligned}$$

Преимущество такого разложения по сравнению с теорией возмущений состоит в том, что после выделения множителя

$$\exp \left[ -i \frac{g_1^2}{2} \int_0^\tau \int_0^\tau \overline{\Delta}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right]$$

перед всем рядом и выполнения интегрирования по  $\omega$  каждый член ряда в (45) уже не содержит инфракрасных особенностей, а они содержатся только в экспоненциальном множителе.

Отметим, что можно дальше частично суммировать ряд (43). Для этого в качестве аппроксимации выражения

$$\int_0^\tau \int_0^\tau \Delta(\xi_1, \xi_2 | \omega) d\xi_1 d\xi_2$$

надо выбрать величину

$$-\frac{ig_1^2}{2} \int_0^\tau \int_0^\tau \overline{\Delta}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \frac{1}{2} \left( \frac{-ig_1^2}{2} \right)^2 \int_0^\tau \dots \int_0^\tau d\xi_{1,2,3,4} (\overline{\Delta}_2 - \overline{\Delta}_1^2). \quad (46)$$

Тогда вместо (45) будем иметь общим множителем экспоненту с показателем (46) и ряд, начинающийся после 1 с  $g_1^6$ . Однако в инфракрасной области это не изменяет результата, поскольку второй член в (46) не имеет инфракрасных особенностей, а первый является определяющим.

Если (45) подставить в выражении для функции Грина (41), то получим разложение по степеням  $g_1^2$  с общим множителем

$$\exp \left[ -\frac{ig_1^2}{2} \int_0^\tau \int_0^\tau \overline{\Delta}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right],$$

который, как это показано в работе [18], включает все инфракрасные особенности функции Грина.

Каждый член ряда (45) представляет собой разность между выражением  $\overline{\Delta}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ , получаемым в теории возмущений, и таким же выражением, но в котором отброшены члены  $k_i k_j$ , для  $i \neq j$ . Это легко видеть в  $g_1^4$ -порядке:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{ig_1^2}{2} \right)^2 \int \dots \int d\xi_1 \dots d\xi_4 [\overline{\Delta}_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) - \overline{\Delta}_1(\xi_1, \xi_2) \overline{\Delta}_1(\xi_3, \xi_4)],$$

сравнивая (42) и (44). Таким образом, предлагаемая аппроксимация функционального интеграла на языке теории возмущений означает отбрасывание в пропагаторах частиц членов вида  $k_i k_j$ ,

$$\left[ \left( p + \sum_i k_i \right)^2 - m^2 \right]^{-1} \rightarrow \left( 2p \sum_i k_i + \sum_i k_i^2 \right)^{-1} \quad (47)$$

б) *Асимптотическое поведение амплитуд рассеяния при больших энергиях и малых углах рассеяния частиц.* В последнее время рядом авторов [28, 29] было высказано утверждение, что аппроксимация пропагаторов

(47) справедлива также при больших энергиях сталкивающихся частиц, когда импульс  $|\mathbf{p}| \gg m$ . В этом случае предполагается, что член  $2p \sum_i k_i$  в пропагаторе (47) является доминирующим по сравнению с  $\sum_{i,j} k_i k_j$ . Анализ этого приближения в рамках теории возмущений показал [30, 31], что оно правильно передает асимптотическое поведение амплитуд при больших энергиях  $s \rightarrow \infty$  и малых передачах импульса  $t, t/s \ll 1$ .

Как следует из предыдущего раздела, метод функционального интегрирования позволяет получать в замкнутом виде выражения для функций Грина в приближении (47). В данном разделе будет продемонстрирована эффективность этого метода при изучении высокоэнергетической асимптотики амплитуд рассеяния. Исходя из предыдущих соображений здесь удастся получить глауберовское [32] представление, которое еще называют эйкональным или приближением геометрической оптики для амплитуды рассеяния в теории поля. Метод геометрической оптики применительно к рассеянию элементарных частиц был развит авторами этой статьи в ранних работах [33, 34].

Начнем рассмотрение с рассеяния высокоэнергетической скалярной частицы на внешнем потенциале [35]  $\varphi(x)$ . Амплитуду процесса  $f(p, q|\varphi)$  ( $p$  и  $q$  — импульсы частицы до и после рассеяния) мы можем найти, зная функцию Грина  $G(p, q|\varphi)$  этой частицы (формула (40)). Для этого нужно перейти по внешним импульсам на массовую поверхность согласно соотношению

$$f(p, q|\varphi) = \lim_{p^2, q^2 \rightarrow m^2} [(p^2 - m^2)(q^2 - m^2)G(p, q|\varphi)]. \quad (48)$$

Процедура предельного перехода (48) заключается в том, что из функции  $G(p, q|\varphi)$ , заданной интегралом (40), необходимо выделить два полюсных выражения  $(p^2 - m^2)^{-1}$  и  $(q^2 - m^2)^{-1}$  — две свободные функции Грина. Подробно эта процедура изложена в работах [29, 35, 36]. Здесь мы приведем окончательный результат для  $f(p, q|\varphi)$ :

$$f(p, q|\varphi) = \int d^4x e^{i(p-q)x} g\varphi(x) C \underbrace{\int \delta^4\omega \exp \left[ -i \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2(\eta) d\eta \right]}_{[\delta^4\omega]} \times \\ \times \int_0^1 d\lambda \exp \left\{ i\lambda g \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \left( x + 2\xi[p\theta(\xi) + q\theta(-\xi)] + 2 \int_0^\xi \omega(\eta) d\eta \right) d\xi \right\}. \quad (49)$$

Переходя к новой функциональной переменной  $z(\xi) = \int_0^\xi \omega(\eta) d\eta$ , выражению (49) придадим вид фейнмановского интеграла по траекториям  $z(\xi)$ :

$$f(p, q|\varphi) = g \int d^4x e^{i(p-q)x} \varphi(x) \int_0^1 d\lambda \int \delta z e^{iW[z]},$$

где

$$W[z] = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \{ -\dot{z}^2(\xi)^2 + \lambda g \varphi[x + 2(p\theta(\xi) + q\theta(-\xi))\xi + 2z(\xi)] \},$$

— функция действия релятивистской частицы, движущейся в потенциале  $\varphi$ ;  $\xi$  играет роль собственного времени частицы, при  $\xi = 0$  частица находится в точке  $x$ , а  $z(\xi)$  — переменная, описывающая отклонение этой частицы от прямолинейных траекторий вдоль 4-импульса  $p$  ( $\xi > 0$ ) до рассеяния и вдоль  $q$  ( $\xi < 0$ ) после рассеяния.

Рассматривая асимптотическое поведение амплитуды (49) при больших импульсах  $p_0, q_0 \gg m$ , естественно поставить вопрос: можем ли мы пренебречь функциональной переменной  $z(\xi)$  в аргументе  $\varphi$  по сравнению с большой величиной  $p\theta(\xi) + q\theta(-\xi)$  и будет ли это хорошей аппроксимацией интеграла при больших  $p_0$  и  $q_0$ ?

Ответ на этот вопрос связан с характером функции  $\varphi$ , если потенциал  $\varphi$  — гладкая, неосциллирующая, ограниченная функция, удовлетворяющая условиям

$$p_0^2 \gg g \max |\varphi(x)|, \quad |p| \gg \frac{|\partial\varphi/\partial x|}{|\varphi(x)|}, \quad p_0 \gg \frac{|\partial\varphi/\partial x_0|}{|\varphi(x)|}, \quad (50)$$

то тогда можно доказать [35], что разложение  $\varphi$  в ряд Тейлора по функциональному аргументу в (49) и последующее интегрирование по  $\omega$  приводит в показателе экспоненты (49) к выражению

$$\varphi(x + 2\xi[p\theta(\xi) + q\theta(-\xi)]) + O(1/|p|). \quad (51)$$

Этот результат можно понять, исходя из следующих рассуждений. Два последних условия (50) — суть условия справедливости квазиклассического приближения. Поэтому для приближенного вычисления функционального интеграла можно применить рассмотренный выше метод стационарной фазы, когда основной вклад в интеграл дает классическая траектория. Из-за первого условия (50) хорошим приближением для классической траектории оказываются два прямолинейных пути: вдоль  $p$ , когда  $\xi > 0$ , и вдоль  $q$ , когда  $\xi < 0$ .

В этом случае справедливо также (и дает более точный результат, чем (51)) аппроксимация потенциала  $\varphi$  его средним значением согласно (42):

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}(x + 2\xi[p\theta(\xi) + q\theta(-\xi)]) = \\ = C \int \delta^4\omega \exp \left[ -i \int \omega^2(\eta) d\eta \right] \varphi \left( x + 2\xi[p\theta(\xi) + q\theta(-\xi)] + 2 \int_0^\xi \omega(\eta) d\eta \right). \end{aligned}$$

Условия (50) являются условиями справедливости глауберовского [32], или эйконального, представления для амплитуды рассеяния, которое сразу следует из (49) при малых передачах импульса  $|p - q|$  (угол рассеяния  $\alpha \ll \ll (pR)^{-1/2}$ ,  $R$  — радиус действия потенциала). В случае потенциала  $\varphi(r)$ , не зависящего от времени, имеем

$$f(p, q|\varphi) = 4\pi\delta(p_0 - q_0)|p|i \int d^2x_\perp e^{i(p-q)_\perp x_\perp} [1 - e^{i\chi(x_\perp)}],$$

где

$$x_\perp = (x_1, x_2); \quad \chi(x_1) = \frac{g}{2|p|} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \varphi \left( x_1 + \frac{p\xi}{|p|} \right).$$

Полученное таким образом эйкональное представление справедливо, как было выяснено [35], в более широкой области углов; при этом удалось уточнить результаты Шиффа [37], найденные в рамках теории возмущений. На основе изложенного здесь подхода в работе [38] получено эйкональное представление для амплитуды рассеяния дираковской частицы на произвольном потенциале.

Рассмотрим еще возможность применения аппроксимации (45) и, следовательно, (47) при вычислении асимптотического поведения амплитуды рассеяния двух частиц в высокоэнергетической области и при фиксированных передачах импульса. В работах [29, 39] было исследовано этим методом асимптотическое поведение амплитуды упругого рассеяния, в последующих работах [40] было изучено влияние радиационных поправок к диаграммам рассеяния.

Схема построения упругой амплитуды в рамках обсуждаемого приближения состоит в следующем. Зная  $G(p, q|\varphi)$ , можно, пренебрегая вкладами от поляризации нуклонного вакуума,  $S_0(\varphi) = 1$ , найти квантовую двухчастичную функцию Грина:

$$\begin{aligned} G(p_1, p_2|q_1, q_2) = C\varphi \int \delta\varphi \exp \left[ -\frac{i}{2} \int D^{-1}(q)\varphi(q)\varphi(-q)d^4q \right] \times \\ \times [G(p_1, q_1|\varphi)G(p_2, q_2|\varphi) + G(p_1, q_2|\varphi)G(p_2, q_1|\varphi)], \end{aligned}$$

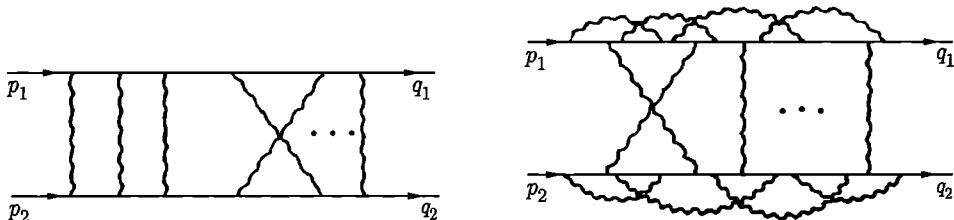
выполнив интегрирование по  $\varphi$ .

С помощью перехода на массовую поверхность по внешним импульсам можно построить двухчастичную амплитуду

$$i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) f(p_1, p_2; q_1, q_2) = \\ = \lim_{p_i^2, q_i^2 \rightarrow m^2} [(p_1^2 - m^2)(q_1^2 - m^2)(p_2^2 - m^2)(q_2^2 - m^2) G(q_1, q_2 | p_1, p_2)],$$

которая, в отличие от одночастичной амплитуды (49), выражается двойным функциональным интегралом по  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (интегралы по траекториям двух рассеивающихся частиц).

Выражение для  $f$ , имеющее довольно громоздкий вид (см. [29, 39]), включает в себя вклады сумм графов Фейнмана типа, указанных слева и графов второго типа с радиационными поправками (справа):



В работе [31] показано, что аппроксимация (47) верна в высокоэнергетической области  $s \rightarrow \infty$  и при малых передачах импульса  $t$  для выражений, связанных с графами первого типа и не верна для каждого графа второго типа. Однако в работах [41] доказывается до шестого порядка включительно, что в каждом порядке теории возмущений сумма графов второго типа, а не отдельный граф, имеет ту же асимптотику при  $s \rightarrow \infty$  и фиксированном  $t$ , что и получаемая при аппроксимации (45).

Таким образом, изучение асимптотического поведения отдельного фейнмановского графа может и не передавать асимптотического поведения суммы графов данного порядка, поэтому рассмотренные здесь приемы суммирования и аппроксимации ряда теории возмущений с помощью техники функциональных интегралов могут оказаться более адекватными приемами для исследования асимптотик в КТП, чем изучение асимптотики каждого графа в отдельности с их последующим суммированием. При этом мы еще раз хотим подчеркнуть, что трудно привести строгие математические доказательства применимости используемых приближений при вычислении функциональных интегралов [42].

Из описанных в обзоре примеров применения метода функционального интегрирования в КМ и КТП видно, что этот метод делает лишь только первые шаги как в математическом аспекте, так и в физических приложениях. Однако физическая наглядность и изящество формулировки основных задач КТП в рамках этого метода позволяет надеяться, что он будет развиваться и в будущем.



## Список литературы

1. Гельфанд И. М., Яглом А. М. // УМН. 1956. Т. 11(1). С. 77.
2. Ковальчик И. М. // Там же. 1963. Т. 18(1). С. 109.
3. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965. Гл. IV.
4. Feynman R. // Rev. Mod. Phys. 1948. V. 20. P. 367; Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.
5. Davies H. // Proc. Camb. Phil. Soc. 1963. V. 59. P. 147; Babbitt D. // J. Math. Phys. 1963. V. 4. P. 36.
6. Feynman R. // Phys. Rev. 1951. V. 24. P. 108; Garrod C. // Rev. Mod. Phys. 1966. V. 38. P. 483.
7. Барбашов Б. М. // ЖЭТФ. 1968. Т. 54. С. 1096.
8. Фаддеев Л. Д. // ТМФ. 1969. Т. 1. С. 3.
9. Березин Ф. А. // Там же. 1971. Т. 6. С. 194.
10. Peak D., Inomata A. // J. Math. Phys. 1969. V. 10. P. 1422.
11. Edwards S., Gulyaev Yu. // Proc. Roy. Soc. A. 1964. V. 249. P. 229.
12. Барбашов Б. М., Первушин В. Н. // ТМФ. 1970. Т. 3. С. 320.
13. Dirac P. A. M. // Proc. Roy. Soc. A. 1968. V. 246. P. 326, 333; Phys. Rev. 1959. V. 114. P. 924.
14. Гельфанд И. М., Ченцов Н. Н. // ЖЭТФ. 1956. Т. 31. С. 1106.
15. Евсеев А. В. // ДАН СССР. 1969. Т. 189. С. 1197.
16. Гельфанд И. М., Минлос Д. А. // Там же. 1954. Т. 97. С. 209; Фрадкин Е. С. // Тр. ФИАН. 1965. Т. 29. С. 3; ДАН СССР. 1954. Т. 98. С. 47.
17. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Гостехиздат, 1957. Гл. VII; Боголюбов Н. Н. // ДАН СССР. 1954. Т. 99. С. 225; Edwards S. F., Peierls R. E. // Proc. Roy. Soc. A. 1954. V. 224. P. 1154.
18. Барбашов Б. М. // ЖЭТФ. 1965. Т. 48. С. 607.
19. Баталин И. А., Фрадкин Е. С. Приближение стационарной фазы в функциональном методе. I. Препринт ФИАН № 137, 1968.
20. Фок В. А. // Изв. АН СССР, ОМОН. 1937. № 4/5. С. 551.
21. Feynman R. // Phys. Rev. 1951. V. 84. P. 108.
22. Fradkin E. S. // Nucl. Phys. 1966. V. 76. P. 588.
23. Lam C. // Nuovo Cim. A. 1966. V. 42. P. 451.
24. Маслов В. П. // ТМФ. 1970. Т. 2. С. 30; Morette C. // Phys. Rev. 1951. V. 71. P. 848.
25. Блохинцев Д. И. // ТМФ. 1970. Т. 4. С. 145. — Статья № 96 в наст. изд. — *Прим. ред.*
26. Yennie D. et al. // Ann. Phys. 1961. V. 13. P. 379.
27. Милехин Г. А. // ЖЭТФ. 1962. Т. 43. С. 1012.
28. Fradkin E. S. // Acta Hung. 1965. V. 19. P. 175; Levy M., Sucher I. // Phys. Rev. 1969. V. 186. P. 1656; 1970. V. D2. P. 1716.
29. Барбашов Б. М. и др. // ТМФ. 1970. Т. 3. С. 342.
30. Tiktoupolous G., Treimau S. // Phys. Rev. D. 1970. V. 2. P. 805.
31. Барбашов Б. М., Нестеренко В. В. // ТМФ. 1970. Т. 4. С. 283.
32. Glauber R. // Lectures in Theoretical Physics, v. 1 / Eds.: W. E. Brittin, L. G. Dunham. N.Y.-L.: Interscience Publ., 1959. P. 315.

33. Блохинцев Д. И. и др. // УФН. 1959. Т. 68. С. 417; *Blokhintsev D. I.* // Nucl. Phys. 1962. V. 31. P. 628.
34. *Blokhintsev D. I.* // Nuovo Cim. 1963. V. 30. P. 1094.
35. Первушин В. Н. // ТМФ. 1970. Т. 4. С. 22; *Pervushin V. N.* Path Integ Semiclassical Approximation for the Potential Scattering Amplitude. JINR Preprint E2-5938. Dubna, 1971.
36. Милехин Г. А., Фрадкин Е. С. // ЖЭТФ. 1963. Т. 45. С. 1926; Барбашов Б. М., Волков М. К. Там же. 1966. Т. 50. С. 13.
37. *Schiff L. I.* // Phys. Rev. 1968. V. 176. P. 1390.
38. Первушин В. Н. // ТМФ. 1971. Т. 9. С. 264.
39. *Abarbanel H. D., Itzykson C.* // Phys. Rev. Lett. 1969. V. 23. P. 53; Андреев И. В. // ЖЭТФ. 1970. Т. 58. С. 257; ЯФ. 1971. Т. 14. С. 837; Барбашов Б. М. и др. // ТМФ. 1970. Т. 5. С. 330.
40. *Barbashov D. V. et al.* // Phys. Lett. A. 1970. V. 33. P. 419; Nuovo Cim. A. 1971. V. 4. P. 731.
41. *Chang S.-J.* // Phys. Rev. D. 1970. V. 1. P. 2977; *Yao Y. P.* // Ibid. 1971. V. 4. P. 1364.
42. Барбашов Б. М., Нестеренко В. В. // ТМФ. 1971. Т. 9. С. 343; 1972. Т. 10. С. 196; *Barbashov B. M., Nesterenko V. V.* Eikonal Representation of the Scattering Amplitude Containing the Veneziano Virtual Blocks. JINR Preprint E2-6069. Dubna, 1971; Investigation of the High Energy Behaviour of the «Meson-Nucleon» Scattering Amplitude in Scalar Model by Functional Method. JINR Preprint E2-6161. Dubna, 1971.

## СТОХАСТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО И НЕЛОКАЛЬНОЕ ПОЛЕ\*

Рассмотрен вариант стохастического пространства, обладающего той особенностью, что поле, усредненное в этом пространстве, оказывается нелокальным полем, приводящим к матрице рассеяния, которая удовлетворяет требованиям макроскопической причинности и унитарности.

### Введение

В локальной теории координатам точечного события  $P(x)$   $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  придается абсолютно точное значение. В микромире представителями точечных событий являются элементарные частицы. Однако они не могут быть локализованы точнее, нежели

$$\Delta x \geq \hbar/m_0c,$$

где  $m_0$  — масса частицы. Таким образом, локальная теория неявно предполагает возможность существования частиц с  $m_0 \rightarrow \infty$ . Если на самом деле возможные массы частиц ограничены сверху некоторой массой «максимона»  $M$ , то точность определения координат точечного события  $P(x)$  будет ограничена комптоновской длиной  $\hbar/Mc$ . Возможен «гравитационный максимон» с  $M_g = \hbar/\Lambda_g c$ ,  $\Lambda_g = 0,82 \cdot 10^{-32}$  см или «слабый максимон»  $M_F = \hbar/\Lambda_F c$ ,  $\Lambda_F = 0,66 \cdot 10^{-16}$  см<sup>1</sup>. В дальнейшем мы будем иметь в виду ограничения, не связанные с гравитацией, т.е. предположительно вступающие в силу ранее при  $M \ll M_g$ , соответственно при  $\Lambda \gg \Lambda_g$ .

Допущения о существовании максимона приводят к представлению о пространстве, в котором координаты точек определены лишь с некоторой степенью вероятности, т.е. к стохастическому пространству  $R_4(\hat{x})$  [3]. В таком пространстве координаты точечного события  $P(\hat{x})$  могут быть представлены в виде суммы

$$\hat{x}_\mu = x_\mu + \hat{\xi}_\mu(x), \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \quad (1)$$

где  $x_m$  есть среднее значение координаты точечного события  $P(\hat{x})$ . Эта координата может интерпретироваться как координата точечного события  $P(x)$  в римановом пространстве  $R_4(x)$ . Далее, величина  $\hat{\xi}_\mu(x)$  представляет собой

отклонение координаты от среднего, это отклонение является стохастической величиной. По определению среднее от  $\hat{x}_\mu$  есть

$$\langle \hat{x}_\mu \rangle_R = x_\mu, \quad \langle \hat{\xi}_\mu(x) \rangle_R = 0, \quad (2)$$

где через  $\langle \dots \rangle_R$  обозначено усреднение по статистическому ансамблю, в котором определены вероятности тех или иных значений величины  $\hat{\xi}_\mu(x)$ . Природа и характер этого ансамбля определяются физикой.

Заметим, что при заданной средней координате точечного события величина  $\hat{\xi}_\mu(x)$  имеет смысл дифференциала и определяет в стохастическом смысле окрестность точки  $P(x)$ . Элемент длины в этой окрестности  $\Delta \hat{s}$  мы определим, следуя принципам геометрии Финслера. В этой геометрии элемент длины  $ds$  в окрестности каждой точки пространства задается в виде формы первого порядка по  $dx_\mu$ <sup>1</sup>:

$$ds = n_\mu dx^\mu. \quad (3)$$

Причем в этой формуле вектор  $n$  может быть функцией координат точки  $P(x)$ , а также зависеть от отношений дифференциалов  $dx^\mu/dx^\nu$ . В случае пространства Минковского вектор  $n$  постоянен и  $n^2 = 1$ . Для времениподобного направления вектора  $n$  элемент длины  $ds$  чисто мнимый. В нашем случае роль  $dx^\mu$  играют конечные величины  $\hat{\xi}_\mu$ , так что элемент длины  $\Delta \hat{s}$  является также конечной стохастической величиной. Формула для  $\Delta \hat{s}$ , обобщающая формулу (3) геометрии Финслера, имеет вид

$$\Delta \hat{s} = n_\mu \Delta \hat{x}^\mu = n_\mu \hat{\xi}^\mu(x). \quad (4)$$

Среднее от произведения величин  $\xi_\mu(x)$  и  $\xi_\nu(y)$

$$\langle \xi_\mu(x) \xi_\nu(y) \rangle_R = C_{\mu\nu}(x, y) \quad (5)$$

определяет корреляцию окрестностей точек  $P(x)$  и  $P(y)$ . Простейший случай имеет место, когда корреляция отсутствует, так что

$$\langle \xi_\mu(x) \xi_\nu(y) \rangle_R = 0, \quad x \neq y. \quad (6)$$

Если стохастическое пространство однородно, то величины  $\hat{\xi}_\mu(x)$  не зависят от  $x$ . Однако условие (6) сохраняет свое значение и в этом вырожденном случае и означает, что каждой точке  $P(x)$  приписывается свой только ей принадлежащий вектор  $\hat{\xi}_\mu(x)$ , одинаковый в статистическом понимании для всех точек в  $R_4(x)$ .

<sup>1</sup> См. монографию [4]; в формуле (3) явно отмечен ковариантный характер величин  $x^\mu$  ( $dx^\mu$  вместо  $dx_\mu$ !).

# 1. Пространство $\Gamma_4(x)$

Рассмотрим теперь одну из реализаций стохастического пространства  $R_4(\hat{x})$ . Именно положим

$$\hat{x}_\mu = x_\mu + a\gamma_\mu, \quad \xi_\mu = a\gamma_\mu, \quad (7)$$

где  $\gamma_\mu$  суть матрицы Дирака, и  $a$  есть амплитуда флуктуации координаты. Мы допустим, что существует некоторое распределение длины  $a$ , например нормальное

$$dw\left(\frac{a}{\Lambda}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{da}{\Lambda} \exp\left\{-\frac{a^2}{\Lambda^2}\right\}, \quad (8)$$

где  $\Lambda$  — «элементарная длина». Таким образом,  $\hat{\xi}_\mu$  является оператором с неопределенной амплитудой. Из (4) и (7) следует

$$\Delta\hat{s} = a(n_\mu\gamma^\mu) = a(n\gamma). \quad (9)$$

Формулы (7), (8) и (9) определяют особое пространство  $\Gamma_4(\hat{x})$ , являющееся частным случаем стохастического пространства  $R_4(\hat{x})$ .

Заметим, что операторы элемента длины  $\Delta\hat{s}$ , взятые в одной и той же точке, но для разных направлений  $n$ , не коммутируют между собой, так как

$$\{\xi_\mu, \xi_\nu\} = 2a^2\delta^{\mu\nu}, \quad (10)$$

где  $\{A, B\} = AB + BA$ . В силу этого окрестность точки  $P(x)$  распадается на отдельные, не совместимые друг с другом лучи. В этом свойстве пространства  $\Gamma_4(\hat{x})$  можно усмотреть аналогию с «квантованным» пространством Снайдера<sup>1</sup>.

Найдем теперь собственные значения  $\lambda$  оператора  $\Delta\hat{s}$ . Для этого следует решить уравнение

$$\Delta\hat{s}u_\lambda = \lambda u_\lambda, \quad (11)$$

где  $u_\lambda$  — собственный спинор. Решение уравнения (11) элементарно и приводит к результату

$$\lambda_\pm = \pm a\sqrt{n^2}, \quad u_\lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ i\sigma\mathbf{n}/(n_4 + \lambda) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где  $\sigma$  — векторная матрица Паули.

Ввиду того что у нас нет оснований предпочесть одно из собственных значений другому, мы будем считать, что состояние окрестности любой точки  $P(x)$  является смешанным и оба значения  $\lambda_\pm$  равновероятны. При этом упро-

<sup>1</sup> См. [5]. Заметим, что у Снайдера состояние с определенным значением одной из координат не является какой-либо суперпозицией состояний с определенными значениями других координат, так как соответствующие собственные функции зависят от различных компонент импульса в импульсном пространстве  $R_4(p)$ .

шающем предположении усреднение любой функции  $f(\Delta\hat{s})$  в окрестности какой-либо точки в пространстве  $\Gamma_4(\hat{x})$  определяется формулой

$$\langle f(\Delta\hat{s}) \rangle_\Gamma = \frac{1}{2} \int dw \left( \frac{a}{\Lambda} \right) [f(\lambda_+) - f(\lambda_-)]. \quad (13)$$

Такое усреднение возможно в каждой точке  $P(x)$  и статистически независимо от усреднения в другой точке  $P(y)$ , если только  $x \neq y$ .

## 2. Поля в пространстве $\Gamma_4(\hat{x})$

Под полем в пространстве  $\Gamma_4(\hat{x})$  будем подразумевать представимую в виде интеграла Фурье функцию

$$\Psi(\hat{x}) = \int \tilde{\Psi}(k) e^{ik\hat{x}} d^4k. \quad (14)$$

Функции  $\Psi(\hat{x})$  суть функции операторов  $\hat{x}_\mu$  и поэтому не удовлетворяют какому-либо дифференциальному уравнению. Заменой дифференциального уравнения для  $\Psi(\hat{x})$  может служить условие, накладываемое на ее фурье-образ  $\tilde{\Psi}(k)$  типа

$$\tilde{\Psi}(k) = \delta(k^2 + m^2) f(k). \quad (15)$$

Это условие выражает закон дисперсии волн  $\Psi(x)$ . При этом предполагается, что  $f(k)$  уже не содержит полюсов или  $\delta$ -функций.

Найдем теперь среднее поле  $\Psi(x)$ . Для этого заметим, что собственные значения оператора  $e^{ik\hat{x}}$  на основании (7) и (12) будут

$$f_\pm(k, x) = \exp\{i(kx \pm a\sqrt{k^2})\}, \quad (16)$$

а их среднее значение согласно (13) равно

$$\langle f_\pm(k, x) \rangle_\Gamma = e^{ikx} \int dw(a) e^{ia\sqrt{k^2}} \quad (17)$$

(если  $dw(a) = dw(-a)$ ). В силу этого среднее поле  $\Psi(x)$  равно

$$\Psi(x) = \langle \Psi(\hat{x}) \rangle_\Gamma = \int \tilde{\Psi}(k) e^{ikx} \tilde{K}(\Lambda\sqrt{k^2}) d^4k, \quad (18)$$

где согласно (17)

$$\tilde{K}(\Lambda\sqrt{k^2}) = \int dw(a/\Lambda) e^{ia\sqrt{k^2}}. \quad (19)$$

Если  $\tilde{K}(z)$  есть целая функция, то из (15) следует

$$\square^2 \Psi(x) + m^2 \Psi(x) = 0, \quad (20)$$

т. е. среднее поле удовлетворяет уравнению Клейна. Для дальнейшего удобно несколько изменить обозначения. Именно положим

$$\tilde{K}(\Lambda\sqrt{k^2}, m) = \tilde{K}(\Lambda\sqrt{k^2})/\tilde{K}(\Lambda\sqrt{-m^2}), \quad (21)$$

$$\tilde{\Phi}(k) = \tilde{K}(\Lambda\sqrt{-m^2})\tilde{\Psi}(k). \quad (21')$$

Тогда вместо (18) получим

$$\Psi(x) = \int \tilde{\Phi}(k)\tilde{K}(\Lambda\sqrt{k^2}, m)e^{ikx}d^4x. \quad (22)$$

Из  $\tilde{\Phi}(k)$  можно построить локальное поле

$$\Phi(x) = \int \tilde{\Phi}(k)e^{ikx}d^4k, \quad (23)$$

также удовлетворяющее уравнению (20), если  $\tilde{K}(z)$  — функция целая. Из (22) следует

$$\Psi(x) = \int K(x-y)\Phi(y)d^4y, \quad (24)$$

где  $K(x)$  есть пространственный образ Фурье функции  $\tilde{K}(\Lambda\sqrt{k^2}, m)$

$$K(x) = \int \tilde{K}(\Lambda\sqrt{k^2}, m)e^{ikx}d^4k. \quad (25)$$

Заметим, что  $K(x)$  может и не существовать, однако представление (24) все же будет иметь силу.

Обратимся теперь к среднему от произведения полей  $\langle\Psi(\hat{x})\Psi(\hat{y})\rangle$ , взятых в различных точках пространства  $\Gamma_4(\hat{x})$ . На основании предположения о статистической независимости в  $\Gamma_4(\hat{x})$  окрестностей различных точек  $P(x)$  и  $P(y)$  имеем

$$\langle\Psi(\hat{x})\Psi(\hat{y})\rangle_{\Gamma} = \langle\Psi(\hat{x})\rangle_{\Gamma}\langle\Psi(\hat{y})\rangle_{\Gamma}, \quad (26)$$

$$\langle\Psi(\hat{x})\Psi(\hat{y})\rangle_{\Gamma} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \langle\Psi(\hat{x})\Psi(\hat{x} + \delta)\rangle_{\Gamma} = \langle\Psi(\hat{x})\rangle_{\Gamma}\langle\Psi(\hat{x})\rangle_{\Gamma}. \quad (27)$$

Таким образом, каждому полю  $\Psi(\hat{x})$  в пространстве  $\Gamma_4(\hat{x})$  сопоставляется нелокальное поле  $\Psi(x)$  в пространстве  $R_4(x)$  как результат усреднения поля  $\Psi(\hat{x})$  в окрестности каждой точки  $P(x)$ . Далее, нелокальному полю  $\Psi(x)$  согласно (23) и (24) сопоставляется локальное поле  $\Phi(x)$ .

### 3. Квантование поля $\Psi(x)$

Обратимся теперь к квантованию поля  $\Psi(x)$ . Наиболее прямой путь построения коммутационных условий для такого поля, взятого в различных точках  $\hat{x}$  и  $\hat{y}$ , основывается на использовании соотношений (22) или (24),

которые связывают среднее нелокальное поле с локальным. Эти соотношения позволяют построить среднее от коммутатора полей  $\Psi(x)$  и  $\Psi(y)$ :

$$\begin{aligned}\langle \Psi(\hat{x})\Psi(\hat{y}) \rangle_{\Gamma} &= [\Psi(x)\Psi(y)] = \\ &= \int K(x-x')K(y-y')d^4x'd^4y'[\Phi(x')\Phi(y')] = \\ &= \int K(x-x')K(y-y')d^4x'd^4y'(iD(x'-y')) = iD_{\Gamma}(x-y),\end{aligned}\quad (28)$$

где

$$D_{\Gamma}(x-y) = \int \tilde{V}(\Lambda\sqrt{q^2}, m)\tilde{D}(q)e^{iq(x-y)}d^4q, \quad (29)$$

$$\tilde{V}(\Lambda\sqrt{q^2}, m) = [\tilde{K}(\Lambda\sqrt{q^2}, m)]^2. \quad (30)$$

Подобным же образом может быть построено  $T$ -произведение с упорядочением по среднему времени:

$$\begin{aligned}\langle T\Psi(\hat{x})\Psi(\hat{y}) \rangle_{\Gamma} &= T\Psi(x)\Psi(y) = \\ &= T \int \tilde{K}(\Lambda\sqrt{k'^2}, m)\tilde{K}(\Lambda\sqrt{k''^2}, m)d^4k'd^4k''T[\Phi(k')e^{ik'x}\Phi(k'')e^{ik''x}].\end{aligned}\quad (31)$$

Усредним теперь это выражение по вакууму локальных полей  $\Phi$  и, замечая, что

$$\langle 0|T\Phi(k')\Phi(k'')e^{i(k'x+k''y)}|0\rangle = \delta^4(k'+k'')e^{ik'(x-y)}\tilde{D}_c(k'), \quad (32)$$

получим

$$\langle 0|\langle T\Psi(\hat{x})\Psi(\hat{y}) \rangle_{\Gamma}|0\rangle \equiv \langle 0|T\Psi(x)\Psi(y)|0\rangle = D_{c\Gamma}(x-y), \quad (33)$$

где

$$D_{c\Gamma}(x-y) = \int \tilde{V}(\Lambda\sqrt{q^2}, m)\tilde{D}_c(q)e^{iq(x-y)}d^4q \quad (34)$$

есть нелокальная причинная функция, а  $\tilde{D}_c(q)$  — фурье-образ локальной причинной функции, именно

$$\tilde{D}_c(q) = [k^2 + m^2 + i\varepsilon]^{-1}. \quad (35)$$

Из формул (28)–(30) и (33), (35) следует, что нелокальное поле  $\Psi(x)$ , полученное в результате усреднения поля  $\Psi(\hat{x})$  в стохастическом пространстве  $\Gamma_4(\hat{x})$ , обладает всеми чертами нелокального поля, подробно исследованного в работах Г. В. Ефимова [6, 7], если функция  $\tilde{V}(z, m)$  ( $z = \Lambda\sqrt{k^2}$ ) является не только целой, но и имеет определенный порядок роста в комплексной плоскости  $z$ ,  $\tilde{V}(z, m) \sim \exp(|z|\rho)$  с  $\rho \geq 1/2$ , равна 1 при  $z = \Lambda\sqrt{-m^2}$  и убывает в пространственноподобной области, т. е. при  $k^2 \rightarrow \infty$ . При этих условиях матрица рассеяния, построенная на основе такого нелокального поля, удовлетво-



ряет требованиям унитарности и макроскопической причинности (см. [6, 7]). Указанные необходимые требования к функции  $\tilde{V}(z, m)$  на основании (19), (21) и (30) могут быть сформулированы на языке моментов амплитуды  $a$ . Действительно, из (19) следует

$$\tilde{K}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int dw \left(\frac{a}{\Lambda}\right) \left(\frac{a}{\Lambda}\right)^n \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} (iz)^n, \quad (36)$$

где

$$b_n = \int dw \left(\frac{a}{\Lambda}\right) \left(\frac{a}{\Lambda}\right)^n \quad (37)$$

есть момент  $n$ -го порядка от  $a/\Lambda$ . Таким образом, функция  $\tilde{K}(z)$  полностью определена моментами амплитуды  $a$ . Если  $dw(a/\Lambda)$  — нормальные распределения (8), то из (19) и (21) следует

$$\tilde{K}(z, m) \equiv \tilde{K}(\Lambda\sqrt{k^2}, m) = \exp \left\{ -\frac{\Lambda^2}{4}(k^2 + m^2) \right\}, \quad (38)$$

$$\tilde{V}(z, m) \equiv \tilde{V}(\Lambda\sqrt{k^2}, m) = \exp \left\{ -\frac{\Lambda^2}{2}(k^2 + m^2) \right\}. \quad (39)$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям, необходимым для обеспечения унитарности матрицы рассеяния<sup>1</sup>.

Для иллюстрации соблюдения в этой теории макроскопической причинности возьмем в (24) в качестве  $\Phi(y)$  пробную функцию

$$\Phi(y) = \exp \left\{ -\frac{y_0^2 + \mathbf{y}^2}{b^2} \right\} = \int \exp \left\{ -\frac{b^2}{4}(q_0^2 + \mathbf{q}^2) + i q y \right\} d^4 q \quad (40)$$

и  $\tilde{K}(\Lambda\sqrt{k^2}, m)$ , тогда

$$\begin{aligned} K(x, -y) &= \exp \left\{ -\frac{\Lambda^2}{4}(k^2 + m^2) + i k(x - y) \right\} d^4 k = \\ &= \exp \left\{ -\frac{\Lambda^2}{4} m^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{(x - y)^2}{\Lambda^2} \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

Подставляя (41) и (42) в (24), найдем

$$\Psi(x) \cong \exp \left\{ -\frac{\Lambda^2}{4} m^2 \right\} \exp \left\{ -\left( \frac{x_0^2}{T^2} + \frac{\mathbf{x}^2}{L^2} \right) \right\}, \quad (42)$$

где

$$T^2 = (l^2 - \Lambda^2), \quad L^2 = (l^2 + \Lambda^2). \quad (43)$$

<sup>1</sup> Ср. [8]; следует учесть, что в статьях Г. В. Ефимова  $k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2$ , в нашей статье  $k^2 = -k_0^2 + \mathbf{k}^2$ .

Отсюда видно, что при  $l \gg \Lambda$ , т. е. для волновых пакетов, размеры которых превосходят элементарную длину  $\Lambda$ , нелокальная волновая функция  $\Psi$  лишь несколько размыта в окрестности локальной функции  $\Phi(x)$ .

Из (43) можно было бы заключить, что причинность полностью нарушается при  $l < \Lambda$  (так как тогда  $T^2 < 0$ ). Однако это обстоятельство связано с тем, что взятый нами волновой пакет (41) имеет фурье-образ  $\tilde{\Phi}(q)$  того же роста, что и рост  $\tilde{K}(a\sqrt{k^2}, m)$ , и поэтому не удовлетворяет общим требованиям теории Ефимова. Согласно этим требованиям все пробные функции должны иметь рост  $\gamma < (1 - 1/2\rho)^{-1}$ . Пробные функции  $\Phi(y)$  такого роста «размазываются» оператором  $K(x - y)$  в ограниченной четырехмерной области, причем сдвиг аргумента  $y_0$  чисто мнимый, а аргумента  $y$  действительный (см. [7]). Это любопытное обстоятельство в теории стохастического пространства  $\Gamma_4(\hat{x})$  заложено с самого начала, так как оператор  $\xi_0 = \xi_4/i$  чисто мнимый.

### Список литературы

1. Марков М. А. Е-2014. Dubna, 1966; E2-5271. Dubna, 1970.
2. Блохинцев Д. И. // УФН. 1973. Т. 110, вып. 4. С. 481. — Статья № 103 в наст. изд. — Прим. ред.; E2-6653. Dubna, 1972.
3. Блохинцев Д. И. // ТМФ. 1972. Т. 11. С. 3; JINR Preprint E2-6566. Dubna, 1972; Пространство и время в микромире. М.: Наука, 1970.
4. Rund H. The differential geometry of Finsler Spaces. Springer, 1959. Имеется перевод: Х. Рунд. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981. — Прим. ред.
5. Snyder H. // Phys. Rev. 1947. V. 71. P. 38.
6. Efimov G. V. // Commun. Math. Phys. 1967. V. 5. P. 42.
7. Efimov G. V. // Ibid. 1968. V. 7. P. 138.
8. Алебастров В. А., Ефимов Г. В. Препринт ОИЯИ P2-6586. Дубна, 1972.

Объединенный институт  
ядерных исследований

Поступила  
30 января 1973 г.

## «ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ДЛИНА» И ЭФФЕКТ МЁССБАУЭРА\*

Показано, что эффект Мёссбауэра для широкого класса предположений о нелокальности не является критичным для оценки «элементарной длины».

### 1. Вводные замечания

Используя эффект Мёссбауэра, можно наблюдать относительную ширину линий в спектре  $\gamma$ -излучения, порядка  $\Delta\omega/\omega \sim 10^{-16}$ . Такая высокая точность послужила основанием для предложений использовать этот эффект для определения верхнего предела «элементарной длины»  $a$  в некоторых вариантах нелокальной теории поля [1, 2].

Ниже указаны весьма общие нелокальные схемы, которые, однако, не приводят к какому-либо расширению спектральной линии: в процессе распространения спектральный состав, порождаемый источником, не меняется, как он не меняется в линейной, локальной теории поля. Изменение возникает лишь тогда, когда частота волны  $\omega$  становится сравнимой с частотой  $\omega_a = c/a$ , где  $a$  — элементарная длина, характерная для нелокальной теории.

Экспериментальные данные из физики высоких энергий показывают, что  $a < 10^{-15}$  см,  $\omega_a > 10^{25}$  с $^{-1}$ . Поэтому из факта существования узких спектральных линий с частотами  $\omega \ll 10^{25}$  с $^{-1}$  нельзя сделать вывод о верхнем пределе «элементарной длины», обязательном для любого варианта нелокальности.

В последнем разделе рассмотрено влияние квантовых флуктуаций гравитационного поля на ширину линий. Мы пришли к сходному заключению — влияние этих флуктуаций ничтожно мало, пока  $\omega \ll \Omega_g = c/\Lambda_g$ ,  $\Lambda_g = 0,82 \cdot 10^{-32}$  см.

В качестве основы для обсуждения последствий нелокальности мы исходим из линейного соотношения между полем  $A(x)$  в точке наблюдения  $P(x)$  и источником поля  $Q(x')$ , распределенным в окрестности точки  $P(x')$ :

$$A(x) = \int \mathfrak{G}_{ac}(x - x') Q(x') d^4 x'. \quad (1)$$

Здесь  $\mathfrak{G}_{ac}(x - x')$  — функция распространения поля из точки  $P(x')$  в точку  $P(x)$ . Эта функция необязательно должна быть функцией Грина некоторого дифференциального уравнения, как это и было предположено в ряде работ по нелокальной теории поля (см. [3, 4]). Однако предполагается, что эта

функция лоренцевски инвариантна и макроскопически причинна. Это последнее условие позволяет ввести понятие запаздывающей, хотя и нелокальной, функции распространения. В дальнейшем будем разумеать под  $\mathfrak{G}_{ac}(x - x')$  именно такую функцию.

Рассмотрим несколько вариантов нелокальной теории.

## 2. Нелокальность вершины светового конуса

В этом случае  $\mathfrak{G}_{ac}(x - x')$  имеет вид (см. [5, 6]):

$$\mathfrak{G}_{ac}(x - x') = \int \mathfrak{G}_c(x - x' - \xi) \rho(\xi, n) d^4 \xi, \quad (2)$$

где  $\mathfrak{G}_c(x - x')$  — запаздывающая функция Грина локальной теории, а функция  $\rho(\xi, n)$  быстро убывает с ростом евклидовой длины вектора  $|\xi|$ . Ситуация показана на рис. 1, именно:

$$\rho(\xi, n) = \int \tilde{\rho}(k, n) e^{-i\xi k} d^4 k \quad (3)$$

и

$$\rho(k, n) = f(a\mathfrak{R}), \quad (4)$$

причем  $f(0) = 1$  и с ростом  $a\mathfrak{R}$  функция  $f(a\mathfrak{R})$  быстро убывает. Здесь  $a$  — элементарная длина, а  $\mathfrak{R}$  — инвариант:

$$\mathfrak{R}^2 = 2(kn)^2 - k^2 \geq 0, \quad (5)$$

$n$  — некоторый четырехмерный единичный, времениподобный вектор:  $n^2 = 1$ . О физическом смысле этого вектора см. [5, 6].

Как известно, функция

$$\mathfrak{G}_c(x - x') = \frac{1}{r} \delta(t - t' - r), \quad (6)$$

где  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ . Источник  $Q(x')$  предположим гармоническим:

$$Q(x') = q(x') e^{i\omega t'}, \quad (7)$$

причем функция  $q(x')$  сосредоточена около точки  $\mathbf{x}' = 0$ , в области  $< L^3$ . При больших расстояниях от источника, получим из (2)

$$A(t, \mathbf{x}) = \frac{\exp[i\omega(t - R)]}{R} \int q(\mathbf{x}') d^3 x' \exp[-i\omega(\mathbf{e}\mathbf{x}')] \rho(k, n), \quad (7a)$$

где вектор  $\mathbf{e} = \mathbf{x}/R$ ,  $k = \omega, \mathbf{e}\omega$ . В частности, в системе отсчета, где вектор  $n = (1, 0, 0, 0)$ , будем иметь

$$\rho(k, n) = f(\sqrt{2} a \omega). \quad (8)$$

Из (7) следует, что отклик  $A(t, \mathbf{x})$  в точке наблюдения при  $a\omega \ll 1$  совпадает с откликом локальной теории и никакого изменения спектра линии, в частности ее уширения, не возникает.

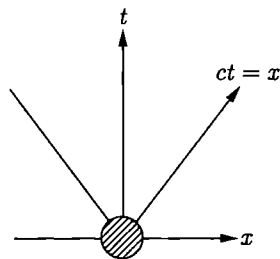


Рис. 1. Нелокальность в вершине светового конуса. Функция  $\rho(\xi, n)$

### 3. Нелокальность, сосредоточенная на световом конусе

Пример подобной нелокальности приведен в [6]. Рис. 2 иллюстрирует этот случай. Функция Грина имеет вид

$$\mathfrak{G}_{ac}(x - x') = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(x - x') + ia^2} \quad (9)$$

и распределена около всей поверхности светового конуса. Здесь  $a$  — длина, определяющая нелокальность. Эта функция может быть переписана в виде

$$\mathfrak{G}_{ac}(x - x') = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 - ia^2}} \left\{ \frac{1}{\tau - \tau'_1} - \frac{1}{\tau - \tau'_2} \right\}, \quad (9a)$$

где

$$\tau = t - t', \quad \tau_1 = \sqrt{r^2 - ia^2}, \quad \tau_2 = -\sqrt{r^2 - ia^2}. \quad (10)$$

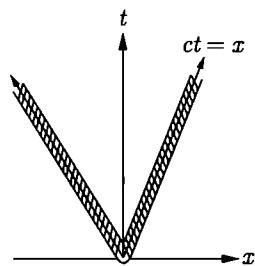


Рис. 2. Нелокальность у поверхности светового конуса. Функция  $\mathfrak{G}(x)$  отлична от нуля в заштрихованной области

Подставив  $\mathfrak{G}_{ac}(x - x')$  из (9a) и источник  $Q(x')$  из (7) в (1), нетрудно выполнить интегрирование по  $t'$ , переходя в комплексную плоскость этой переменной. В результате вдали от источника получим для отклика  $A(t, \mathbf{x})$

$$A(t, x) = \frac{\exp[i\omega(t - R)]}{R} \int q(\mathbf{x}') \exp(-i\omega \mathbf{e} \mathbf{x}') \rho\left(\frac{a\omega}{R}\right) d^3 x', \quad (11)$$

где  $\rho(a\omega/R)$  — множитель, обусловленный нелокальностью,

$$\rho\left(\frac{a\omega}{R}\right) = \exp(-a^2\omega/R) \quad (12)$$

и при  $R \rightarrow \infty$  стремится к единице. Иными словами, при  $R \rightarrow \infty$  отклик полностью совпадает с откликом, следующим из локальной теории. Следовательно, функция распространения (9) также не приводит к расширению линии.

### 4. Нелокальность с формфактором — целой функцией

В этом случае функция распространения имеет вид

$$\mathfrak{G}_{ac}(x - x') = \mathfrak{G}_c(x - x') + \mathfrak{R}(x - x'), \quad (13)$$

причем дополнительная функция  $\mathfrak{R}(x)$ , обусловленная нелокальностью, такова, что ее фурье-образ  $\tilde{\mathfrak{R}}(p)$  имеет вид

$$\tilde{\mathfrak{R}}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} (ap)^{2n} \quad (14)$$

и является целой функцией с порядком роста  $\geq 1/2$  (см. [7]). В этом случае, как показано в [7], свертка

$$\overline{Q}(x) = \int \Re(x - x') Q(x') d^4 x' \quad (15)$$

воспроизводит функцию  $Q(x')$  (в нашем случае это источник поля) в несколько «размазанном» виде, причем «размазка» сосредоточена в масштабе  $a$ , около самой функции  $Q(x')$ . По этой причине отклик  $A(t, \mathbf{x})$  при  $R \gg L$  ( $L$  — размер области, где сосредоточен источник  $Q(x')$ ) имеет вид

$$A(t, \mathbf{x}) = A_c(t, x) + O(Q(x)). \quad (16)$$

Здесь  $A_c(t, x)$  — отклик, следующий из каузальной теории,  $O(Q)$  — остаточный член, исчезающий с ростом  $R$  не медленнее, нежели  $Q(x)$ . Таким образом, в этом варианте нелокальной теории распространение сигнала также не приводит к изменению его спектра.

## 5. Дискретное время

Рассмотрим «экзотический» вариант нелокальной теории, предполагая, что время дискретно  $t = M\tau_0$ ,  $M$  — целое число,  $\tau_0$  — наименьший масштаб времени. Назовем этот случай «экзотическим» по той причине, что лоренцевская инвариантность при сделанном предположении оказывается приближенной.

Функция распространения  $\mathfrak{G}(M, \mathbf{x})$  в этой гипотетической теории подчиняется уравнению

$$\frac{1}{\tau_0^2} \Delta_M^2 \mathfrak{G}(M, \mathbf{x}) - \nabla^2 \mathfrak{G}(M, \mathbf{x}) + \mu^2 \mathfrak{G}(M, \mathbf{x}) = \delta_{MM'} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}). \quad (17)$$

Здесь  $\Delta_M^2$  — вторая конечная разность,  $\nabla^2$  — обычный оператор Лапласа,  $M$  — масса частиц поля. Очевидно, что (17) есть обобщение уравнения Клейна на случай дискретного счета времени. Фурье-образ функции распространения имеет вид

$$\tilde{\mathfrak{G}}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{2\pi\tau_0^2}{\cos z - (1 - z_k^2/2)}, \quad (18)$$

где

$$z = \omega\tau_0, \quad z_k = \tau_0\omega_k, \quad \omega_k = \sqrt{k^2 + \mu^2}. \quad (19)$$

Закон дисперсии  $\omega = \omega(k)$  определяется полюсами знаменателя в (18), т. е. уравнением

$$z_0 = \pm \arcsin \left( z_k \sqrt{1 - z_k^2/4} \right). \quad (20)$$

Эти полюса показаны на рис. 3. Их всего четыре. При  $z_k > 2$  два полюса чисто мнимые. Любопытным свойством пропагатора (18) является то об-

стоятельство, что к нему применимы правила обхода полюсов, аналогичные правилам Фейнмана, с заменой бесконечно удаленных кругов на полосы, параллельные мнимой оси. Благодаря этому можно сохранить обычные понятия опережающих и запаздывающих функций распространения. В частности, для запаздывающей функции  $\mathfrak{G}(M, \mathbf{x})$  следует взять контур  $C_k$  (см. рис. 3). В результате несложных вычислений получаем

$$\mathfrak{G}(M, \mathbf{x}) = 2\pi\tau_0^2 \int_{k < 2/\tau_0} e^{ik\mathbf{x}} \frac{\sin(z_0 M)}{\sin z_0} d^3 k + \int_{k > 2/\tau_0} e^{ik\mathbf{x}} \frac{(-z_2)^M}{\sqrt{a^2 k^2 - 1}} d^3 k. \quad (21)$$

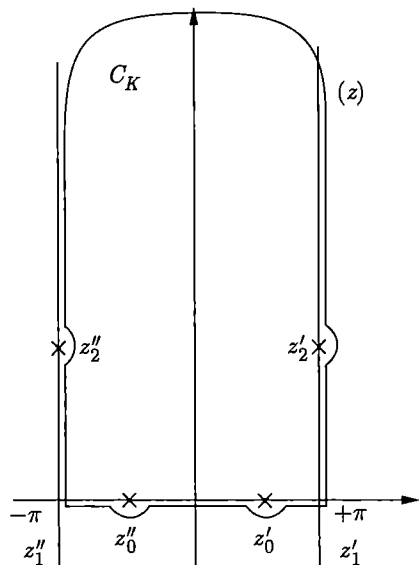


Рис. 3. Комплексная плоскость  $z = \tau_0(\omega)$  в случае дискретного времени  $t = M\tau_0$

Здесь  $z_0(k)$  — правый полюс на действительной оси, а  $z_1(k)$  — один из полюсов на мнимой оси в верхней полуплоскости и

$$a = 1/2z_k^2 - 1, \quad z_1 = a - \sqrt{a^2 - 1} < 1. \quad (22)$$

Несколько непривычное выражение (21) для функции распространения имеет на самом деле очень простое содержание. При малых  $\tau_0$  первый интеграл превращается в обычную функцию Грина уравнения Клейна (так как  $\sin(z_0 M)/\sin z_0 \rightarrow \sin \omega(k)t/\tau_0 \omega(k)$ ), а второй интеграл в (22) при  $\tau_0 \rightarrow 0$  исчезает. При  $\tau \neq 0$  второй интеграл при малых временах ( $M = 1$ ) попросту вырезает из  $\delta$ -функции высокие частоты.

Отклик источника

$$Q(x') = Q(M', \mathbf{x}') = e^{i\omega t'} q(\mathbf{x}), \quad t' = M'\tau_0 \quad (23)$$

в точке  $A(M, \mathbf{x})$ ,  $t = M\tau_0$  будет

$$A(t, \mathbf{x}) = \sum_{M'=-\infty}^M \int \mathfrak{G}(M - M', \mathbf{x} - \mathbf{x}') Q(M', \mathbf{x}') d^3 x'. \quad (24)$$

При вычислении суммы в (24) ее целесообразно заменить интегралом по  $\tau_0 \Delta M' = \Delta t' \rightarrow dt'$ . Несколько громоздкие преобразования формулы (24) приводят к следующему результату (опять при  $R \gg L$ ): а) вклад в  $A(t, \mathbf{x})$  от второго члена в выражении для  $\mathfrak{G}(M, \mathbf{x})$  (21) исчезает как

$$\int_{k > 2/\tau_0}^{\infty} \frac{\sin kR}{k} \frac{dk}{k^2} \rightarrow 0; \quad (25)$$

б) вклад от первого члена из (21) дает

$$A(t, \mathbf{x}) = \frac{\exp(i[\omega t - k(\omega)R])}{R} \int q(\mathbf{x}') \exp(-ik\mathbf{e}\mathbf{x}') \left(\frac{dk}{d\omega}\right) \frac{k(\omega)}{\sin(\omega\tau_0)} d\omega, \quad (26)$$

где  $k(\omega)$  есть значения волнового вектора, удовлетворяющего уравнению дисперсии (20). Таким образом, и в этом «экзотическом» случае частотный спектр источника  $Q = q(\mathbf{x}') \exp(i\omega t)$  также без изменений переносится в точку наблюдения. Аномалия, обусловленная предположением о дискретности времени, выражается в том, что волновой вектор  $k \neq \omega/c$  определяется более сложной функцией от  $\omega$ .

Однако эта аномалия не может обнаружиться в эффекте Мёссбауэра, поскольку он не имеет отношения к одновременному измерению частоты  $\omega$  и длины волны  $\lambda = 2\pi/k$ .

## 6. О расширении линий в силу флуктуаций метрики

В этом разделе рассматривается влияние флуктуаций гравитационного поля на распространение электромагнитной волны:

$$\Psi = A \exp[i\omega(t - x)]. \quad (27)$$

Ввиду отсутствия последовательного квантовомеханического метода для решения этой задачи мы решаем ее классически и лишь потом, в духе соответствия, сделаем заключения применительно к случайному гравитационному полю, порождаемому нулевыми колебаниями материи.

Необходимые предпосылки расчета изложены в работах [8, 9] (см. также [6], с. 282).

Метрический тензор  $g_{\mu\nu}$  представим в виде суммы

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + \hat{h}_{\mu\nu}(x). \quad (28)$$

Здесь  $g_{\mu\nu}$  — метрический тензор плоского пространства, а  $\hat{h}_{\mu\nu}$  — флуктуирующая часть этого тензора, которая считается малой. Величина  $\hat{h}_{\mu\nu}(x)$  определяется из линеаризованного уравнения Эйнштейна

$$\square \Psi_{\nu}^{\mu}(x) = -\frac{16\pi k}{c^3} \Phi_{\nu}^{\mu}(x), \quad (29)$$

где

$$\Psi_{\nu}^{\mu} = h_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} h, \quad h = h_{\mu}^{\mu}, \quad (30)$$

$k$  — постоянная Ньютона,  $\Phi_{\nu}^{\mu}$  — тензор материи, который мало отличается от своего среднего значения

$$\langle \Phi_{\nu}^{\mu}(x) \rangle = 0. \quad (31)$$



Величины  $h_{\mu\nu}$  разложим на две части:

$$\hat{h}_{\mu\nu} = \hat{h}'_{\mu\nu} + \hat{h}''_{\mu\nu}, \quad (32)$$

причем в спектре  $\hat{h}'_{\mu\nu}$  частоты  $\nu < \omega$ , а в спектре  $\hat{h}''_{\mu\nu}$  частоты  $\nu > \omega$ . Волну  $\Psi$  в (27), учитывая флуктуации гравитационного поля, представим в виде

$$\Psi = A \exp[i\omega(t - x) + i\hat{\sigma}(x)] + \hat{\varphi}. \quad (33)$$

Здесь  $\hat{\sigma}$  — поправка к фазе основной волны (27), обусловленная медленной частью  $h'_{\mu\nu}$ . Эта поправка и учитывает расширение линии около основной частоты  $\omega$ . Поправка  $\hat{\varphi}$  пропорциональна исходной волне (27) и описывает рассеянные волны, обусловленные высокочастотной частью  $\hat{h}''_{\mu\nu}$ .

В дальнейшем мы рассматриваем лишь поправку  $\sigma$  и поэтому опускаем знак штриха у  $\hat{h}'_{\mu\nu}$ . Поправка  $\hat{\sigma}$  подчиняется уравнению (см. [9])

$$\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \omega [\hat{h}_{00}(x) - \hat{h}_{11}(x)], \quad (34)$$

где  $\xi = t + x$ . Отсюда имеем

$$\hat{\sigma}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4} \omega \int_{\xi_0}^{\xi} [\hat{h}_{00}(x') - \hat{h}_{11}(x')] d\xi'. \quad (35)$$

Вычислим теперь спектральное распределение, соответствующее основной волне в (33). Это распределение гласит

$$I(\nu) = |\Psi(\nu)|^2 = \frac{1}{2T} |A|^2 \int_{-T}^{+T} \int_{-T}^{+T} \exp[i(\omega - \nu)\tau] \times \\ \times \left\langle \exp \left[ i\hat{\sigma} \left( T + \frac{\tau}{2} \right) - i\hat{\sigma} \left( T - \frac{\tau}{2} \right) \right] \right\rangle d\tau, \quad (36)$$

где  $\tau = t' - t$ ,  $T \rightarrow \infty$ . Знак  $\langle F \rangle$  означает усреднение по флуктуациям тензора материи (ср. (29)). Из (36) имеем

$$I(\nu) = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp[i(\omega - \nu)\tau] \{1 - \phi(0) - \phi(\tau) + \dots\}, \quad (37)$$

где

$$\phi(0) = \langle \hat{\sigma}^2 \rangle, \quad (38)$$

$$\phi(\tau) = \langle \hat{\sigma}(T + \tau/2) \hat{\sigma}(T - \tau/2) \rangle \quad (39)$$

и учтено, что в силу (31)

$$\langle \hat{\sigma} \rangle = 0, \quad (40)$$

а однородность флуктуаций предположена так, что корреляция (39) зависит лишь от  $\tau$ , а корреляция (38) постоянная.

Обратимся к квантовой теории поля, считая, что тензор  $\Phi_{\mu\nu}$  в (29) есть тензор вакуумных флуктуаций, материи. Корреляции для такого тензора в предположении одного рода материального поля<sup>1</sup> были вычислены в работах [6, 9].

Весьма громоздкие вычисления приводят к выражению

$$\phi(\tau) = \alpha \left( \frac{8\pi k\hbar}{c^3} \right) \left( \frac{\omega}{4} \right)^2 \int \frac{d^3 k' d^3 k'' k'_\alpha k'_\beta k'_\gamma k'_\delta f^{\alpha\beta\gamma\delta}}{2\omega' 2\omega'' [(\omega' - \omega'')^2 - (k' + k'')^2]^2} \times \\ \times [(\omega' + \omega'') - (k'_x + k''_x)]^{-2} \sin [(\omega' + \omega'')\tau], \quad (41)$$

где  $\alpha$  — некоторый числовой множитель,  $f^{\alpha\beta\gamma\delta}$  — безразмерный (числовой) тензор, возникающий от перемножения компонент тензора материи. Интеграл в (41) в соответствии с предположением о спектре  $\hat{h}'_{\mu\nu}$  ограничен областью  $\omega' + \omega'' < \omega$ . Вводя гравитационную частоту

$$\omega_g = c/\Lambda_g, \quad \Lambda_g = \sqrt{8\pi k\hbar/c^3} = 0,82 \cdot 10^{-32} \text{ см},$$

можно оценить  $\phi(\tau)$ :

$$\phi(\tau) \simeq \alpha \left( \frac{\omega}{\omega_g} \right)^4 \int_{\nu/\omega < 1} F\left(\frac{\nu}{\omega}\right) \sin(\nu\tau) \frac{d\nu}{\omega}. \quad (42)$$

Эта величина из-за наличия множителя  $(\omega/\omega_g)^4$  крайне мала. Таким образом, уширение линии выглядит как крайне слабый фон у подножия основной линии  $\nu = \omega$ .

Заметим, что все расходимости, относящиеся, естественно, к частотам  $\omega' + \omega'' > \omega$ , мы отнесли к рассеянной волне  $\hat{\varphi}$ , среднее от которой  $\langle \hat{\varphi} \rangle = 0$ . Убедительность приведенного выше вывода о крайней малости возможного расширения линий ограничивается полуклассическим характером расчета и предположением об ограничении одним видом материального поля (скалярным).

Однако в этом расчете использованы лишь самые общие черты явлений, и поэтому нет оснований полагать, что более подробный расчет приведет к иному выводу.

<sup>1</sup> Вообще следовало бы учесть все виды полей, имеющих стабильный вакуум.

## Список литературы

1. Mead C. A. // Phys. Rev. 1966. V. 143. P. 990.
2. Киржнец Д. А., Чечин В. А. // ЯФ. 1968. Т. 7. С. 431.
3. Блохинцев Д. И. // Уч. зап. МГУ. Физика. 1945. Кн. III, вып. 77. С. 101.
4. Блохинцев Д. И. // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 480. — Статья № 71 в наст. изд. — *Прим. ред.*
5. Блохинцев Д. И., Колеров Г. И. Проблемы теоретической физики. М.: Наука, 1969. С. 47. — Статья № 95 в наст. изд. — *Прим. ред.*
6. Блохинцев Д. И. Пространство и время в микромире. М.: Наука, 1970. С. 227, 232.
7. Efimov G. V. // Comm. Math. Phys. 1968. V. 7. P. 138.
8. Blokhintsev D. I. // Nuovo Cim. 1960. V. 16. P. 382.
9. Блохинцев Д. И. Стохастические пространства. Препринт ОИЯИ Р2-6094. Дубна, 1971.

## **ПРОЕКТИРОВАНИЕ НОВЫХ УСКОРИТЕЛЕЙ И ЗАДАЧИ СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ\***

*Совместно с А. В. Ефремовым, Р. М. Мурадяном*

### **Введение**

Развитие ускорителей имеет свою собственную логику, вытекающую из предыстории и не всегда соответствующую потребностям физики. История развития ускорителей показывает, что их энергия возрастает примерно на порядок за 7 лет.

С началом эпохи накопительных колец и встречных пучков этот темп роста энергии может существенно возрасти. Типичная энергия циклических ускорителей протонов в ближайшее десятилетие может достичь тысячи гигаэлектронвольт.

Однако ясно, что проектирование и создание новых ускорителей должно быть теснейшим образом связано с задачами, выдвигаемыми сегодняшним развитием физики элементарных частиц, с достигнутым уровнем знаний. Необходимо также учитывать уже имеющиеся машины как в нашей стране, так и на Западе, планы их модернизации и возможности, открываемые использованием новых принципов ускорения заряженных частиц. Поэтому, прежде чем обсуждать физические проблемы, коротко остановимся на обзоре действующих и планируемых ускорителей и их модернизации. Что же касается физических проблем, то авторы отдают себе отчет в том, что их ожидания и советы могут во многом оказаться иллюзорными, ибо они в значительной мере относятся к *terra incognita*. Тем не менее мы надеемся, что этот обзор физических проблем все же может оказаться полезным при выборе типов будущих ускорителей.

### **1. Действующие и планируемые ускорители**

Протонный ускоритель на 76 ГэВ в Серпухове продолжает оставаться крупнейшим ускорителем в СССР [1, 2]. По интенсивности и стабильности

работы он оказался одним из лучших ускорителей в мире в своем классе машин. За три года работы он успел дать физикам много полезной информации, часть из которой (например, очень резкий выход сечения  $\pi N$ -рассеяния на постоянное значение) оказалась столь неожиданной, что до сих пор не получила удовлетворительного объяснения. Безусловно, эксперименты на этом ускорителе еще долгое время будут находиться в центре внимания, несмотря на то, что он уже уступил «пальму первенства» по энергиям ускорителю в Батавии [3] на 300 ГэВ. В дальнейшем намечается модернизация этого ускорителя с переходом на сверхпроводящие магниты, что позволит довести его энергию до величин порядка 1000 ГэВ.

Реализация проекта накопления протонных пучков позволяет еще дальше продвинуться в область высоких энергий — до нескольких тысяч и даже десятков тысяч гигаэлектронвольт. Действующие уже сейчас встречные пучки ЦЕРН [4] с  $2 \times 28$  ГэВ эквивалентны энергии 1700 ГэВ в лабораторной системе (ЛС), а проектируемые в Батавии пучки с  $2 \times 200$  ГэВ эквивалентны 20 000 ГэВ в ЛС. В Брукхейвене [5] же проектируется протонный ускоритель на  $2 \times 200$  ГэВ (80 000 ГэВ в ЛС). Однако из-за весьма существенной потери интенсивности круг задач, которые можно решать на таких ускорителях, значительно сужается. Здесь, естественно, уже невозможно создание достаточно интенсивных вторичных пучков, а могут изучаться только разные аспекты протон-протонных соударений.

К этой же группе, но с несколько более широким кругом задач относятся встречные протон-антипротонные пучки с  $2 \times 23$  ГэВ, создание которых планируется в Новосибирске [6].

Другим важным направлением работ на ускорителях является увеличение интенсивности их пучков. Так, в ближайшее время предполагается получить пучки  $\pi$ -мезонов, сравнимые по интенсивности с тем, что дают мезонные фабрики. Такие интенсивности позволят производить наблюдения и измерения с гораздо более высокой точностью и тем самым глубже проникнуть в детали явлений.

В ускорении электронов намечаемый рост энергии более скромн. Крупнейшим электронным ускорителем (если не считать вторичного  $\gamma$ -пучка в Серпухове с энергией  $E_\gamma = 35$  ГэВ) остается двухмильный линейный ускоритель в Стенфорде, США (20 ГэВ), который еще долго будет сохранять свое лидирующее положение. Более того, оно упрочится за счет технического усовершенствования машины (замены клистронов), которое в ближайшее время поднимает энергию электронов до 35 ГэВ. В Новосибирске работает пучок с энергией  $2 \times 700$  МэВ и в ближайшее время, по-видимому, будут получены встречные электрон-позитронные пучки по 3,5 ГэВ [7]. Аналогичные ускорители, но с гораздо меньшей энергией действуют в настоящее время в Орсе (Франция):  $2 \times 0,5$  ГэВ, и во Фраскати (Италия):  $2 \times 1,2$  ГэВ [7].

Киевская и Амстердамская конференции по физике высоких энергий подчеркнули большое значение экспериментов на встречных электронных пучках.

Сейчас, кроме упомянутых действующих ускорителей, уже начали работать накопительные кольца в США (Стенфорд) с энергией  $2 \times 2,5 \text{ ГэВ}$  и хорошей светимостью ( $10^{31} - 10^{32}$ ). Строится также комплекс встречных пучков  $ee$ ,  $e\bar{e}$  и  $\bar{e}\bar{e}$  в ФРГ:  $2 \times 3 \text{ ГэВ}$ , с очень высокой светимостью ( $10^{32}$ ). В Стенфорде же обсуждается идея столкновения пучков от линейного ускорителя (без накопителя) с энергией  $2 \times 20 \text{ ГэВ}$ . Кроме того, имеется проект создания комплекса  $ee$ -,  $e\bar{e}$ - и  $ep$ -пучков с энергией  $15 \text{ ГэВ}$  для электронов и позитронов и  $72 \text{ ГэВ}$  протонов (проект РЕР в Калифорнии, США).

Такова в самых общих чертах ситуация с ускорителями в настоящее время.

## 2. Важнейшие проблемы физики элементарных частиц

В этом разделе рассматриваются наиболее общие и в то же время фундаментальные проблемы физики элементарных частиц.

Естественно, что мы исходим из современных представлений, и поэтому наши суждения должны пониматься *simpliciter*. Ясно, что никак нельзя исключить возможность того, что природа преподнесет нам какой-либо сюрприз, выходящий за рамки фантазии теоретиков. Более того, про себя мы хотели бы считать это очень вероятным. С указанными оговорками мы отмечаем два направления поиска, следуя которым можно ожидать фундаментальных открытий, — это изучение явлений, разыгрывающихся на малых расстояниях, и поиск новых необычных частиц.

а) «*Элементарная длина*». Под этим понятием мы разумеем некоторую фундаментальную длину  $a$ , которая может характеризовать масштаб *нелокальности* или какой-либо другой масштаб, имеющий, быть может, *геометрическое значение* (например, кривизна импульсного пространства, дискретность пространства-времени вместо континуума и т. п.) [9]. Весьма естественным кандидатом на роль элементарной длины является «длина, связанная со слабым взаимодействием»:  $a_W = 6 \cdot 10^{-17} \text{ см}$ , соответствующая энергии в системе центра масс (СЦМ)  $W = 300 \text{ ГэВ}$ . Весьма интересным является вопрос о возможности наблюдения «элементарной длины» в крайне точных измерениях при низких энергиях, например с помощью эффекта Мёссбауэра. Однако анализ показывает, что весьма общие варианты «нелокальности» совместимы с малой шириной спектральных линий  $\Delta\omega/\omega \approx 10^{-16}$ , наблюдаемых с помощью этого эффекта. Для наблюдения нелокальных эффектов оказывается важным отношение частоты  $\omega$  к частоте  $\omega_a = c/a$ , определяющей нелокальность. Из опытов при высоких энергиях следует, что  $a < 10^{-15} \text{ см}$ , а  $\omega_a > 10^{25}$ . Поэтому эффект Мёссбауэра оказывается некритичным.

Можно ожидать, что существование элементарной длины приведет к радикальным изменениям в ходе явлений по сравнению с установленными. Прежде всего в этом случае существенно изменилась бы постановка вопроса об асимптотическом поведении сечений. Действительно, согласно имеющимся данным, длина  $a$  удовлетворяет условию  $am \ll 1$ , где  $m$  — масса любой из известных частиц или резонансов. В случае существования длины  $a$  область

$W \gg m$  можно было бы разделить на подобласти  $Wa \gg 1$  и  $Wa \ll 1$ . Естественно ожидать, что поведение сечений в них будет совершенно различным. При каких энергиях может появиться подобный перелом в сечениях — сказать трудно, но, по-видимому, его не следует ожидать до энергий порядка сотни гигаэлектронвольт в СЦМ.

Если слабое взаимодействие не будет подавлено существованием промежуточного бозона, то длина  $a_W = 6 \cdot 10^{-17}$  см может иметь радикальное значение. В этом случае при  $W > 300$  ГэВ можно ожидать превалирования слабых взаимодействий над электромагнитными и даже сильными. Это обстоятельство может сыграть решающую роль в построении теории элементарных частиц.

В настоящее время четко различимы три типа взаимодействий (сильные, слабые и электромагнитные), которые представляются никак не связанными между собой. Если при росте энергий окажется, что все эти три типа взаимодействий сравниваются по силе, то мы окажемся перед лицом некоего универсального сильного взаимодействия, в котором большинство обычных законов сохранения (изоспина, гиперзаряда, пространственной и зарядовой четности) нарушено. Обычные правила отбора сильных электромагнитных и слабых процессов окажутся лишь низкоэнергетическим приближением, и возникнет реальная возможность изучения характерных особенностей такого «супервзаимодействия». Революционный характер изменения физической картины, связанный с подобным развитием событий, вряд ли нуждался бы в пояснении.

Одним из возможных проявлений этого взаимодействия могли бы быть слабые звезды — непосредственное (а не в результате распада адронов) рождение лептонов, в том числе и нейтрино. В этой связи встречные протонные пучки с энергией порядка сотен гигаэлектронвольт, а также пучки типа  $pp$  и  $e p$  могут представлять не меньший интерес, чем пучки  $e\bar{e}$  и  $\mu\bar{\mu}$ . Возможности же достижения этого критического для слабых взаимодействий предела на ускорителях с неподвижными мишенями лежит за пределами нашего воображения ( $E \gtrsim 5 \cdot 10^4$  ГэВ).

б) *Необычные частицы.* К такого же рода «лотерейным» задачам, как поиск «элементарной длины», с крупной ставкой, но и крупным выигрышем, принадлежит и поиск «необычных» частиц: кварков и дионов Швингера [10], промежуточных бозонов, монополя Дирака и тяжелых лептонов.

Кварки — это частицы с дробными электрическим и гиперзарядом — являются, по современным представлениям о симметрии адронов, теми «кирпичиками», из которых строятся адроны. Однако все попытки обнаружить такие частицы как в космических лучах и на ускорителях, так и в электростатических опытах по поиску дробных зарядов оканчивались полной неудачей. Кажется весьма вероятным, что кварки сами по себе не являются элементарными частицами, а представляют собой возбуждения, удачные для описания состояний адронов.

Дионы — это, по существу, те же кварки, но обладающие (вдобавок) и дробным магнитным зарядом. Они составляют основу магнитной теории материи Швингера, существенной частью которой является сверхсильное

дальнодействующее магнитное взаимодействие, характеризующееся безразмерной константой  $g = 36 \times 137 \approx 5000$ . Именно оно, согласно идее Швингера, связывает дионы в адрон. Теоретические соображения в пользу существования частиц, обладающих магнитным зарядом, были приведены еще Дираком в начале 30-х годов (так называемые «монополи Дирака»), причем электрический и магнитный заряд у них автоматически оказывались связанными соотношением  $eg = n$ , где  $n$  — целое число.

Пока нет никаких убедительных соображений о величине массы этих гипотетических частиц, кроме, быть может, массы промежуточного бозона, которая по приблизительным оценкам Т. Д. Ли составляет 37,3 ГэВ и требует, следовательно, встречных пучков с  $W > 40$  ГэВ.

Таковы, на наш взгляд, два основных направления, следуя которым, можно ожидать революционизирующих открытий.

Далее мы рассмотрим более специальные проблемы в физике сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий. Эти проблемы теснее связаны с современным состоянием физики элементарных частиц, и без их решения трудно представить ее дальнейшее развитие.

в) *Сильные взаимодействия.* Здесь основными задачами следует считать раскрытие механизма взаимодействия адронов и их спектра масс [8, 11]. Пока мы, по-видимому, познакомились лишь с низшей частью этого спектра, и было бы важно понять, сколь далеко он простирается в сторону больших масс. Современные экспериментальные данные и теоретические идеи (дуальность) позволяют ожидать, что по мере продвижения мы будем наблюдать все больше относительно стабильных состояний с большими массами и спинами. Детальное знание достаточно широкой части спектра представляется необходимым для построения полной картины сильных взаимодействий.

Имеющиеся сейчас экспериментальные данные и теоретические исследования по рассеянию адронов указывают на то, что классификация реакций по передаваемым квантовым числам правильно отражает основные черты взаимодействия адронов и различие в поведении сечений:  $\sigma \sim E^{2\alpha-2}$ . По этому признаку выделяются следующие классы:

1) Передача вакуумных квантовых чисел,  $\alpha_P \approx 1$ . Она характерна для упругих и квазиупругих процессов, сечения которых приблизительно постоянны.

2) Передача квантовых чисел векторных мезонов ( $\rho, \omega, A_2, K^*$ ),  $\alpha_m \approx 0,6 \div -0,3$ , которая характерна для процессов перезарядки, фоторождения и др. Их сечения падают.

3) Передача барионных квантовых чисел  $\alpha_B \approx 0 \div -1$  (мезон-барионные рассеяния назад и др.).

4) Передача квантовых чисел псевдоскалярных мезонов ( $\pi, K, \eta$ ),  $\alpha_m \approx 0 \div -0,3$  (фоторождение поляризованным параллельно плоскости реакции  $\gamma$ -квантом и др.).

5) Передача так называемых «экзотических» квантовых чисел (двойного заряда или барионного числа, двойного изоспина и др.).

Исследование деталей этих передач, однако, затрудняется тем, что обычно мы имеем дело со смесью (например, в упругом рассеянии в дифракционной



области передаются не только вакуумные числа, но и мезонные и даже экзотические). Отсюда ясно, сколь сложна и неоднозначна задача подбора параметров и деталей механизма передачи. К тому же она усложняется трудностью поляризационных измерений, которые могли бы дать сведения не только о модулях амплитуд, но и об их фазах.

Такая структура сильных взаимодействий заставляет думать, что к раскрытию деталей передачи следует подходить с верхнего энергетического конца, где «выживает» лишь передача вакуумных чисел. Но где же начинается этот «конец»?

При достаточно высоких энергиях адрон благодаря лоренцеву сокращению выглядит как бесконечно тонкий диск с конечным эффективным поперечным размером. Исходя из аналогии с динамикой плоского взрыва можно предположить, что при крайне высоких энергиях взаимодействие должно характеризоваться определенными масштабными соотношениями [12]. Это приводит к интересным экспериментальным предсказаниям, в частности, — к постоянству сечения, характерному для передачи вакуумных чисел, и постоянному наклону дифракционного конуса.

Первые предварительные результаты ЦЕРН на встречных  $pp$ -пучках с  $E_{\text{ЛС}} \approx 1000 \text{ ГэВ}$  показывают, что сечение при этих энергиях, по-видимому, уже вышло на свое асимптотическое значение  $\approx 38 \text{ мбн}$  (либо медленно логарифмически приближается к нему). Наклон же дифракционного конуса либо остается постоянным, либо имеет тенденцию к выходу на постоянное значение. Вместе с довольно плавным ходом других сечений в области 30–70 ГэВ это дает основание думать, что область порядка  $10^3 \text{ ГэВ}$  является уже асимптотической. В ближайшие годы батавийский ускоритель позволит приблизиться к этим энергиям, что даст возможность проверить это ожидание и уточнить механизм передачи вакуумных квантовых чисел.

Однако для окончательного решения этого вопроса потребуются, по всей вероятности, эксперименты при энергиях несколько тысяч гигаэлектронвольт в ЛС. Здесь наиболее интересной была бы проверка существующей пока разности сечений (точнее, необычно слабого убывания)  $\pi^+p$ - и  $\pi^-p$ -рассеяния, обнаруженной в Серпухове. Если это явление сохранится и при батавийских энергиях и если его не удастся объяснить необычной электромагнитной поправкой, то оно может привести к пересмотру наших представлений о сильных взаимодействиях.

Для выяснения законов передачи мезонных квантовых чисел наиболее подходящими объектами являются неупругие реакции перезарядки  $\pi N$  и  $NN$ , фоторождения, рождения резонансов в области 20–1000 ГэВ. Сечения, связанные с этими передачами, здесь еще достаточно велики, а передачи остальных чисел уже заметно подавлены. Однако раскрытие деталей механизма передачи требует достаточно тонких разносторонних измерений не только сечений и угловых распределений, но и поляризаций. Хорошим уроком может служить пример с  $\pi N$ -перезарядкой, угловые распределения в которой описывались многими моделями, а измеренная недавно поляризация явилась камнем преткновения для многих из них. Другим примером служит угловое распределение в фоторождении  $\pi$ -и  $K$ -мезонов в области весьма малых пе-

редач импульса и  $\pi N$ -рассеяния назад, которые помогут решить вопрос об элементарности мезонов и нуклонов.

Такие комплексные измерения требуют интенсивности вторичных пучков, насыщенности эксперимента электроникой и автоматикой, широкого применения вычислительных машин. Других способов провести различие среди множества теоретических моделей механизма передачи у нас нет.

Альтернативой существования «элементарной длины» может оказаться так называемая автомодельность или «масштабная инвариантность», которая означает отсутствие каких-либо параметров с размерностью длины (или массы) в описании взаимодействия на малых расстояниях. Экспериментальным указанием на возможность этого явления служит поведение сечения глубоконеупругого  $ep$ -рассеяния [13]. В пользу этой гипотезы имеются также аргументы, связанные с проблемой квантования полей в искривленном пространстве-времени. Более четкие сведения могли бы быть, видимо, получены из зависимости от  $E$  дифференциальных сечений рассеяния при больших энергиях и передачах импульса ( $s \sim t \gg M^2$ ).

г) *Электромагнитные взаимодействия.* В настоящее время можно считать центральным, во-первых, поиск отклонения от квантовой электродинамики и проблему различия  $\mu$ -мезона и электрона и, во-вторых, выяснение вопроса о том, насколько универсальной является закономерность, обнаруженная в неупругом рассеянии электронов на протонах и получившая название автомодельности или масштабной инвариантности [12, 14].

Что касается первой проблемы, то наиболее эффективным было бы прецизионное измерение сверхтонкого расщепления уровней в мюонии — системе, где сильные взаимодействия отсутствуют. Подобные измерения на водороде выполняются сейчас с точностью до 12-го знака, из которых только 6 можно объяснить электромагнетизмом. Для остальных же оказывается существенным сильное взаимодействие, которое известно с меньшей точностью.

Сюда же примыкает и одна из важнейших задач современной физики — различие масс электронов и  $\mu$ -мезонов, которая может быть и не связана с электромагнитным взаимодействием. Если это так, то подобное взаимодействие должно давать вклад в сверхтонкое расщепление и аномальный магнитный момент  $\mu$ -мезонов, которые известны сейчас с точностью до 7-го знака. Отсутствие отклонений от квантовой электродинамики заставляет переносить поиски различия в область высоких энергий, сопоставляя поведение  $\mu$ -мезона и электрона в электромагнитных процессах при возрастающих энергиях. Здесь огромное значение могли бы иметь встречные электронные и  $\mu$ -мезонные пучки возможно большей энергии и хорошей интенсивности.

Явление масштабной инвариантности было впервые обнаружено в процессе неупругого электрон-протонного рассеяния при большой энергии и передаче импульса  $q^2$  и состоит в том, что безразмерные амплитуды этого процесса оказались функциями лишь одного параметра<sup>1</sup>  $W^2/q^2$ . Оно привело к гипотезе об автомодельном поведении процессов при больших энергиях.

<sup>1</sup> Здесь  $W$  — инвариантная масса всех недетектируемых частиц. — Прим. ред.

Из нее, в частности, следует, что полное сечение аннигиляции электронов и позитронов ведет себя как  $1/W^2$ . Эта гипотеза настоятельно требует экспериментальной проверки, и такая проверка частично будет проведена в Серпухове и Батавии в планируемых экспериментах по глубоконеупругому рассеянию электронов и  $\mu$ -мезонов. Однако наилучшей, на наш взгляд, была бы проверка автомодельности в процессе глубоконеупругого  $ee$ - или  $e\bar{e}$ -рассеяния в области больших  $W$  и больших передач импульса. Наблюдения такого процесса станут доступны с увеличением энергии встречных пучков до нескольких десятков гигаэлектронвольт и дадут возможность выяснить механизм возникновения автомодельности.

д) *Слабые взаимодействия.* Центральной проблемой остается проблема их динамической природы. Являются ли они четырехфермионными или осуществляются через промежуточный бозон? В связи с этим весьма важными оказываются, с одной стороны, эксперименты по поискам промежуточного бозона, о которых упоминалось выше, с другой — изучение поведения слабых процессов при энергиях порядка 300 ГэВ в СЦМ. Специфика поведения сечений слабых процессов при таких энергиях может явиться ключом к пониманию динамической природы этих взаимодействий [15]. В частности, следует ожидать проявления при высоких энергиях характерных особенностей поведения сечений (например, для взаимодействия нейтрино с нуклонами), связанных с автомодельностью.

Не менее фундаментальными проблемами являются проверки законов сохранения электронного и мюонного лептонных чисел, а также нарушение  $C$ -,  $P$ - и  $T$ -четностей, в особенности механизм нарушения  $CP$ -четности, которая обнаружена пока только в распаде  $K^0$ -мезонов. Сейчас набралось довольно большое число возможных механизмов и только прецизионные измерения и наблюдения редких распадов могут помочь произвести отбор среди них.

Для решения этих задач необходимы интенсивные пучки вторичных частиц, в первую очередь  $K$ -мезонов и гиперонов, которые могут быть получены на ныне действующих ускорителях (в частности, на серпуховском) при условии повышения интенсивности основного пучка.

Выше мы говорили главным образом только о наиболее принципиальных, с нашей точки зрения, явлениях, оставляя в стороне целый круг интересных вопросов, связанных, например, с изучением так называемой «адронной структуры» света, которая начинает проявляться при гигаэлектронвольтных энергиях, ряд интересных электродинамических эффектов высших порядков, прецизионные измерения слабых распадов и др. Они также могут оказаться неожиданно интересными и заставят нас пересматривать и уточнять картину взаимодействия.

Хорошим примером является возникшая в последнее время проблема  $K_L \rightarrow 2\mu$ -распада [16], вероятность которого оказывается гораздо меньше, чем это следует из обычных представлений о слабых взаимодействиях и вероятности распада  $K_L \rightarrow 2\gamma$ . Она указывает на сюрпризы, ожидающие нас в области слабоэлектромагнитных процессов. Так, одно из возможных объяснений загадки состоит в сильном нарушении  $CP$ -инвариантности в про-

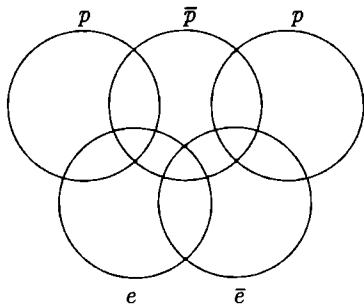
цессах  $K_{LS} \rightarrow 2\mu, 2\gamma$  и аномально большой вероятности  $K_S \rightarrow 2\mu, 2\gamma$ , (на 3–4 порядка превышающей аналогичный распад  $K_L^1$ ).

### 3. Будущие ускорители

На основании приведенного выше обзора ускорителей и основных проблем физики элементарных частиц ясно, что сейчас вряд ли имеет смысл планировать создание протонных ускорителей с энергией менее тысячи гигаэлектронвольт. Наиболее перспективными с точки зрения максимального охвата интересных задач, ожидаемых результатов и конкурентоспособности представляли бы следующие направления развития:

а) Модернизация уже существующих машин с резким повышением интенсивности первичного, а следовательно, и вторичных пучков либо с ускорением поляризованных частиц и одновременным полным обеспечением экспериментов средствами регистрации и обработки информации с предельным насыщением их новейшей электронной техникой и полной автоматизацией. Такого рода мероприятия будут играть решающую роль в дальнейшем развитии экспериментальных исследований, так как требования современности выдвигают на первый план не столько отдельные достижения, сколько общий высокий научно-технический уровень.

б) Создание протонных ускорителей (на основе сверхпроводящих магнитов) с энергией протонов  $E > 1000 \text{ ГэВ}$  ( $W > 40 \text{ ГэВ}$ ), с последующей организацией встречных пучков с энергией в СЦМ  $W \gg 300 \text{ ГэВ}$ . В этом же направлении дальнего планирования желательно предусмотреть возможности встречных пучков  $p\bar{p}$ , а также  $(ep)$  и  $(\bar{e}p)$ . Символически такой комплекс можно было бы изобразить в виде «олимпийского» комплекса пяти колец (которые, конечно, могут быть и совмещены):



Он позволил бы далеко продвинуться в изучении фундаментальных свойств частиц и обошелся бы гораздо дешевле, чем попарное строительство отдельных колец. В идеальном варианте в этом комплексе было бы желательно иметь и мюонное накопительное кольцо, однако технически эта проблема кажется пока далекой от решения. Так или иначе, авторы считают

<sup>1</sup> В октябре 1974 г. эта проблема неожиданно разрешилась открытием частиц (кварков) с новым квантовым числом, очарованием, обмен которым приводит к дополнительному сильному подавлению распада  $K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ . — Прим. А. В. Ефремова.

крайне важным при изучении адронных столкновений перешагнуть границу  $W = 300 \text{ ГэВ}$ .

в) Для создания вторичных пучков адронов и лептонов крайне высокой энергии кажется необходимым развитие исследований коллективных методов ускорения до сверхвысоких энергий ( $E \gg 10^3 \text{ ГэВ}$ ) и, в первую очередь, метода Векслера–Саранцева [17] как наиболее разработанного и перспективного.

г) Как уже отмечалось выше, создание встречных пучков  $e\bar{e}$ ,  $\mu\bar{\mu}$  и  $p\bar{p}$  с энергией  $W$ , по возможности близкой к  $300 \text{ ГэВ}$ , безусловно, остается фундаментальной задачей ближайшего десятилетия. Условия для изучения электромагнитного и слабого взаимодействий в столкновениях типа  $e\bar{e}$  или  $\mu\bar{\mu}$  представляются особенностями простыми<sup>1</sup>.

д) Большие затраты на современную физику высоких энергий, на наш взгляд, ни в коем случае не должны ориентироваться только на возможные фундаментальные открытия, могущие революционизировать всю науку.

Суть дела в том, что для современной физики элементарных частиц, как и для любой фундаментальной науки, хотя она и не имеет непосредственного выхода в сферу производства, достижение ее целей связано тем не менее с решением многих весьма сложных технических задач. Поэтому современный центр ядерных исследований является, по существу, не только ведущим научным, но и передовым техническим центром, способным решать сложнейшие технические задачи. Использование в народном хозяйстве технических достижений таких научных центров может иметь революционные последствия.

Примером подобного использования «отходов» физики высоких энергий может служить освоение методов работы с жидким водородом и жидким гелием, внедрение в промышленность сверхпроводящих магнитов, разработка которых ведется сейчас почти во всех ядерных центрах мира. Кибернетические же системы обработки и сбора информации, без которых немыслим современный эксперимент, могут найти широкое применение в управлении народным хозяйством и его планировании, а исследования с  $\mu$ -мезонными атомами открывают многообещающие возможности в изучении кинетики химических реакций, что также может иметь большое прикладное значение. Не следует забывать также о тех успехах, которые сопровождают применение методов теоретической ядерной физики в других областях. Последние достижения физики твердого тела — прекрасный тому пример. На наш взгляд, необходимо шире использовать эту сторону деятельности ядерных центров.

То же самое можно сказать о медико-биологических исследованиях и их применениях. Речь идет о лечении раковых заболеваний пучками мезонов и многозарядных ионов, о ранней диагностике перерождения тканей и др. За последнее время работа в ядерных центрах Запада в этом исключительно важном направлении очень активизировалась. Во многих центрах созданы специальные группы, занимающиеся медико-биологическими проблемами. Возможности же наших центров используются пока недостаточно.

<sup>1</sup> Впрочем, как было замечено выше, при очень высоких энергиях все взаимодействия могут сравниваться по интенсивности.

В этой связи представляется весьма важным строительство мезонных фабрик как источника пучков крайне высокой интенсивности и создание пучков релятивистских многозарядных ионов [18].

Авторы надеются, что они достаточно полно отразили работу всей группы и выражают благодарность за замечания ее участникам.

Объединенный институт  
ядерных исследований

### Список литературы

1. *Ado Y.M. et al.* // Proc. of the 18th Intern. Conference on High Energy Accelerators. CERN, 1972.
2. *Soloviev L.D.* // CERN Courier. 1971. № 11. P. 315.
3. *Wilson R.R.* // [1]. P. 3.
4. *Johnesen K.* // Ibid. P. 79.
5. *Blewett J.P.* // Ibid. P. 501.
6. *Skrinsky A.N.* // Ibid. P. 72.
7. *Amman F.* // Ibid. P. 63.
8. *Логунов А. А., Нгуен Ван Хьеу, Хрусталева О. А.* Проблемы теоретической физики: Сб., посвященный Н. Н. Боголюбову в связи с его 60-летием. М.: Наука, 1969.
9. *Кадышевский В. Г.* Проблемы теоретической физики: Сб., посвященный памяти академика И. Е. Тамма. М.: Наука, 1972.
10. *Schwinger J.* // Science. 1969. V. 165. P. 757; V. 166. P. 690.
11. *Tavkhelidze A.N.* // XV Intern. Conference on High Energy Physics (Kiev, 1970). Kiev: Naukova dumka, 1972.
12. *Матвеев В. А., Мурадян Р. М., Тавхелидзе А. Н.* // ЭЧАЯ. 1971. Т. 2, вып. 1. С. 7; Lett. Nuovo Cim. 1972. V. 5. P. 907; E2-5962. Dubna, 1971.
13. *Марков М. А.* Нейтрино. М.: Наука, 1964; JINR Preprint E2-4370. Dubna, 1969; *Боголюбов Н. Н., Владимиров В. С., Тавхелидзе А. Н.* // ТМФ. 1972. Т. 12. С. 305.
14. *Soloviev L.D.* // [11]. P. 513;  
*Muradyan R.M.* // Ibid. P. 658.
15. *Блохинцев Д. И.* // УФН. 1957. Т. 62. С. 381; ЖЭТФ. 1958. Т. 35. С. 254; Nuovo Cim. 1958. V. 9. P. 925.
16. *Долгов А. Д., Захаров В. И., Окунь Л. Б.* Препринт ИТЭФ № 924. М., 1972.
17. *Veksler V.I.* // Proc. of CERN Symposium on High Energy Accelerators. 1956. P. 80;  
*Sarantsev V.P.* // [1]. P. 391.
18. *Балдин А. М.* Препринт ОИЯИ Р7-5808. Дубна, 1971.

## ГЕОМЕТРИЯ И ФИЗИКА МИКРОМИРА

Настоящая статья является очерком проблем, возникающих при переносе геометрических понятий из классической физики в мир элементарных частиц.

### 1. Упорядочение событий в пространстве

Теоретическая физика начинается с упорядочения событий. Это основа всех основ. Для упорядочения событий каждому точечному событию  $\mathcal{P}$  приписывается четверка чисел  $(x) = x_0, x_1, x_2, x_3$  — координат этого события; если одной четверки недостаточно, то событие неточечное. В дальнейшем эту операцию мы называем арифметизацией событий. Арифметизация событий предполагает определенный физический способ ее осуществления. Этот способ содержит существенный элемент соглашения<sup>1</sup>.

Современное соглашение базируется: а) на принципе универсального постоянства скорости света и б) на допущении существования «стандартных» часов<sup>2</sup>.

Основанная на этих соглашениях арифметизация ведет к пространству Минковского с недефинитной метрикой, которую мы выписываем в обычных обозначениях:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2. \quad (1)$$

Движущиеся относительно друг друга наблюдатели  $\bar{\Sigma}$  и  $\Sigma$ , производя арифметизацию одним и тем же способом, припишут тем не менее разные координаты  $(\bar{x})$  и  $(x)$  одному и тому же событию  $\mathcal{P}$ .

Предполагается, что существует взаимно однозначное соответствие между координатами  $(\bar{x})$  и  $(x)$  и что метрика (1) универсальна. Тогда преобразова-

<sup>1</sup> Заметим, что речь идет именно о соглашениях, подчеркиваемых уже в первых работах А. Пуанкаре [1] и А. Эйнштейна [2]. См. также [3] и особенно блестящую книгу А. А. Фридмана [4]. В последнее время этот вопрос был предметом обсуждения на страницах УФН [5]. Эти вопросы рассмотрены также в монографии [6].

<sup>2</sup> В принципе в качестве таких часов могут служить «световые» часы, представляющие собой световой импульс, периодически отражающийся между двумя близко расположенными зеркалами. Тогда допущение б) эквивалентно допущению существования неизменного стандарта длины — расстояния между зеркалами. В настоящее время в качестве такого стандарта принята длина волны одной из линий криптона. Подробности о выборе часов обсуждаются в диссертации Р. Марцке [7] (см. также [8]).

ние, связывающее координаты  $(\bar{x})$  и  $(x)$  в декартовой системе координат, есть преобразование Пуанкаре–Лоренца

$$\bar{x} = \Lambda(u)x + a, \quad (2)$$

где параметры преобразования  $u$  и  $a$  имеют смысл относительной скорости систем отсчета  $\bar{\Sigma}$  и  $\Sigma$  и относительного сдвига начала координат;  $\Lambda(u)$  — матрица преобразования.

Подчеркнем, что взаимная однозначность между координатами  $(\bar{x})$  и  $(x)$  одного и того же события  $\mathcal{P}$  есть предположение. Действительно, параметры преобразования (2)  $u$  и  $a$  могли бы быть случайными величинами или даже операторами. В этом случае преобразование (2) должно быть дополнено заданием вероятности  $dw(u, a) \geq 0$  или соответственно вектора состояний  $\Psi$ , к которому применяются операторы  $\hat{u}$  и  $\hat{a}$  (ср. гл. 3).

Для рассматриваемых в дальнейшем вопросов важно, что метрика (1) индефинитна. Из индефинитности этой метрики следует, что понятие близости двух событий  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{P}'$  в пространстве  $\mathcal{R}_4(x)$  не есть инвариантное понятие и может быть сформулировано только применительно к данной системе отсчета  $\Sigma$ .

Такова в самых важных чертах геометрия, лучше сказать, хроно-геометрия (см. [6–8]), соответствующая содержанию специальной теории относительности.

Разумеется, можно избрать и другую физическую основу для арифметизации событий, подобно тому как можно избирать различные единицы мер. При этом мы пришли бы к другой геометрии и к другому способу описания физических явлений.

Фундаментальное преимущество метода, лежащего в основе теории относительности А. Эйнштейна, заключается в том, что именно при применении этого метода арифметизации событий выявляется инвариантность основных законов физики. Закон, выражаемый соотношением

$$F(A, B, x, \dots) = 0 \quad (3)$$

в системе отсчета  $\Sigma$ , выражается в системе  $\bar{\Sigma}$  соотношением

$$F(\bar{A}, \bar{B}, \bar{x}, \dots) = 0, \quad (3')$$

где величины  $\bar{A}, \bar{B}, \dots$  суть скаляры, спиноры, векторы или тензоры.

Поэтому не всякий способ арифметизации событий приемлем. Способ арифметизации, во-первых, должен быть физически осуществим (хотя бы в идеальном эксперименте), и, во-вторых, он должен быть максимально универсален; последнее означает, что он должен опираться на круг явлений, который является наиболее объемлющим<sup>1</sup>).

<sup>1</sup> Так, например, соглашение, в основу которого была бы положена скорость звука  $u$  вместо скорости света  $c$ , внесло бы в рассмотрение всех физических явлений весьма превратные особенности звуковых явлений. Подобным же образом измерение длин с помощью пружинного динамометра внесло бы в рассмотрение всех явлений крайне специальные свойства пружины (см. по этому поводу [4, 6]). По этой же причине выбор системы координат, в принципе произвольный, на самом деле должен наилучшим способом соответствовать характеру изучаемой проблемы, дабы не запутать существо явлений.



На этом можно закончить описание метода арифметизации событий, принятого в классической релятивистской физике. В последующем рассматриваются возможные ограничения этого метода. Рассмотрение этих ограничений, как будет видно из дальнейшего, полезно для понимания более сложной ситуации в мире элементарных частиц.

## 2. Возможные ограничения принятой арифметизации

В классической физике понятию точечного события хорошо соответствует понятие материальной точки — объекта конечной массы  $m_0 \neq 0$  и неограниченно малых размеров  $a \rightarrow 0$ .

В силу предполагаемой непрерывности пространства в каждой его точке может быть построено пространство касательных векторов бесконечно малых смещений и ковариантное пространство импульсов  $\mathcal{R}_4(p)$ . Метрика этого пространства также неопределенна и имеет вид

$$dp^2 = dp_0^2 - d\mathbf{p}^2, \quad (4)$$

где  $d\mathbf{p}^2 = dp_1^2 + dp_2^2 + dp_3^2$ . Этот вид определяется метрикой, принятой в пространстве  $\mathcal{R}_4(x)$ . Таким образом, структуры пространства  $\mathcal{R}_4(x)$  и  $\mathcal{R}_4(p)$  не независимы.

Движение материальной точки (или их системы) может быть наиболее общим образом сформулировано в терминах геометрии Финслера [9]. Геометрия Финслера является обобщением геометрии Римана в том отношении, что элемент длины  $ds$  в этой геометрии в общем случае зависит не только от точки пространства, но и от направления луча в соседнюю точку. Именно:

$$ds = L(x, dx), \quad (5)$$

где  $L$  есть однородная функция смещений  $dx$  первой степени. Согласно сказанному эта функция может любым образом зависеть от отношений  $dx_k/dx_i$ , в частности таким образом, что  $ds$  будет релятивистским инвариантом.

Если теперь  $ds$  рассматривать как дифференциал функции Лагранжа, то принцип наименьшего действия оказывается тождественным условию движения материальной точки по геодезической линии в пространстве Финслера:

$$\delta \int ds = 0.$$

Никаких логических противоречий между эйнштейновским способом арифметизации и механикой материальных точек в рамках специальной теории относительности не существует. Поэтому материальные точки в специальной теории относительности могут рассматриваться как объекты, физически реализующие точечное событие  $\mathcal{P}(x)$ . Ограничения приходят со стороны гравитации. Будем рассматривать материальную точку как материальную частицу конечных размеров  $a$ . Пусть  $m_0$  — ее масса покоя. Тогда, если гравитационный радиус этой частицы  $a_g$ ,

$$a_g = \frac{2km_0}{c^2} \quad (6)$$

(здесь  $k = 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{с}^2$  есть гравитационная постоянная Ньютона), больше ее размера  $a$ , то метрические соотношения «внутри» частицы существенно меняются. Метрика становится нестационарной и наступает явление коллапса [10, 11]. При этом ни один сигнал из области  $r < a_g$  не может достичь внешнего наблюдателя, и поэтому невозможна никакая информация об упорядочении событий внутри коллапсирующей частицы. Из (6) видно, что целесообразно иметь в качестве объектов, маркирующих точки пространства-времени, материальные частицы с наименьшей массой ( $m_0 \rightarrow 0$ ). Однако при  $a \rightarrow a_g$  возникает критическая плотность

$$\rho_g = \frac{3}{4\pi} \left( \frac{c^2}{2k} \right)^3 \frac{1}{m_0^2}. \quad (7)$$

Эта плотность при  $m_0 \rightarrow 0$  может перешагнуть пределы, известные нам из физики элементарных частиц. Интересно отметить, что критическая плотность  $\rho_g$  не превышает плотности элементарных частиц  $\rho_0$ , если  $m_0 > M_g = 0,52 \times 10^{-5} \text{ г}$ , т. е. меньше массы гравитационного «максимона» (см. гл. 4).

В этой связи возникает любопытный вопрос: не может ли метод арифметизации событий, принятый в теории относительности, потерять свою силу ранее, чем достигается условие  $\rho = \rho_g$ . В самом деле, если при некоторой плотности материи  $\rho_k < \rho_g$  ни один световой сигнал и даже нейтринный сигнал не может распространяться в среде в силу исключительно сильной экстинкции<sup>1</sup>, упорядочение событий в такой среде с помощью световых или нейтринных волн становится невозможным. В этих условиях звуковой сигнал может оказаться более подходящим средством для упорядочения событий. Скорость такого сигнала  $v$  может быть и больше скорости света в пустоте  $c$ , тем не менее никакого противоречия с принципом причинности не возникает, так как  $v$ -сигнал, а не  $c$ -сигнал применяется для упорядочения событий (см. подробности в [6]).

Другого рода ограничения для применимости стандартного метода упорядочения событий происходят со стороны стохастических гравитационных полей. Поля, создаваемые турбулентным движением материи, неизбежно ведут к тому, что метрический тензор  $g_{\mu\nu}(x)$  становится стохастической величиной  $\hat{g}_{\mu\nu}(x)$ . Тот же самый характер случайной величины приобретает и интервал между событиями:

$$d\hat{s}^2 = \hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (8)$$

Если флуктуации  $\hat{h}_{\mu\nu}(x)$  метрического тензора  $\hat{g}_{\mu\nu}(x)$  невелики по сравнению со средними значениями  $\langle \hat{g}_{\mu\nu}(x) \rangle = \bar{g}_{\mu\nu}(x)$ , то этот тензор целесообразно представить в виде

$$\hat{g}_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) + \hat{h}_{\mu\nu}(x). \quad (9)$$

В этом случае упорядочение событий можно основывать на метрике, определенной главной частью метрического тензора (ср. [6, 12]). Если же флук-

<sup>1</sup> Экстинкция (от лат. *extinctio* — гашение) — ослабление, например, пучка света при его распространении в веществе за счет совместного действия поглощения света и рассеяния света. — *Прим. ред.*

туации не малы, то упорядочение событий в  $\mathcal{R}_4(x)$  становится существенно стохастическим. Пространства со стохастической метрикой с аксиоматической точки зрения были рассмотрены в работах [13, 14]. Однако аксиоматика этих пространств ограничилась положительно-дефинитной метрикой. Распространение аксиоматики на стохастические пространства типа Минковского представляет собой еще проблему. Относящиеся сюда задачи и пути их решения описаны в монографии [6] и в очерке [15].

Основной вопрос, возникающий скорее у физика, нежели у математика, относится к указанию метода арифметизации событий.

Не приходим ли мы здесь к самой границе применения понятия об упорядочении событий?

Проблемы, связанные с метрикой при больших флуктуациях и при крайне больших плотностях вещества, вероятно, приобретут первостепенное значение при анализе ранних стадий «большого взрыва» («big bang»). Мы знаем, что сейчас господствуют определенные законы и существуют определенные симметрии, но нет оснований утверждать, что эти формы существования материи предписаны извечно. Не исключено, что современный нам вакуум и известный нам мир элементарных частиц являются лишь одним из возможных путей эволюции Вселенной, избранных в результате конкуренции различных возможностей. Однако на современной стадии наших знаний мы не имеем достаточных данных, чтобы обсуждать детальнее эту сторону дела.

### 3. Точечное событие в микромире

Обратимся теперь к миру элементарных частиц. В основе современной квантовой теории поля, с помощью которой описывается поведение элементарных частиц, лежит условие локальности

$$[\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(y)] = D(x - y), \quad (10)$$

$$D(x - y) = 0 \quad \text{для} \quad (x - y)^2 < 0; \quad (10')$$

здесь  $\hat{\varphi}(x)$  — оператор поля, взятый в точке  $(x)$ ,  $\hat{\varphi}(y)$  — оператор того же поля, взятый в точке  $(y)$ ,  $[\hat{A}, \hat{B}]$  означает коммутатор операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ <sup>1</sup>. Условие (10) есть выражение принципа причинности и означает независимость полей, если точки  $(x)$  и  $(y)$  разделены пространственноподобным интервалом  $(x - y)^2 < 0$ . Иными словами, произвольная вариация поля в точке  $(x)$  не может влиять на поле в точке  $(y)$ , поскольку сигнал, идущий со скоростью  $v \leq c$ , не может в этом случае достичь точки  $(y)$  (и обратно).

В условиях локальности (10) координаты точек  $(x)$ ,  $(y)$  предполагаются определенными неограниченно точно. Такое предположение равнозначно допущению существования точечных событий  $\mathcal{P}(x)$ ,  $\mathcal{P}(y)$ , и нам предстоит исследовать, насколько непротиворечиво это предположение в рамках той же локальной теории.

<sup>1</sup> Или антикоммутатор, если поле спинорное. Мы выписали явно условие для скалярного поля  $\varphi(x)$ .

Естественными кандидатами на роль представителей точечных событий являются сами элементарные частицы — аналоги материальных точек классической физики. Однако эта аналогия оказывается не очень далеко идущей из-за ряда особенностей, продиктованных законами квантовой физики.

Во-первых, все частицы с массой покоя  $m_0 = 0$  должны быть исключены из аналогии, так как они нелокализуемы в пространстве  $\mathcal{R}_4(x)$ . Они могут быть локализованы лишь в касательном пространстве  $\mathcal{R}_4(p)$ .

Но и частицы с массой покоя  $m_0 \neq 0$  доставляют затруднения.

Бозоны с массой покоя  $m_0 \neq 0$  не могут быть локализованы в пространстве  $\mathcal{R}_4(x)$  точнее, нежели в пределах  $\Delta x \approx \hbar/m_0 c$ .

Действительно, подчиняющаяся закону сохранения плотность  $\rho(t, \mathbf{x})$  мезонного поля  $\varphi(t, \mathbf{x})$  при  $t = 0$  равна

$$\rho(0, \mathbf{x}) = \varphi^*(0, \mathbf{x}) \hat{\Omega} \varphi(0, \mathbf{x}) \quad (11)$$

(где  $\hat{\Omega} = (m_0^2 - \nabla^2)^{1/2}$  есть оператор частоты, а  $\nabla$  — оператор градиента). Она положительно-дефинитна лишь в области  $|\nabla| \ll m_0$ , т. е. в нерелятивистской области. В этом случае величина

$$\rho(0, \mathbf{x}) \approx |\varphi(0, \mathbf{x})|^2 \geq 0 \quad (12)$$

и может быть истолкована как *плотность вероятности* нахождения бозона в точке  $x$  в момент времени  $t = 0$ . Однако при  $|\nabla| \ll m_0$  плотность  $\rho(0, \mathbf{x})$  распределена в пространстве в области  $|\Delta \mathbf{x}| \gg \hbar/m_0 c$ .

Для спинорных частиц, подчиняющихся уравнению Дирака, существует положительно-дефинитная плотность вероятности

$$\rho(0, \mathbf{x}) = \bar{\psi}(0, \mathbf{x}) \psi(0, \mathbf{x}) \geq 0, \quad (13)$$

где  $\psi(0, \mathbf{x})$  есть волновая функция для одночастичного состояния. Существует поверье, что для одночастичного состояния  $\overline{\Delta x^2} > (\hbar/m_0 c)^2$ . На самом деле для одночастичного состояния имеет место обычное соотношение неопределенностей  $\overline{\Delta x^2} > (\hbar^2/4) \overline{\Delta p^2}$  (см. [6, 16]). Однако необходимо учесть обмен состояниями между рассматриваемой частицей и частицами вакуума. Этот обмен в силу принципа Паули приводит к поляризации вакуума в области порядка  $\hbar/m_0 c$  (см. [43]). По этой причине позиция исходной частицы становится неопределенной в той же области. Следует иметь в виду, что создание и волнового пакета размером  $\Delta x \lesssim \hbar/m_0 c$  с помощью внешнего поля, даже при адиабатическом его включении, приведет к рождению пар частиц, так что реализовать одночастичное состояние со столь узким распределением невозможно<sup>1</sup>. Поэтому точная локализация спинорных частиц оказывается также иллюзорной.

<sup>1</sup> Например, в компаунд-ядре, образующемся при сближении двух ядер с зарядами  $Z_1, Z_2$ , при условии  $Z_1 + Z_2 > 137$  возникает электронная орбита с радиусом  $a_0 \approx \hbar/m_0 c$ . Однако при этом будут адиабатически рождаться пары  $e^+, e^-$  — явление неодночастичное (см. по этому поводу [17]).

Мы видим, что в микромире нет объектов, которые могли бы быть моделью точечного события  $\mathcal{P}(x)$ , так как элементарные частицы не могут быть локализованы точнее, нежели с точностью<sup>1</sup>

$$\Delta x > \frac{\hbar}{m_0 c}. \quad (14)$$

В классической физике не только можно рассматривать материальные точки как реализацию точечного события, но их можно выбрать и в качестве тела отсчета (Bezugskörper), которым фиксируется система отсчета. В мире элементарных частиц это оказывается невозможным. Если в качестве тела отсчета взять элементарную частицу с массой покоя  $m_0$ , то в преобразовании Лоренца (2)  $u$  будет четырехмерной скоростью частицы  $u = p/m_0 c$  (здесь  $p$  — импульс частицы), а пространственные компоненты сдвига  $a_1, a_2, a_3$  — ее координатами в момент времени  $t = 0$ .

Из соотношения неопределенностей

$$[p_i, a_k] = i\hbar\delta_{ik} \quad (15)$$

следует, что параметры преобразования (2) становятся операторами. Поэтому становятся операторами и координаты  $(\bar{x})$ , отсчитываемые относительно такого тела отсчета. В частности, из (2) и (15) нетрудно вычислить коммутатор  $\bar{x}$  и  $\bar{t}$

$$[\bar{x}, \bar{t}] = i\frac{\hbar}{m_0 c}(x - vt), \quad (16)$$

где  $v$  — оператор трехмерной скорости частицы.

Таким образом, элементарные частицы конечной массы не могут быть использованы ни в качестве объектов, с помощью которых отмечаются точки в пространстве  $\mathcal{R}_4(x)$ , ни в качестве тел отсчета.

С другой стороны, экспериментальные факты указывают на то, что предсказания локальной теории поля, основанной на условии микроскопичности (10), соблюдаются до масштабов порядка  $10^{-15}$  см (см. [18]).

Поэтому следует предполагать, что существуют элементарные частицы, с массой существенно более тяжелой, нежели масса нуклона  $m_p$ , для которого

$$\Delta x \approx \frac{\hbar}{m_0 c} = 2 \cdot 10^{-14} \text{ см.}$$

Из предыдущего следует, что локальная теория неявно предполагает существование как угодно тяжелых элементарных частиц ( $m_0 \rightarrow \infty$ ). В этом предположении противоречие между использованием понятия как угодно точных координат точки в пространстве  $\mathcal{R}_4(x)$  и отсутствием объектов, пригодных для роли точечных событий, было бы снято.

Ограничение масс частиц сверху некоторым пределом  $m_0 = M$  («максимоном») означало бы принципиальное ограничение применимости локальной теории для масштабов порядка  $\Delta x \sim \hbar/Mc$ .

<sup>1</sup> На возможное принципиальное значение такой неточности обращалось внимание еще на первых порах развития квантовой теории поля (см. [44–46]).

Требования идеального эксперимента по маркировке точки пространства-времени в классической физике и в квантовой оказываются прямо противоположными. В последующем будут рассмотрены возможные причины для существования верхнего предела массы элементарной частицы.

#### 4. Гравитация в микромире

Ограничения на массу элементарных частиц, как и в макроскопической физике, могут прийти со стороны гравитации.

Согласно основной идее А. Эйнштейна кривизна пространства-времени  $R_{\mu\nu}$  и его метрика  $g_{\mu\nu}$  определяются движением материи. Основные уравнения теории гласят:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi k}{c^2}T_{\mu\nu}(x). \quad (17)$$

Напомним, что здесь  $R_{\mu\nu}$  — тензор кривизны,  $T_{\mu\nu}$  — тензор импульс-энергии,  $k$  — гравитационная постоянная.

При детальном описании движения материи обязательно выступают на сцену квантовые явления. Следовательно, тензор  $T_{\mu\nu}$  должен рассматриваться как стохастическая величина, представляемая оператором  $\hat{T}_{\mu\nu}$ . Вместе с тем становятся операторами и величины в левой части уравнения (17). Иными словами, как только движение материи рассматривается только с точностью до квантовых явлений, так гравитационное поле становится квантовым полем<sup>1</sup>.

Совсем другой вопрос о том, какова может быть роль гравитационных явлений в квантовой области.

Например, гравитационное поле, порождаемое нулевыми колебаниями твердого тела по отношению к полю, создаваемому основной массой его атомов, определяется дробью  $\hbar\omega_0/m_0c^2$ , где  $\omega_0$  — дебаевская частота, а  $m_0$  — масса атома (или молекулы). Эта дробь по порядку величины равна  $10^{-11}A^{-1}$  ( $A$  — атомный вес атомов).

Разложим тензор импульс-энергии  $T_{\mu\nu}$  на две части:

$$T_{\mu\nu}(x) = \bar{T}_{\mu\nu}(x) + \hat{t}_{\mu\nu}(x), \quad (18)$$

где часть  $\bar{T}_{\mu\nu}(x)$  определяется средним движением материи, а часть  $\hat{t}_{\mu\nu}(x)$  — флуктуациями этого движения. Метрический тензор  $g_{\mu\nu}(x)$  представим в виде, указанном в (9). Тогда уравнение Эйнштейна (17) принимает вид

$$A^{\rho\sigma}_{\mu\nu}\hat{h}_{\rho\sigma} + B^{\rho\sigma\alpha}_{\mu\nu}\frac{\partial\hat{h}_{\rho\sigma}}{\partial x_\alpha} + C^{\rho\sigma\alpha\beta}_{\mu\nu}\frac{\partial^2\hat{h}_{\rho\sigma}}{\partial x_\alpha\partial x_\beta} = \frac{8\pi k}{c^2}\hat{t}_{\mu\nu}(x), \quad (19)$$

где тензоры  $A, B, C$  зависят лишь от среднего тензора  $\bar{g}_{\mu\nu}$  и его производных.

<sup>1</sup> По вопросу о возможности распространения уравнения Эйнштейна в область квантовых явлений существуют и другие взгляды. Описанный выше подход является наиболее естественным развитием идеи Эйнштейна.

Если массы  $m$ , определяющие среднюю метрику, имеют размер порядка  $a$ , то кривизна пространства  $R$  по порядку величины равна

$$R = \frac{1}{l^2} \approx \frac{1}{a^2} \frac{a_g}{a}, \quad (20)$$

как это непосредственно следует из уравнения Эйнштейна (17); здесь  $a_g$  — гравитационный радиус тела (см. (6)), а  $l$  — длина, характеризующая кривизну пространства. Если характерная масса флуктуации есть  $\Delta m$ , а ее характерный размер есть  $b$ , то уравнение (19) схематически может быть записано в виде

$$\frac{\alpha}{l^2} \hat{h} + \frac{\beta}{l'} \hat{h} + \frac{\gamma}{l'^2} \hat{h} \approx \frac{4\pi b_g}{b^3}, \quad (21)$$

где

$$b_g = \frac{2k\Delta m}{c^2} \quad (22)$$

есть гравитационный радиус флуктуации,  $l'$  — масштаб длины, характеризующий градиент стохастического поля  $\hat{h}$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$  — числовые коэффициенты.

По смыслу уравнения (14)  $l' \ll l$ . Далее, из линейности уравнения следует, что масштаб длины, определяющий градиент тензора  $\hat{h}$ , и масштаб, определяющий градиент тензора материи, должны быть сравнимы между собой. Отсюда следует  $l' \approx b$ . Таким образом, из (21) получаем

$$\hat{h} \approx \frac{b_g}{b}. \quad (23)$$

Это равенство определяет порядок величины флуктуации гравитационного поля  $\hat{h}$  по величинам, характеризующим флуктуации материи.

Отсюда нетрудно определить флуктуации метрического тензора, обусловленные нулевыми колебаниями какого-нибудь квантового поля. Например, для скалярного поля  $\varphi(x)$  нулевые колебания массы, имеющие масштаб, превосходящий  $b$ , составляют

$$\Delta m(b) = \frac{\Delta E(b)}{c^2} = \frac{b^3}{c^2} \int_0^{1/b} \frac{\hbar \omega_k}{2} d^3 k = \frac{\hbar}{cb}, \quad (24)$$

где  $\hbar \omega_k/2$  — нулевая энергия  $k$ -го колебания.

Подставляя (24) в (23), получим

$$\hat{h} \approx \frac{8\pi k}{c^2} \frac{\Delta m(b)}{b} = \frac{\Lambda_g^2}{b^2}, \quad (25)$$

где

$$\Lambda_g = \sqrt{\frac{8\pi k \hbar}{c^3}} = 0,82 \cdot 10^{-32} \text{ см} \quad (26)$$

есть известная длина, объединяющая гравитационную постоянную и постоянную Планка.

Из (25) видно, что эта длина определяет величину флуктуаций метрического тензора, вызванных квантовыми флуктуациями материального поля. Эти флуктуации малы во всей области частот, для которых

$$b \gg \Lambda_g. \quad (27)$$

Обратимся теперь к коллапсированной частице, рассмотренной в гл. 2, и учтем квантовые эффекты. Частица, имеющая массу  $m$ , имеет эффективный размер порядка  $a = \hbar/mc$ ; допустим, что эта частица достигла предельной массы так, что ее гравитационный радиус  $a_g = a$ . Тогда из условия  $8\pi k m/c^2 \approx \hbar/mc$  следует

$$a = \Lambda_g, \quad m = M_g = \frac{\hbar}{\Lambda_g c} = 0,52 \cdot 10^{-5} \text{ г}. \quad (28)$$

Таким образом, длина  $\Lambda_g$  определяет максимальную массу, которую может иметь частица, подчиняющаяся законам квантовой теории. При этом, согласно (7), плотность материи достигает предельного значения. Такая частица была названа Марковым «максимомом» [19, 20].

Из (27) и (28) следуют совершенно различные выводы относительно роли гравитации в мире элементарных частиц в зависимости от того, какими частотами  $\Omega_0 = c/a$  ограничивается на самом деле спектр вакуумных флуктуаций. Согласно современной теории он почти равномерно распределен по частотам, и высокие частоты должны бы давать неограниченно большой вклад в гравитацию. Если же позднее по той или иной причине окажется, что возможные частоты в микромире ограничены «элементарной» длиной  $a \gg \Lambda_g$ , то гравитационные эффекты будут несущественными.

В противоположном случае они будут играть фундаментальную роль в микромире, но в своем квантовом облике<sup>1</sup>.

Предсказания и надежды, основанные на классических расчетах гравитации, будут мажорированы квантовыми эффектами.

Вместе с тем «классическая» средняя метрика потеряет свое определяющее значение и возникнет ситуация, отмеченная в гл. 2: понятие интервала между событиями, а вместе с тем сама идея о возможности упорядочения событий в  $\mathcal{R}_4(x)$  становится более чем сомнительной. Мы подходим здесь к краю «бездны», в которую, быть может, еще рано заглядывать.

В последующем мы рассмотрим другие возможности для ограничения локальной теории. Среди конкурентов гравитации в этой роли мы увидим «слабое» взаимодействие.

## 5. «Слабый максимом»

В настоящее время мы различаем три типа взаимодействий: сильное, электромагнитное и слабое. Сравним их поведение при высокой энергии,

<sup>1</sup> Это направление уже в течение многих лет развивается Уилером и его сотрудниками (см. [21]).



пользуясь критерием, предложенным в работе [22]. Согласно этому критерию взаимодействие считается сильным, если в процессе взаимодействия плотность кинетической энергии частиц  $\epsilon_k$  много меньше абсолютной величины плотности энергии их взаимодействия:

$$\epsilon_k \ll |W|. \quad (29)$$

Рассмотрим с точки зрения этого критерия сперва столкновение нуклона ( $N$ ) и пиона ( $\pi$ ). Плотность полной энергии в этом случае равна

$$H = \hbar c \bar{\psi} \partial \psi + M c^2 \bar{\psi} \psi + \frac{1}{2} (\square \varphi^2 + m^2 \varphi^2) + g \bar{\psi} \gamma_5 \tau \varphi \psi, \quad (30)$$

где  $\psi$  — нуклонное поле,  $\varphi$  — мезонное,  $M$  — масса нуклона,  $m$  — масса мезона,  $\partial = \gamma^\mu \partial / \partial x_\mu$ ,  $g$  — константа взаимодействия. Пусть  $l$  есть длина, определяющая величину градиента в СЦМ ( $l \approx \hbar/p = \lambda$ ,  $p$  — импульс частиц). Тогда плотность кинетической энергии нуклона имеет порядок величины

$$\epsilon_N \approx \frac{\hbar c}{l} \bar{\psi} \psi \quad (31)$$

(так как  $\partial \sim 1/l$ ), плотность мезонной кинетической энергии равна

$$\epsilon_\pi \approx \frac{\varphi^2}{l^2} \quad (32)$$

(так как  $\square^2 \sim l^{-2}$ ). Отсюда

$$|W| \approx g \bar{\psi} \psi \varphi \approx \frac{g}{\hbar c l^2 \epsilon_N \sqrt{\epsilon_\pi}}. \quad (33)$$

Из условия (29), имея в виду, что  $\epsilon_k = \epsilon_N + \epsilon_\pi$ , получаем

$$1 \ll \frac{g}{\hbar c \epsilon_N + \epsilon_\pi} \sqrt{\epsilon_\pi} l^2. \quad (34)$$

Далее

$$\epsilon_\pi \approx \frac{pc}{l^3} \approx \frac{\hbar c}{l^4}, \quad (35)$$

$$\frac{\epsilon_N}{\epsilon_N + \epsilon_\pi} \approx \frac{1}{2}. \quad (36)$$

В результате находим

$$\frac{g^2}{\hbar c} \gg 1, \quad (37)$$

откуда следует, что сильное взаимодействие, по нашему критерию, является сильным при всех условиях (поскольку неравенство (37) выполнено всегда).

Применим теперь тот же критерий к взаимодействию электромагнитного поля с заряженной спинорной частицей. В этом случае

$$W = e\bar{\psi}A\psi, \quad (38)$$

где  $A = \gamma^\mu A_\mu$ ,  $A_\mu$  — вектор-потенциал,  $e$  — заряд частиц. Следуя этой же процедуре, получим

$$\frac{e^2}{\hbar c} \gg 1. \quad (39)$$

Это неравенство не выполняется. Следовательно, по нашему критерию, электромагнитные взаимодействия не принадлежат к числу сильных взаимодействий<sup>1</sup>.

Обратимся теперь к интересующему нас случаю слабого взаимодействия. Плотность полной энергии теперь имеет вид

$$H = \hbar c \bar{\psi} \gamma \psi + M c^2 \bar{\psi} \psi + \hbar c \bar{\varphi} \partial \varphi + m c^2 \bar{\varphi} \varphi + G_F \bar{\psi} O_\alpha \psi \bar{\varphi} O^\alpha \varphi, \quad (40)$$

где  $\psi$  — нуклонное поле,  $\varphi$  — лептонное поле,  $M$  и  $m$  — массы этих частиц,  $G_F$  — константа Ферми,  $O_\alpha$  — спинорный оператор. Нетрудно видеть, что в этом случае энергия взаимодействия  $W$  имеет порядок

$$|W| \approx G_F \frac{\varepsilon_N l}{\hbar c} \frac{\varepsilon_l}{\hbar c}, \quad (41)$$

где  $\varepsilon_N$  — плотность кинетической энергии нуклонов, а  $\varepsilon_l$  — плотность кинетической энергии лептонов. Из условия (29), имея в виду, что  $\varepsilon_N \approx \varepsilon_l \approx \hbar c / l^3$ , получим

$$\frac{\Lambda_F^2}{l^2} \gg 1, \quad (42)$$

где  $\Lambda_F = \sqrt{G_F / \hbar c} = 0,66 \cdot 10^{-16}$  см,  $l \approx \lambda = \hbar / p$ . Отсюда следует, что слабое взаимодействие становится сильным при энергии частиц  $E \sim \hbar c / \Lambda_F \sim \sim 300$  ГэВ (см. также [23, 24]).

Рассмотрим теперь распад тяжелого адрона массы  $M$ , обусловленный слабым взаимодействием:  $M \rightarrow m + l + \tilde{\nu}$ ; здесь  $m$  — масса нуклона,  $l$  — лептон,  $\tilde{\nu}$  — антинейтрино. Константа распада  $\Gamma$  для процесса указанного типа при  $M \gg m$  равна [25]

$$\frac{\Gamma}{M} = \frac{1}{4\pi^3} G_F^2 M^4 n, \quad (43)$$

где  $G_F = 10^{-5} / m^2$ ,  $n$  — число каналов различных распадов, которое может быть не малым. Из этой формулы видно, что при массе адрона

$$M > m_F = \frac{\hbar}{\Lambda_F c} \quad (44)$$

<sup>1</sup> Это заключение основано на взаимодействии (38). Векторные мезоны не учтены в приведенной выше оценке.

константа распада  $\Gamma$  становится сравнимой с массой адрона  $M$  и адрон перестает существовать как элементарная частица, поскольку ему нельзя приписать никакой определенной массы. Условную частицу с массой  $M_F$  целесообразно назвать слабым максимомом. Это название тем более оправдано, что слабое взаимодействие на расстояниях порядка  $R \lesssim \Lambda_F$  приводит к масс-дефекту  $D$ , равному массе максимона. Этот результат вытекает из расчета парных (лептонных) сил, впервые произведенного в работе [47]. Согласно этому расчету потенциал такого взаимодействия  $V$  равен  $V = -(2\pi)^{-3}(\Lambda_F/R)^5 M_F c^2$ . Поэтому для  $R < \Lambda_F$  масс-дефект  $D \sim V/c^2 \approx M_F$ , так что  $M_F + M_F = D \sim M_F$ . Это ограничение на массу частиц, как видно из (44) и (26), наступает раньше ограничения, диктуемого гравитацией, так как  $M_F \ll M_g$ . Вместе с тем предполагаемое ограничение локальной теории в этом случае должно наступать существенно раньше, нежели это вытекает из предположения о существовании гравитационного максимона  $M_g$ .

## 6. «Чернота» частиц и локальность

Элементарная частица представляет собой некоторую среду, описываемую рождением и уничтожением виртуальных частиц. Естественным образом поставить вопрос об условиях распространения метрического сигнала в такой своеобразной среде. Если исходить из теории возмущений, то ответ на этот вопрос дается функцией Грина, которая, будучи основана на локальной теории, гарантирует распространение взаимодействия со скоростью света.

Ситуация, однако, меняется, если взаимодействие становится сильным. В этом случае возникают, во-первых, нелинейные явления, во-вторых, сильная абсорбция как результат неупругих процессов.

Первая группа явлений имеет место в области сильных полей и малых градиентов поля. В работах [26, 27] на примере скалярного и электромагнитного полей было показано, что закон распространения этих полей существенно меняется, вплоть до исчезновения всякой возможности распространения: характеристики нелинейных уравнений становятся мнимыми и уравнение из гиперболического типа превращается в уравнение эллиптического типа. Возникающая ситуация была названа «комком» событий. Было бы более современно назвать ее «световым коллапсом» [6, 22].

В области больших градиентов появляются неупругие процессы. В работе [29] указывалось на возможное ограничение пространственно-временного описания структуры элементарных частиц, возникающего из того факта, что сечение неупругого процесса не уменьшается с ростом энергии, но стремится к постоянному пределу или даже медленно растет.

В то же самое время упругое рассеяние приобретает характер дифракционного рассеяния на «черном» шарике размером  $a$ . В частности, на основе первых работ по рассеянию пионов на нуклонах, было отмечено [28, 29], что «эффективный» потенциал для такого рассеяния чисто мнимый и хорошо

представляется формулой<sup>1</sup>

$$\tilde{V}(q) = iA(E)e^{-a^2q^2}; \quad (45)$$

здесь  $q$  — передаваемый импульс,  $A(E)$  — некоторая функция энергии  $E$ , определяемая по главному дифракционному максимуму.

В случае, когда роль неупругих процессов становится доминирующей, информация относится не столько к пространственно-временной структуре, сколько к рождению новых частиц.

Возникающая «чернота» частицы препятствует использованию упругого рассеяния для изучения пространственно-временного распределения материи. Приведенный пример с мезонами является весьма частным, поэтому он не имеет принципиального значения.

Для проблемы, изучаемой в этой статье, интерес представляла бы только такая ситуация, когда «чернота» возникала бы для наиболее универсального метрического сигнала. Наиболее универсальными являются слабые взаимодействия. Если допустить рост слабого взаимодействия до масштабов, диктуемых унитарным пределом, то возможное ограничение локальной теории условиями распространения сигнала внутри элементарной частицы совпадет с условием, вытекающим из существования «слабого максимона».

## 7. Пространство импульсов $\mathcal{R}_4(p)$

Классическая теория оперирует совместно с пространством  $\mathcal{R}_4(x)$  и контравариантным касательным пространством  $\mathcal{R}_4(p)$ . Иная ситуация имеет место в области квантовых явлений. В квантовом движении траектория материальной точки недифференцируема (см. [31]), а пространства  $\mathcal{R}_4(x)$  и  $\mathcal{R}_4(p)$  взаимно дополнительные. Они относятся к двум различным, несовместимым классам измерений.

Оба эти пространства теоретически равноправны, поскольку переход от описания в одном из них к описанию в другом осуществляется с помощью унитарного преобразования векторов состояний  $\Psi$  и соответствующего преобразования операторов  $L$ , представляющих физические величины.

Однако эти два описания неравноправны в физическом эксперименте. Пространство  $\mathcal{R}_4(x)$  фигурирует в опыте в своем макроскопическом облике. Непосредственно в опыте микроскопическое упорядочение событий не проявляется, так как наблюдаемая в опыте причинность является *макроскопической*.

Действительно, для того чтобы событие  $A$ , расположенное в пространственно-временной области  $\mathcal{G}_A(x)$ , можно было считать причиной события  $B$ , расположенного в области  $\mathcal{G}_B(y)$ , необходима уверенность в том, что при совершении  $A$  был испущен квант с энергией  $\varepsilon = \hbar\omega \geq 0$  и импульсом  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ , который позднее поглощен в области  $\mathcal{G}_B(y)$ , генерируя тем самым событие  $B$ .

В этом описании причинной связи мы используем оба пространства  $\mathcal{R}_4(x)$  и  $\mathcal{R}_4(p)$ ; первое из них, чтобы отметить взаимное расположение событий

<sup>1</sup> Такого рода потенциал сейчас успешно используется в качестве первого приближения в теории «квазипотенциала» [30].

$A$  и  $B$ , второе — чтобы указать направление передачи энергии и импульса [6]. Совместное использование взаимно дополнительных пространств  $\mathcal{R}_4(x)$  и  $\mathcal{R}_4(p)$  выводит нас в область классической, т.е. *макроскопической*, физики.

Следовательно, пространственно-временное описание осуществляется с точностью, далекой от того, чтобы ограничения типа (14) стали ощутимыми.

В противоположность пространственно-временному описанию, импульсно-энергетическое описание в пространстве  $\mathcal{R}_4(p)$  осуществляется в опыте с точностью, которая кажется неограниченной. В этом описании микроскопическая причинность, выражаемая условием локальной коммутативности (10), проявляется лишь косвенно, в предсказуемом на основе локальной теории поведения амплитуд  $T_{if}(p)$  (здесь буква  $i$  указывает начальное состояние, а  $f$  — конечное состояние различных физических процессов). В частности, микропричинность находит свое выражение в аналитических свойствах амплитуды  $T_{if}(p)$  в комплексной плоскости переменной<sup>1</sup>  $p$ . В пространстве  $\mathcal{R}_4(p)$  состояние свободных стабильных частиц описывается точками на гиперboloиде

$$p^2 \equiv p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m_0^2, \quad (46)$$

где  $m_0$  — масса частицы. Каждый такой гиперboloид является пространством Лобачевского  $R_3(\mathbf{p})$  с кривизной  $R = -1/m_0^2$  [33].

В пространстве  $\mathcal{R}_4(p)$  из-за неопределенности его метрики (4) не существует инвариантного понятия большего или малого импульса. В силу этого обстоятельства не существует и инвариантных ограничений на частоту  $\omega$  или на волновой вектор  $|\mathbf{k}|$ . Подобное ограничение обязательно выделит какую-либо систему отсчета. Это положение является дополнительным к утверждению об отсутствии инвариантной меры близости событий в пространстве  $\mathcal{R}_4(x)$ .

Амплитуды  $T_{if}(p)$ , описывающие физические процессы, суть матричные элементы матрицы рассеяния  $S$ :

$$S_{if} = \delta_{if} + iT_{if}. \quad (47)$$

Эта матрица, как известно, определяет состояние частиц в «момент» времени  $t_f = +\infty$ , если оно дано в «момент» времени  $t_i = -\infty$ . С геометрической точки зрения  $S$ -матрица преобразует состояние частиц, данное в некотором прямом произведении пространств Лобачевского  $R_3(\mathbf{p}_1) \times R_3(\mathbf{p}_2) \times \dots \times R_3(\mathbf{p}_i)$ , в новое состояние, данное, вообще говоря, в другом произведении таких пространств  $R_3(\mathbf{p}'_1) \times R_3(\mathbf{p}'_2) \times \dots \times R_3(\mathbf{p}'_f)$ .

Поскольку импульсы частиц заданы, координаты частиц неопределенны, неопределенны также и «моменты» времени  $t = \pm\infty$ . Поэтому упорядочение событий в  $\mathcal{R}_4(x)$ , достигаемое с помощью  $S$ -матрицы, является минимальным.

Вопреки распространенному мнению, описание явлений микромира с помощью  $S$ -матрицы является неполным. Посредством  $S$ -матрицы невозможно

<sup>1</sup> На этих свойствах основаны «дисперсионные соотношения», важные для анализа экспериментальных данных [32].

описать поведение нестабильных частиц, поскольку установление начальных условий в этом случае не может относиться к моменту времени<sup>1</sup>  $t = -\infty$ .

Иллюстрацией этого утверждения может служить ситуация, возникающая в случае  $K^0$ -мезонов, когда необходимо следить за эволюцией состояния:

$$\bar{K}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}[K_S^0(t) - K_L^0(t)], \quad (48)$$

где  $\bar{K}^0$  — состояния анти- $K^0$ -мезона, а  $K_S^0$ ,  $K_L^0$  суть состояния коротко- и долгоживущих мезонов,  $t$  — время. Старомодные методы описания кажутся здесь неизбежными, так как необходимо упорядочение событий во времени с точностью  $\Delta t \ll \tau_S$  — времени жизни короткоживущего  $K^0$ -мезона.

Эти замечания, относящиеся к  $S$ -матрице, не ограничивают возможностей описания в пространстве  $\mathcal{R}_4(p)$ , которое может быть расширено и в область комплексных значений  $p$ . Более того, такое расширение представляется необходимым для описания поведения нестабильных частиц.

Поэтому, несмотря на формальную равноправность описания явлений в  $\mathcal{R}_4(x)$  и  $\mathcal{R}_4(p)$ , описание в последнем пространстве менее уязвимо той критикой, которая направлена в адрес локальной теории, оперирующей в пространстве-времени  $\mathcal{R}_4(x)$ .

Видимо, именно в этой связи еще в 40-х годах Снайдером [34] была высказана привлекательная идея, согласно которой метрика импульсного пространства  $\mathcal{R}_4(p)$  может быть более сложной, нежели метрика Минковского (4); именно, вместо (4) была предложена риманова метрика

$$dp^2 = g_{\mu\nu} dp_\mu dp_\nu, \quad (49)$$

где метрический тензор  $g_{\mu\nu}$  есть функция импульса  $p$ :

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(p, p_\alpha), \quad (50)$$

и параметра

$$p_\alpha = \frac{\hbar}{a}; \quad (51)$$

здесь  $a$  есть некоторая «элементарная длина», а  $p_\alpha$  — импульс, являющийся масштабом кривизны импульсного пространства.

Связь пространства  $\mathcal{R}_4(x)$  с пространством  $\mathcal{R}_4(p)$  основывается на предположении, что искривленное пространство есть пространство постоянной кривизны<sup>2</sup>. Это ограничение позволяет рассматривать координаты  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  как операторы сдвига в пространстве

$$x_\mu \rightarrow \hat{x}_\mu \equiv \left( i \frac{\partial}{\partial p_\mu} + A_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \right). \quad (52)$$

<sup>1</sup> За исключением некоторых специальных случаев, когда, например, нестабильную частицу можно рассматривать как резонанс.

<sup>2</sup> Идея Снайдера получила дальнейшее развитие в работах Ю. А. Гельфанда [35], В. Г. Кадышевского [36] и И. Е. Тамма [37].

При  $a = 0$   $A_\nu^\mu(p) = 0$ , так что (52) переходит в представление операторов координат, характерное для локальной теории. Но и в этом варианте пространство  $\mathcal{R}_4(x)$  как четырехмерное многообразие точек, представляющих координаты точечных событий, перестает существовать; дело в том, что операторы  $x_\mu$  не коммутируют между собой:

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = iL_{\mu\nu} \neq 0. \quad (53)$$

В силу этого четырехмерное пространство  $\mathcal{R}_4(x)$  распадается на одномерные лучи, направленные или состоящие из точек («квантование» пространства-времени).

Геометрия пространства постоянной кривизны накладывает ограничение либо на величину времениподобного импульса, либо на величину пространственноподобного импульса. В первом случае накладывается ограничение на массу частиц:

$$p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m_0^2 < \frac{\hbar^2}{a^2} \equiv M_0^2. \quad (54)$$

Эта возможность находится в соответствии с развиваемой в этой статье концепцией, согласно которой реальная граница применимости локальной теории возникает в том случае, если по той или другой причине имеется предельное значение массы частиц («максимон»). Масса  $M_0 = \hbar/a_0c$  имеет смысл «геометрического максимона»<sup>1</sup>.

Условие (54) не должно бы распространяться на макроскопические системы, масса которых может быть как угодно большой. Поэтому возникает проблема: как ограничить действие этих условий миром элементарных частиц? В этой связи интересна работа [39], развивающая вариант теории Снайдера, в котором расширение пространства импульсов за пределы массовой поверхности (54) образует пространство де Ситтера. Это пространство можно рассматривать как четырехмерную поверхность на пятимерном гиперboloиде:

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - p_4^2 = M_0^2. \quad (55)$$

В этой теории полный импульс  $P$  системы частиц остается в плоском пространстве  $\mathcal{R}_4(P)$ , а внутренние импульсы системы принадлежат пространству де Ситтера. Теория привлекательна не только тем, что в ней с самого начала заложено предположение о существовании максимона, но и тем, что она, по всей видимости, может быть развита в аксиоматической форме. Другой вариант нелокальной теории, также развитый в аксиоматической форме, основывается на нелокальном поле  $\Psi(x)$ , для которого обобщается условие локальной причинности, данное в форме  $T$ -произведения [40]:

$$T(\Psi(x)\Psi(y)) = \mathcal{D}_c(x - y, a), \quad (56)$$

где  $\mathcal{D}_c(x - y, a)$  есть нелокальная причинная функция. Ее свойства яснее всего видны из фурье-представления

$$\mathcal{D}_c(x, a) = \int \tilde{K}(p, a) e^{ipx} d^4p, \quad (57)$$

<sup>1</sup> Вторую возможность мы не рассматриваем.

где

$$\tilde{K}(p, a) = \frac{\tilde{V}(p, a)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad (58)$$

причем  $\tilde{V}(m, a) = 1$ , а другая функция  $\tilde{K}(p, a)$  есть целая функция, исчезающая при  $p^2 \rightarrow -\infty$  и имеющая рост по  $|p|$  порядка  $\rho \geq 1/2$  [41]. На первый взгляд эта теория, оперирующая, как и локальная теория, точными значениями координат в пространстве  $\mathcal{R}_4(x)$ , не имеет отношения к какой-либо модификации геометрии. Однако в работе [42] показано, что нелокальное поле  $\Psi(x)$  можно рассматривать как среднее от поля  $\Psi(x)$ , определенного в стохастическом пространстве  $\Gamma_4(\hat{x})$ , в котором операторы координат  $\hat{x}_\mu$  равны

$$\hat{x}_\mu = x_\mu + a\gamma_\mu,$$

где  $\gamma_\mu$  — матрицы Дирака и  $a$  — некоторая длина. Предполагается, что среднее от  $\hat{x}_\mu$  равно  $x_\mu$ . Усреднение производится по распределению  $dw(a)$  длины  $a$ , сосредоточенному около массы максимона  $M_0$ , т. е. около  $a \approx a_0 = \hbar/M_0c$ .

Оба рассмотренных варианта нелокальной теории опираются на предположение о новой метрике пространства.

Как известно, в общей теории относительности метрика не предписывается извне, а формируется самосогласованным движением материи. Можно предполагать, что и в случае микромира метрика пространства-времени может быть продиктована полем элементарных частиц. Претендентом на влияние на метрику в области крайней малых масштабов могло бы быть слабое взаимодействие, которое, по всей видимости, достаточно универсально.

Так это или иначе, но ясно, что не только квантование пространства в духе условий (53) или (59), но и любая зависимость метрики от движения микрочастиц неизбежно ведет нас в область стохастических пространств. Общей чертой пространств такого рода является вероятностное упорядочение точечных событий.

Способ, которым при этом входит в теорию микромира новый вероятностный аспект, в принципе отличен от того, который привносится квантово-механическим описанием полей. Статистика в этом случае распространяется не только на кинематику и динамику, но и на упорядочение точечных событий в пространстве-времени.

Комментарий. Эта статья является продолжением исследований, посвященных концепциям пространства и времени в физике микромира, опубликованных в монографии Д. И. Блохинцева «Пространство и время в микромире», М.: Наука, 1970. Анализ концепции события, проведенный в статье, приводит Д. И. Блохинцева к выводу, что в микромире нет объектов, которые могли бы быть моделью точечного события или телом отсчета. Видимо, это явилось стимулом к рассмотрению теорий, которые ведут к модификации геометрии. В теории суперсимметрии Саламом и Стратди (1974) была введена



концепция суперпространства, где наряду с обычными переменными рассматриваются грассманы переменные. Интересно, что у Д. И. Блохинцева роль суперпространства играет стохастическое пространство, где вместо грассмановых переменных рассматриваются образующие алгебры Клиффорда. При анализе различных вариантов новой геометрии указывается также на геометрию Финслера. Идея использовать финслерову геометрию была развита Г. Ю. Богословским: «Теория локального анизотропного пространства-времени», М.: Изд-во МГУ, 1996. В связи с идеей новой геометрии естественным образом встает вопрос о нарушении лоренцевой симметрии, который в последнее время активно обсуждается в литературе. Можно указать, например, сб. «CPT and Lorentz Symmetry II», edited by V. A. Kostelecky (World Scientific, Singapore, 2002). Здесь обсуждаются различные экспериментальные и теоретические подходы к нарушению лоренцевской симметрии и CPT-симметрии.

*А. Б. Пестов*

### Список литературы

1. *Poincaré H.* // Rev. Mataphys. et de Morales. 1898. V. 6. P. 1.
2. *Эйнштейн А.* // Собр. научн. трудов, т. 1. М.: Наука, 1965. С. 7; Сущность теории относительности. М.: ИЛ, 1955.
3. *Мандельштам Л. И.* // Собр. соч., т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1955.
4. *Фридман А. А.* Мир как пространство и время. М.: Наука, 1965.
5. *Тяпкин А. А.* // УФН. 1972. Т. 106. С. 617; *Кадоццев Б. Б. и др.* // Там же. С. 660.
6. *Блохинцев Д. И.* Пространство и время в микромире. М.: Наука, 1970.
7. *Марцке Р., Уилер Дж. А.* // Гравитация и относительность: Сб. М.: Мир, 1965.
8. *Синг Дж.* Общая теория относительности. М.: ИЛ, 1963.
9. *Rund H.* The Differential Geometry of Finsler Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1959. Имеется русский перевод: Рунд Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981. — *Прим. ред.*
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля, изд. 4-е. М.: Наука, 1967.
11. *Уилер Дж. и др.* Теория гравитации и гравитационный коллапс. М.: Мир, 1967.
12. *Blokhintsev D. I.* // Nuovo Cim. 1960. V. 16. P. 382.
13. *Menger K.* // Proc. Nat. Ac. Sci. USA. 1942. V. 28. P. 535.
14. *Schweizer B., Sklar A.* // Pacific J. Math. 1960. V. 10. P. 1.
15. *Блохинцев Д. И.* Сообщение ОИЯИ P2-6094. Дубна, 1971.
16. *Blokhintsev D. I.* // Acta Phys. Sci. Hung. 1967. V. 22. P. 307.
17. *Попов В. С.* // ЯФ. 1970. Т. 12. С. 429.
18. *Соловьев Л. Д.* Раппортерский доклад на XV Международной конференции по физике высоких энергий. Киев, 1970.
19. *Марков М. А.* Препринт ОИЯИ Е-2014. Дубна, 1966.
20. *Марков М. А.* Препринт ОИЯИ Е2-5271. Дубна, 1970.
21. *Wheeler J. A.* // Гравитация и геометрия: Сб. М.: Мир, 1965.
22. *Блохинцев Д. И.* // УФН. 1957. Т. 62. С. 381. — Статья № 86 в наст. изд. — *Прим. ред.*

23. *Blokhintsev D. I.* // Proc. of Rochester Conference. 1960. — Статья 89 в наст. изд. — *Прим. ред.*
24. *Blokhintsev D. I.* // Nuovo. Cim. 1958. V. 10. P. 925; ЖЭТФ. 1958. Т. 35. С. 1001.
25. *Биленький С. М.* Введение в диаграммную технику. М.: Атомиздат, 1971.
26. *Блохинцев Д. И.* // ДАН СССР. 1952. Т. 82. С. 553; см. также [6]. — Статья 81 в наст. изд. — *Прим. ред.*
27. *Блохинцев Д. И., Орлов В. В.* // ЖЭТФ. 1953. Т. 25. С. 513. — Статья 82 в наст. изд. — *Прим. ред.*
28. *Blokhintsev D. I.* // Nucl. Phys. 1961. V. 31. P. 628.
29. *Blokhintsev D. I., Barashenkov V. S., Grishin V.* // Nuovo Cim. 1958. V. 10. P. 249.
30. *Logunov A. A., Tavkhelidze A. N.* // Nuovo Cim. 1963. V. 29. P. 380.
31. *Фейнман Р., Хиббс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.
32. *Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К.* Вопросы теории дисперсионных соотношений. М.: Физматгиз, 1958.
33. *Черников Н. А.* // Научн. докл. высш. школы (Физ.-матем. науки). 1958. № 2. С. 158.
34. *Snyder H.* // Phys. Rev. 1947. V. 71. P. 38.
35. *Гельфанд Ю. А.* // ЖЭТФ. 1959. Т. 37. С. 4504; 1962. Т. 43. С. 256; 1963. Т. 44. С. 1248.
36. *Кадышевский В. Г.* // ЖЭТФ. 1961. Т. 41. С. 1885; ДАН СССР. 1962. Т. 147. С. 588; 1963. Т. 157. С. 1336.
37. *Тамм И. Е.* // XII Международная конференция по физике высоких энергий, т. 2. Дубна: ОИЯИ, 1964. С. 229.
38. *Кадышевский В. Г.* Препринт ОИЯИ P2-5717. Дубна, 1971.
39. *Donkov A. D. et al.* JINR Preprint E2-6992. Dubna, 1973.
40. *Efimov G. V.* // Comm. Math. Phys. 1967. V. 5. P. 42; 1968. V. 7. P. 138.
41. *Алебастров В. А., Ефимов Г. В.* Сообщение ОИЯИ P2-6586. Дубна, 1972.
42. *Блохинцев Д. И.* // ТМФ. 1973. Т. 17, № 2. С. 153. — Статья 100 в наст. изд. — *Прим. ред.*
43. *Weisskopf V.* // Phys. Rev. 1939. V. 56. P. 72.
44. *Ambarzumian V., Ivanenko D.* // Zs. Phys. 1930. V. 64. P. 563.
45. *Landau L., Peierls R.* // Zs. Phys. 1931. V. 69. P. 56.
46. *Schrödinger E.* // Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. 1931. V. 12. P. 238.
47. *Tamm I. E., Ivanenko D. D.* // Nature. 1934. V. 133. P. 981.

## СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

В статье рассматриваются стохастические пространства, т.е. пространства, метрика которых зависит от случайных величин — параметров, функций или квантовых операторов. В отличие от математических работ, посвященных таким пространствам с положительно definite метрикой, в этой статье изложение сосредоточено на пространствах с indefinite метрикой. В статье приведены физические основания для изучения подобных пространств и изложены основные понятия. В дальнейшем статья посвящена различным приложениям теории стохастических пространств к проблемам теории физических полей. В последней части статьи рассмотрены пространства, метрика которых определяется операторами («квантованные» пространства — пространства Снайдера — и  $\Gamma$ -пространство).

### Введение

Настоящая статья посвящена теории стохастических пространств. Построение ее таково: первые три раздела посвящены геометрии и физике микромира и поясняют причину изучения стохастических пространств. Далее излагаются основные понятия, относящиеся к стохастическим пространствам.

Последующие разделы иллюстрируют возникновение стохастических пространств на ряде примеров, заимствованных из физики. Наконец, последние два раздела посвящены квантовым стохастическим пространствам.

### 1. Упорядочение событий в пространстве $R_4(x)$

Теоретическая физика начинается с упорядочения событий. Это основа всех основ. Для упорядочения событий каждому точечному событию  $\mathcal{P}$  приписывается четверка чисел  $(x) = x^1 x^2 x^3 x^4$  координат этого события; если одной четверки недостаточно, то событие неточечное. В дальнейшем эта операция называется арифметизацией событий, которая предполагает определенный физический способ ее осуществления. Этот способ содержит существенный элемент соглашения<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Заметим, что речь идет именно о соглашениях, подчеркиваемых уже в первых работах А. Пуанкаре [1] и А. Эйнштейна [2]. См. также [3] и особенно блестящую книгу А. А. Фридмана [4]. В последнее время этому вопросу была посвящена дискуссия в УФН [5]. Эти вопросы рассмотрены также в монографии [6].

Современное соглашение базируется: а) на принципе универсального постоянства скорости света и б) на допущении о существовании «стандартных» часов<sup>1</sup>.

Основанная на этих соглашениях арифметизация ведет к пространству Минковского с неопределенной метрикой, которую выписываем в обычных обозначениях

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2. \quad (1.1)$$

Движущиеся относительно друг друга наблюдатели  $\bar{\Sigma}$  и  $\Sigma$ , производя арифметизацию одним и тем же способом, припишут тем не менее разные координаты  $(\bar{x})$  и  $(x)$  одному и тому же событию  $\mathcal{P}$ .

Предполагается, что существует взаимно-однозначное соответствие между координатами  $(\bar{x})$  и  $(x)$  и что метрика (1.1) универсальна. Тогда преобразование, связывающее координаты  $(\bar{x})$  и  $(x)$  в декартовой системе координат, есть преобразование Пуанкаре–Лоренца:

$$\bar{x} = \Lambda(u)x + a, \quad (1.2)$$

где параметры преобразования  $u$  и  $a$  имеют смысл относительной скорости системы отсчета  $\bar{\Sigma}$  и  $\Sigma$  и относительного сдвига начала координат;  $\Lambda(u)$  — матрица преобразования.

Такова в самых важнейших чертах геометрия, лучше сказать хроногеометрия [6–8], соответствующая содержанию специальной теории относительности.

Разумеется, можно избрать и другую физическую основу для арифметизации событий, подобно тому как можно выбрать различные единицы мер. При этом мы пришли бы к другой геометрии и к другому способу описания физических явлений [4].

Фундаментальное преимущество метода, лежащего в основе теории относительности Эйнштейна, заключается в том, что именно при использовании этого метода арифметизации событий выявляется инвариантность основных законов физики. Закон, выражаемый соотношением

$$F(A, B, x, \dots) = 0, \quad (1.3)$$

в системе отсчета  $\Sigma$  выражается в системе  $\bar{\Sigma}$  соотношением

$$F(\bar{A}, \bar{B}, \bar{x}, \dots) = 0, \quad (1.3')$$

где  $\bar{A}, \bar{B}, \dots$  — скаляры, спиноры, векторы или тензоры.

Поэтому не всякий способ арифметизации событий приемлем. Способ арифметизации должен быть, во-первых, физически осуществимым (хотя бы

<sup>1</sup> В принципе в качестве таких часов могут служить «световые» часы, представляющие собой световой импульс, периодически отражающийся между двумя близко расположенными зеркалами. Тогда допущение б) эквивалентно допущению существования неизменного стандарта длины — расстояния между зеркалами. В настоящее время в качестве такого стандарта принята длина волны одной из линий криптона. Подробности о выборе часов см. в диссертации Р. Марцке и Д. Уилера [7]. См. также [8].

в идеальном эксперименте) и, во-вторых, максимально универсальным; последнее означает, что он должен опираться на определенный круг явлений, который является наиболее объемлющим<sup>1</sup>.

В классической физике понятию точечного события  $\mathcal{P}(x)$  соответствует понятие материальной точки — объекта конечной массы  $m_0 \neq 0$  и неограниченно малых размеров  $a \rightarrow 0$ .

В силу предполагаемой непрерывности пространства в каждой его точке можно построить пространство касательных векторов — бесконечно малых смещений и ковариантное пространство импульсов  $R_4(p)$ . Метрика этого пространства также неопределенна и имеет вид<sup>2</sup>

$$dp^2 = dp_4^2 - d\mathbf{p}^2 \quad (1.4)$$

(где  $d\mathbf{p}^2 = dp_1^2 + dp_2^2 + dp_3^2$ ), который определяется метрикой, принятой в пространстве  $R_4(x)$ . Таким образом, структуры пространства  $R_4(x)$  и  $R_4(p)$  не независимы. Движение свободной материальной точки в пространстве  $R_4(x)$  происходит по прямой и изображается точкой в пространстве  $R_4(p)$ .

Противоречий между эйнштейновским способом арифметизации и механикой материальных точек в рамках специальной теории относительности не существует. Поэтому материальные точки в специальной теории относительности могут рассматриваться как объекты, физически реализующие точечное событие  $\mathcal{P}(x)$ .

Возможные ограничения приходят, по-видимому, со стороны гравитации. Действительно, будем рассматривать материальную точку как материальную частицу конечных размеров  $a$ . Пусть  $m_0$  — ее масса покоя. Тогда, если гравитационный радиус этой частицы

$$a_g = 2km_0/c^2 \quad (1.5)$$

(здесь  $k = 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{с}^2)$  — гравитационная постоянная Ньютона) больше ее размера  $a$ , то метрические соотношения «внутри» частицы существенно меняются. Метрика становится нестационарной, и наступает явление коллапса [9, 10]. При этом ни один сигнал из области  $r < a_g$  не может достигнуть внешнего наблюдателя, и, следовательно, он не может получить никакой информации об упорядочении событий внутри коллапсирующей частицы. Из (1.5) видно, что целесообразно иметь в качестве объектов, маркирующих

<sup>1</sup> Так, например, соглашение, в основу которого была бы положена скорость звука  $u$  вместо скорости света  $c$ , внесло бы в рассмотрение всех физических явлений весьма превратные особенности звуковых явлений. Подобным же образом измерение длин с помощью пружинного динамометра внесло бы в рассмотрение всех явлений крайне специальные свойства пружины [4, 6]. По этой же причине выбор системы координат, в принципе произвольный, на самом деле должен наилучшим образом соответствовать характеру изучаемой проблемы, чтобы не запутать существо явлений.

<sup>2</sup> Здесь и в дальнейшем  $p_1, p_2, p_3$  и  $p_4$  действительны, также считаются действительными  $x^1, x^2, x^3, x^4$ .

точки пространства-времени, материальные частицы с наименьшей массой ( $m_0 \rightarrow 0$ ). Однако при  $a \rightarrow a_g$  возникает критическая плотность

$$\rho_g = \frac{3}{4\pi} \left( \frac{c^2}{2k} \right)^3 \frac{1}{m_0^2}. \quad (1.6)$$

Эта плотность при  $m_0 \rightarrow 0$  может перешагнуть пределы, известные из физики элементарных частиц.

В этой связи возникает любопытный вопрос: не может ли метод арифметизации событий, принятый в теории относительности, потерять свою силу ранее, чем достигается условие  $\rho = \rho_g$ . В самом деле, если при некоторой плотности материи  $\rho < \rho_g$  ни один световой сигнал и даже нейтринный сигнал не может распространяться в среде в силу исключительно сильной экстинкции, упорядочение событий в такой среде с помощью световых или нейтринных волн становится невозможным. В этих условиях звуковой сигнал может оказаться более подходящим средством для упорядочения событий. Скорость такого сигнала  $v$  может быть и больше скорости света в пустоте  $c$ , тем не менее никакого противоречия с принципом причинности не возникает, так как  $v$ -сигнал, а не  $c$ -сигнал применяется для упорядочения событий.

Другого рода ограничения для применимости стандартного метода упорядочения событий — результат действия стохастических гравитационных полей; они рассмотрены далее.

## 2. Точечное событие в микромире

В основе современной квантовой теории поля, с помощью которой описывается поведение элементарных частиц, лежит условие локальности:

$$[\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(y)] = D(x - y); \quad (2.1)$$

$$D(x - y) = 0 \quad \text{для} \quad (x - y)^2 < 0. \quad (2.1')$$

Здесь  $\hat{\varphi}(x)$  — оператор поля, взятый в точке  $x$ ;  $\hat{\varphi}(y)$  — оператор того же поля, взятый в точке  $y$ ;  $[A, B]$  означает коммутатор операторов  $A$  и  $B$ <sup>1</sup>. Условие (2.1) есть выражение принципа причинности и означает независимость полей, если точки  $x$  и  $y$  разделены пространственноподобным интервалом  $(x - y)^2 < 0$ . Иными словами, произвольная вариация поля в точке  $x$  не может влиять на поле в точке  $y$ , поскольку сигнал, идущий со скоростью  $v \leq c$  не может в этом случае достигнуть точки  $y$  (и обратно).

В условии локальности (2.1) координаты точек  $x, y$  предполагаются определенными неограниченно точно. Такое предположение равнозначно допущению о существовании точечных событий  $\mathcal{P}(x)$ ,  $\mathcal{P}(y)$ , и нам предстоит исследовать, насколько непротиворечиво это предположение в рамках той же локальной теории.

<sup>1</sup> Или антикоммутатор, если поле спинорное. Мы выписали явно условие для скалярного поля  $\varphi(x)$ .

Естественными кандидатами на роль представителей точечных событий являются сами элементарные частицы — аналоги материальных точек классической физики. Однако эта аналогия оказывается не очень далеко идущей из-за ряда особенностей, продиктованных законами квантовой физики.

Во-первых, все частицы с массой покоя  $m_0 = 0$  должны быть исключены из аналогии, так как они нелокализуемы в пространстве  $R_4(x)$ . Они могут быть локализованы лишь в касательном пространстве  $R_4(p)$ . Но и частицы с массой покоя  $m_0 \neq 0$  доставляют затруднения. Бозоны с массой покоя  $m_0 \neq 0$  не могут быть локализованы в пространстве  $R_4(x)$  точнее, чем в пределах  $\Delta(x) \approx \hbar/m_0c$ .

Действительно, подчиняющаяся закону сохранения плотность  $\rho(t, \mathbf{x})$  мезонного поля  $\varphi(t, \mathbf{x})$  при  $t = 0$  определяется формулой

$$\rho(0, \mathbf{x}) = \varphi^*(0, \mathbf{x}) \hat{\Omega} \varphi(0, \mathbf{x}), \quad (2.2)$$

где  $\hat{\Omega} = \sqrt{m_0^2 - \nabla^2}$  — оператор частоты,  $\nabla$  — оператор градиента. Она положительно-дефинитна лишь в области  $|\nabla| < m_0$ , т. е. в нерелятивистской области. В этом случае

$$\rho(0, \mathbf{x}) \approx |\varphi(0, \mathbf{x})|^2 \geq 0 \quad (2.3)$$

и может быть истолкована как плотность вероятности нахождения бозона в точке  $\mathbf{x}$  в момент времени  $t = 0$ . Однако при  $|\nabla| \ll m$  плотность  $\rho(0, \mathbf{x})$  распределена в пространстве в области  $|\Delta \mathbf{x}| \gg \hbar/m_0c$ .

Для спинорных частиц, подчиняющихся уравнению Дирака, существует положительно-дефинитная плотность вероятности:

$$\rho(0, \mathbf{x}) = \bar{\psi}(0, \mathbf{x}) \psi(0, \mathbf{x}) \geq 0, \quad (2.4)$$

где  $\psi(0, \mathbf{x})$  — волновая функция для одночастичного состояния. Существует мнение, что для одночастичного состояния  $\Delta x^2 > [\hbar/(m_0c)]^2$ . На самом деле для одночастичного состояния имеет место обычное соотношение неопределенностей  $\Delta x^2 > (\hbar^2/4) \Delta p^2$  [6, 11]. Однако необходимо учесть обмен состояниями между рассматриваемой частицей и частицами вакуума. Такой обмен в силу принципа Паули приводит к поляризации вакуума в области порядка  $\hbar/(m_0c)$  [12]. По этой причине положение исходной частицы становится неопределенным в той же области.

Следует также иметь в виду, что и создание волнового пакета размером  $\Delta x \lesssim \hbar/(m_0c)$  с помощью внешнего поля даже при адиабатическом его включении приведет к рождению пар частиц, так что реализовать одночастичное состояние со столь узким распределением невозможно<sup>1</sup>. Поэтому точная локализация спинорных частиц оказывается также иллюзорной. Мы видим, что в микромире нет объектов, которые могли бы быть моделью точечного

<sup>1</sup> Например, в компаунд-ядре, образующемся при сближении двух ядер с зарядами  $Z_1, Z_2$  при условии  $Z_1 + Z_2 > 137$ , возникает электронная орбита с радиусом  $a_0 \approx \hbar/(mc)$ . Однако при этом будут адиабатически рождаться пары  $e^+, e^-$  (явление неодноточечное) [13].

события  $\mathcal{P}(x)$ , так как элементарные частицы не могут быть локализованы с точностью, большей<sup>1</sup>

$$\Delta x > \hbar/(mc). \quad (2.5)$$

В классической физике материальные точки можно рассматривать не только как реализацию точечного события, но их можно выбрать и в качестве тела отсчета (Bezugskörper), которым фиксируется система отсчета. В мире элементарных частиц это оказывается невозможным.

Если в качестве тела отсчета взять элементарную частицу с массой покоя  $m_0$ , то в преобразовании Лоренца (1.2)  $u$  — 4-скорость частицы ( $u = p/(mc)$ ,  $p$  — импульс частицы), а пространственные компоненты сдвига  $a^1 a^2 a^3$  — ее координаты в момент времени  $t = 0$ .

Из коммутационных соотношений

$$[\hat{p}_i, \hat{a}_k] = i\hbar\delta_{ik} \quad (2.6)$$

следует, что параметры преобразования (1.2) становятся операторами. Поэтому становятся операторами и координаты ( $\bar{x}$ ), отсчитываемые относительно такого тела отсчета. В частности, из (1.2) и (2.6) нетрудно вычислить коммутатор  $\bar{x}$  и  $\bar{t}$ :

$$[\bar{x}, \bar{t}] = \frac{i\hbar}{m_0 c} (x - vt), \quad (2.7)$$

где  $v$  — оператор трехмерной скорости частицы.

Таким образом, элементарные частицы конечной массы не могут быть использованы ни в качестве объектов, с помощью которых отмечаются точки в пространстве  $R_4(x)$ , ни в качестве тел отсчета.

С другой стороны, экспериментальные факты указывают на то, что предсказания локальной теории поля, основанной на условии микропричинности (2.1), соблюдаются до масштабов порядка  $10^{-15}$  см [17]. Поэтому следует предполагать, что существуют элементарные частицы, с массой существенно более тяжелой, чем масса нуклона  $m_p$ , для которого

$$\Delta x \approx \hbar/(m_0 c) = 2 \cdot 10^{-14} \text{ см.}$$

Из предыдущего следует, что локальная теория неявно предполагает существование сколь угодно тяжелых элементарных частиц ( $m_0 \rightarrow \infty$ ). В этом предположении противоречие между использованием понятия угодно точных координат точки в пространстве  $R_4(x)$  и отсутствием объектов, пригодных для роли точечных событий, было бы снято. Ограничение масс частиц сверху некоторым пределом, «максимомом»<sup>2</sup>  $m_0 = M$ , означало бы принципиальное ограничение применимости локальной теории для масштабов порядка  $\Delta x \sim \hbar/(Mc)$ .

<sup>1</sup> На возможное принципиальное значение такой неточности обращалось внимание еще на первых порах развития квантовой теории поля [14–16].

<sup>2</sup> Термин «максимон» введен М. А. Марковым. Его соображения изложены в работах [18, 19].



Требования идеального эксперимента по маркировке точки пространства-времени в классической и квантовой физике оказываются прямо противоположными. В последующем будут рассмотрены возможные причины для существования верхнего предела массы элементарной частицы.

### 3. Максимоны

Рассмотрим теперь элементарную частицу, имеющую массу  $m$ . Эффективный размер такой частицы  $a \sim \hbar/(mc)$ , а ее гравитационный радиус  $a_g = 2km/c^2$ .

Критическая ситуация возникает, когда эффективный размер частицы оказывается равным ее гравитационному радиусу — это условие наступления коллапса. Из этого условия получаем<sup>1</sup>

$$m = M_g \approx \sqrt{\hbar c / (8\pi k)} = 0,52 \cdot 10^{-5} \text{ г.} \quad (3.1)$$

Соответствующая комптоновская длина волны

$$\Lambda_g = \hbar / (M_g c) = 0,82 \cdot 10^{-32} \text{ см.} \quad (3.2)$$

Такая частица действительно является частицей предельно большой массы, так как при сближении с ней другой частицы массы  $m$  дефект масс  $\Delta m$ , вызванный гравитационным взаимодействием, по порядку величины равен добавляемой массе  $m$ . Действительно,

$$\Delta m = -(1/c^2)k(M_g/\Lambda_g)m \approx -m, \quad (3.3)$$

так что эта масса частицы  $M_g$  не может быть увеличена добавлением любой другой массы. Частицу с массой  $m = M_g$  будем называть гравитационным максимоном. Если эти качественные соображения подтвердятся, то масса  $M_g$  будет служить верхней границей для массы элементарных частиц и нижней границей для массы классических материальных точек.

Другое ограничение на массу элементарных частиц может возникнуть из-за слабых взаимодействий. В работе [20]<sup>2</sup> показано, что слабое взаимодействие может стать сильным с ростом энергии взаимодействующих частиц. При этом понятие «сильное» взаимодействие понималось в смысле критерия, приведенного в работе [20]. Согласно этому критерию, взаимодействие сильное, если в процессе столкновения плотность энергии взаимодействия  $w$  много больше плотности кинетической энергии<sup>3</sup>  $\epsilon$ :

$$|w| \gg \epsilon. \quad (3.4)$$

<sup>1</sup> Множитель  $1/4\pi$  введен из соображений удобства вычисления.

<sup>2</sup> Более точное изложение см. в работе [21].

<sup>3</sup> Применение этого критерия к взаимодействию адронов приводит к заключению, что их взаимодействие при всех энергиях оказывается сильным в соответствии с обычной терминологией. Электромагнитное взаимодействие оказывается по этому критерию всегда слабым. Слабое же взаимодействие (контактное четырехфермионное взаимодействие) согласно критерию (3.4) становится сильным при энергии частицы порядка 300 ГэВ в системе центра масс.

Из подобного критерия следует, что слабое взаимодействие может стать сильным вблизи энергии так называемого унитарного предела, т. е. при

$$W = \hbar c / \Lambda_F \approx 300 \text{ ГэВ},$$

где характерная для слабых взаимодействий длина

$$\Lambda_F = \sqrt{G_F / (\hbar c)} = 0,66 \cdot 10^{-16} \text{ см.} \quad (3.5)$$

Здесь  $G_F$  — константа слабого взаимодействия, введенная Ферми.

Рассмотрим теперь распад тяжелого адрона массы  $M$ , обусловленный слабым взаимодействием:

$$M \rightarrow m + l + \tilde{\nu}.$$

Здесь  $m$  — масса нуклона,  $l$  — лептон,  $\tilde{\nu}$  — антинейтрино. Константа распада  $\Gamma$  для процесса указанного типа при  $M \gg m$  равна [22]:

$$\Gamma / M = (1/4\pi^3) G_F^2 M^4 N, \quad (3.6)$$

где  $G_F = g_F / (\hbar c) 10^{-5} m_p^{-2}$ ,  $m_p$  — масса протона,  $N$  — число каналов различных распадов, которое может быть немалым. Из этой формулы видно, что при массе адрона

$$M > M_F = \hbar / (\Lambda_F c) \quad (3.7)$$

константа распада  $\Gamma$  становится сравнимой с массой адрона и адрон перестает существовать как элементарная частица, поскольку ему нельзя приписать никакой определенной массы. Условную частицу с массой  $M_F$  целесообразно назвать слабым максимоном. Это ограничение на массу частиц, как видно из (3.7) и (3.2), наступает раньше ограничения, диктуемого гравитацией, так как  $M_F \ll M_g$ . Вместе с тем предполагаемое ограничение локальной теории в этом случае должно наступать существенно раньше, чем это вытекает из предположения о существовании гравитационного максимона  $M_g$ . Как было указано выше, любое ограничение на массу элементарных частиц нарушает логическую структуру локальной теории поля.

Если не допускать существования микрочастиц с массой большей некоторой массы  $M$ , то возникает ограничение на точность  $\Delta x$  определения координат точечного события  $\mathcal{P}(x)$  ( $\Delta x \approx \hbar / (Mc)$ ).

Кажется обязательным, что такое ограничение должно быть заложено в самих основах теории, в том смысле, что подобная нелокальная теория не должна оперировать с точно определенными координатами  $x$  точечных событий  $\mathcal{P}(x)$ .

Возможной реализацией такого рода идей может служить стохастическое пространство — пространство, в котором точечным событиям  $\mathcal{P}$  не предписывается определенных координат  $x$ .

## 4. Стохастическое пространство

В этом разделе мы обратимся к теории стохастических пространств. Рассмотрим множество элементов  $\mathfrak{M}$ , арифметизированное с помощью признака элемента  $\xi$  и координат этого элемента  $x$ .

Допустим, что отображение признаков  $\xi$  на координаты  $x$  содержит параметр  $\zeta$ , принимающий случайные значения [23, 24]

$$x = X(\xi|\hat{\zeta}). \quad (4.1)$$

Предполагаем, что распределение возможных значений параметра  $\zeta$  дается нормированной вероятностью

$$dW(\zeta) \geq 0; \quad \int dW(\zeta) = 1. \quad (4.2)$$

Поэтому среднее по области случайных параметров  $\zeta$ , которые будем обозначать знаком  $\langle \dots \rangle$ , можно определить по формуле

$$\bar{x} = \langle x \rangle = \langle X(\xi|\hat{\zeta}) \rangle = \int X(\xi|\hat{\zeta}) dW(\zeta). \quad (4.3)$$

Пространство  $R_4(x)$  переменных  $x$ , определенное формулами (4.1)–(4.3), будем называть стохастическим пространством<sup>1</sup>. Для дальнейшего заметим, что, если в некоторой области переменных  $\xi$  преобразование (4.1) не зависит от случайных параметров  $\zeta$ , то эту область будем называть реперной областью  $g(\xi)$ . Пространство признаков  $R_n(\xi)$  может быть многомерным ( $n$  — число измерений). Соответствующее число измерений имеет и пространство координат  $R_n(x)$ . Под параметром  $\hat{\zeta}$  можно подразумевать несколько случайных величин  $\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2, \dots, \hat{\zeta}_N$  или даже бесконечную их последовательность ( $N \rightarrow \infty$ ), или функцию  $\{\zeta\}$ .

Ясно, что (4.1) есть отображение пространства признаков  $R_n(\xi)$  на другое координатное пространство, содержащее случайные параметры. Дальнейшие ограничения на это отображение связаны с его непрерывностью и взаимной однозначностью.

Будем предполагать дифференцируемость соотношения (4.1) и выполнение условия

$$\text{Det}(\partial X_\alpha / \partial \xi_\beta) \neq 0, \quad (4.4)$$

т. е. разрешимость (4.1), относительно переменных  $\xi$ :

$$\xi = \xi(x, \hat{\zeta}). \quad (4.5)$$

Важный случай стохастического пространства реализуется тогда, когда отклонения координат  $x$  от их среднего значения  $\bar{x}$  (4.3) невелики.

<sup>1</sup> Значок  $\hat{\phantom{x}}$  указывает на стохастический характер величины, например,  $\zeta$ ; он ставится также для обозначения квантовых операторов.

В этом случае удобно записать (4.1) в виде

$$x = \bar{x} + \Delta x(\xi, \hat{\zeta}), \quad (4.6)$$

Используя (4.6) и (4.5), получим

$$x = \bar{x} + \Delta x(\bar{x}, \hat{\zeta}).$$

Это соотношение представляет собою отображение истинной координаты  $x$  на пространство ее средних значений  $R_4(x)$ . Ясно, что сами признаки  $\xi$  можно рассматривать как координаты элементов исходного множества  $\mathcal{M}$ , взятых в пространстве признаков  $R_n(\xi)$ , а соотношение (4.1) — как преобразование от одной координатной системы  $(\xi)$  к другой  $(x)$ .

Вводя термин «пространство признаков», мы имеем в виду интересы физики. С точки зрения физики, важно подчеркнуть ту систему признаков реальных объектов, которая избирается для сопоставления точек материального физического пространства точкам пространства геометрического [4–6].

Для пояснения этой мысли приведем два примера арифметизации. Пусть имеем двухмерное многообразие, представляющее собой непрерывное распределение материи синего и желтого цвета. Пусть концентрация первого цвета есть  $\xi_1$ , а концентрация второго —  $\xi_2$ ; измеряя в некоторой точке эти концентрации, допускаем неточности  $\hat{\xi}_1$  и  $\hat{\xi}_2$ . Далее каждой точке в соответствии с ее цветом приписываем координаты  $x_1$  и  $x_2$  согласно формуле

$$x_s = X_s(\xi_1 + \hat{\xi}_1, \xi_2 + \hat{\xi}_2). \quad (4.6')$$

Пространство  $R_2(x)$  будет стохастическим пространством, так как координаты точек в нем зависят от случайных параметров  $\hat{\xi}_1$  и  $\hat{\xi}_2$ .

В описанном в разд. 1 методе арифметизации событий физическими объектами являются материальные точки, способные отражать свет. По самому своему смыслу эти точки образуют счетное множество, а их траектории — счетное множество одномерных непрерывных множеств (кривых линий). Их признаки — это номера, возникающие при перечислении (например, номера звезд и туманностей в звездном каталоге). Координаты таких точек в пространстве  $R_4(x)$  определяются с помощью часов и светового импульса (локация).

Особенность этого важного случая заключается в том, что сопоставление физического пространства геометрическому (предписывание определенных координат материальной точке) предполагает выбор не только системы координат, но и выбор матриц (по крайней мере в некоторый начальный момент времени)<sup>1</sup>. Естественно, что координаты частиц  $x$  определяются лишь с некоторой точностью  $\Delta \bar{x}$ , среднее же значение координат определено<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Действительно, для предсказания движения частиц необходимо знать их начальные координаты  $q_0$  (и импульсы  $p_0$ ). Координаты  $q_0$  не имеют никакого смысла, пока не указан физический способ их измерения. Измерение предполагает известную метрику.

<sup>2</sup> Т.е. подразумевается некоторый ансамбль ситуаций, в котором производятся измерения переменной  $x$ .

Тогда возникает стохастическое пространство  $R_4(x)$ , причем координаты  $x$  связаны с  $\bar{x}$  формулой вида (4.6).

Обратимся теперь к метрике стохастического пространства. В соответствии с отображением (4.1) целесообразно предположить метрику в пространстве  $R_4(\xi)$ :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(\xi) d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad (4.7)$$

где  $ds$  — интервал между бесконечно близкими событиями, а  $g_{\alpha\beta}(\xi)$  — метрический тензор. Пользуясь (4.5), получаем метрику в пространстве  $R_4(x)$ :

$$ds^2 = G_{\mu\nu}(x, \hat{\zeta}) dx^\mu dx^\nu, \quad (4.8)$$

где тензор

$$G_{\mu\nu}(x, \hat{\zeta}) = g_{\alpha\beta}(\xi) (\partial\xi^\alpha / \partial x^\mu) (\partial\xi^\beta / \partial x^\nu) \quad (4.9)$$

и  $\xi$  выражено через  $x$  и  $\hat{\zeta}$  с помощью (4.5).

Таким образом, в пространстве  $R_4(x)$  возникает стохастическая метрика, так как тензор  $G_{\mu\nu}(x, \hat{\zeta})$  зависит от случайных параметров  $\hat{\zeta}$ .

Метрические пространства со случайной стохастической метрикой с чисто математической точки зрения первоначально изучались в работах [25, 26]<sup>1</sup>. Однако эти исследования относятся к случаю евклидовой метрики, имеющей положительно-дефинитную метрическую форму. Для целей физики более важно псевдоевклидово пространство Минковского. Недефинитность метрики этого пространства приводит к ряду специфических проблем, которые не встречаются в случае евклидова пространства.

Эти специфические для физического пространства трудности связаны с требованиями, предъявляемыми к инвариантности и к нормировке вероятности того или иного значения интервала в недефинитном пространстве [6]. Они не замедлили обнаружиться в работах физиков, которые в неявной форме использовали понятия, относящиеся к стохастической геометрии<sup>2</sup>. Поэтому в отличие от пути, избранного в работах [25–28], здесь мы исходили не из метрического пространства, а рассматривали стохастичность пространства как некоторое соотношение двух пространств. Метрика вводится позднее. Этот путь имеет еще и то обоснование, что в физике стохастичность появляется более естественно на стадии арифметизации, чем на стадии метрической.

Упомянутые выше трудности относительно нормировок в четырехмерном пространстве мы избегаем таким путем, что стохастические свойства пространства вводятся явно посредством случайных параметров  $\xi$ , физический смысл которых может быть весьма различен. По отношению к этим параметрам требования инвариантности и нормировки  $dW(\zeta)$  являются уже частным делом.

Из условий, наложенных на преобразование (4.1), следует, что если метрика (4.7) имеет правильную сигнатуру, т. е. при приведении к диагональному виду имеет сигнатуру  $+- --$ , то и метрика (4.8) такова, что метрический

<sup>1</sup> Подробные ссылки на литературу приведены в [27].

<sup>2</sup> Стохастическое пространство применительно к физике элементарных частиц впервые рассматривалось в работе [29]. См. также работы [30, 31] и особенно [32].

тензор  $G_{\mu\nu}$  согласуется с физическими требованиями теории относительности.

Заметим, что если исходить из специального случая стохастического пространства, определенного отношением (4.6), то «правильная» метрика в пространстве  $R_4(x)$  ведет к «правильной» же метрике в пространстве  $R_4(x)$ .

Однако если величина  $\Delta x(x, \hat{\zeta})$  во всей области переменных  $\hat{x}$  и  $\hat{\zeta}$  в некотором смысле мала, например  $|\Delta x| < \varepsilon$ , то требование «правильности» метрики в  $R_4(x)$  можно опустить. Однако это означало бы уже выход за рамки современных представлений о пространстве и времени.

## 5. Стохастические пространства, возникающие при взаимодействии полей

При приближенном решении уравнений для взаимодействующих полей в некоторых случаях возникают стохастические пространства. В качестве примера рассмотрим скалярное поле в пространстве  $R_4(x)$ , подчиняющееся уравнению

$$\square\Phi - M^2\Phi = g\hat{\varphi}_\alpha(\partial\Phi/\partial x^\alpha), \quad (5.1)$$

где  $\hat{\varphi}_\alpha(x)$  — некоторое случайное векторное поле;  $g$  — константа взаимодействия;  $M$  — параметр массы частиц. Будем искать решения этого уравнения, близкие к плоской волне:

$$\Phi = A \exp(iS/\hbar) \quad (5.2)$$

при  $\hbar \rightarrow 0$ . Здесь  $A \approx \text{const}$ ;  $S$  — фаза волны, которую представим в виде

$$S = px + \hat{\sigma}(x), \quad (5.3)$$

где  $p$  — импульс волны;  $\hat{\sigma}$  — поправка к фазе. Подставляя (5.2) и (5.3) в (5.1), при  $\hbar \rightarrow 0$  и малой  $g$  получим уравнение для фазы  $\hat{\sigma}(x)$  [33, 34]:

$$d\hat{\sigma}/d\tau + (g/M)p^\alpha \hat{\varphi}_\alpha = 0, \quad (5.4)$$

где  $\tau = nx$  — собственное время волны;  $n$  — единичный вектор, параллельный импульсу  $p$ . Из уравнения (5.4) следует

$$\hat{\sigma}(x) = -p^\alpha \frac{g}{M} \int_{\tau}^{\tau} \hat{\varphi}_\alpha(\tau', x_\perp) d\tau', \quad (5.5)$$

где  $x_\perp = x - n(xn)$ . Используя формулы (5.3) и (5.5), фазу  $S$  можно представить в виде

$$S = p\xi \equiv p_\alpha \xi^\alpha, \quad (5.6)$$

причем

$$\xi^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(x, \{\hat{\varphi}\}) \quad (5.7)$$

и

$$\xi^\alpha(x, \{\hat{\varphi}\}) = -\frac{g}{M} \int_{\tau}^{\tau} \hat{\varphi}_\alpha(\tau', x_\perp) d\tau'. \quad (5.8)$$

Преобразование (5.7) есть преобразование к стохастическому пространству  $R_4(\xi)$ , в котором волна (5.2) подчиняется простому уравнению Даламбера:

$$\square_{\xi}^2 \Phi - M^2 \Phi = 0. \quad (5.9)$$

Очевидно, что реперной областью для этого пространства будет область  $g(x)$ , где поле  $\hat{\varphi}(x) = 0$ .

Подобный пример можно распространить на спинорное поле  $\psi(x)$ , взаимодействующее со случайным векторным полем  $\hat{\varphi}_{\alpha}$ . Пусть поле  $\psi(x)$  подчиняется уравнению

$$(D - ig\varphi - M)\psi = 0, \quad (5.10)$$

где  $D = \gamma^{\mu}(\partial/\partial x^{\mu})$ ;  $\varphi = \gamma^{\mu}\hat{\varphi}_{\mu}$ ;  $g$  — заряд;  $M$  — масса. Будем искать решение в виде

$$\psi = (D - ig\varphi + M)\Phi, \quad (5.11)$$

так что

$$\Phi = u_p \exp(iS/\hbar), \quad (5.12)$$

где  $u_p$  — постоянный спинор, а фазу  $S$  опять возьмем в виде (5.3). Нетрудно убедиться, что при  $\hbar \rightarrow 0$  случайная фаза  $\hat{\sigma}$  удовлетворяет уравнению (5.4), а функция  $\Phi$ , взятая в пространстве  $R_4(\xi)$ , — уравнению (5.9) [17]. При этом любопытно, что в специальном случае электромагнитного поля  $\varphi_{\alpha} = A_{\alpha}$ ,  $g = e$  среднее квадратическое отклонение

$$\sum_{\alpha=1}^3 \overline{(\xi^{\alpha} - x^{\alpha})^2} = \overline{\Delta \xi^2} \quad (5.13)$$

совпадает с величиной, определяющей лэмбовский сдвиг  $\Delta E_n$  электронных уровней в атоме:

$$\Delta E_n \simeq \frac{1}{6} \int \psi_n^*(x) \nabla^2 U \overline{\Delta \xi^2} \psi_n(x) d^3x, \quad (5.14)$$

где  $\psi_n(x)$  — волновая функция электрона в атоме;  $U$  — его потенциальная энергия.

## 6. Стохастические пространства и существенно-нелинейные поля

Существенно нелинейным полем называют поле, скорость распространения которого зависит от величины самого поля и его производных. Примером таких полей в пространстве  $R_4(x)$  являются поля типа Борна-Инфельда, уравнения для которых выводятся из вариационного принципа:

$$\delta S = 0, \quad S = \int L \sqrt{-G} d\Omega, \quad (6.1)$$

где  $G$  — детерминант метрического тензора  $g_{\mu\nu}$ ;  $\sqrt{-G} d\Omega$  инвариантный элемент объема в  $R_4(x)$ ;  $L$  — плотность лагранжиана, которая предполагается функцией инвариантов  $K$  и  $I$ . Для скалярного поля  $\varphi$

$$L = L(K, I); \quad K = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \varphi_{\mu} \varphi_{\nu}; \quad I = \frac{1}{2} \varphi^2. \quad (6.2)$$

Здесь  $\varphi_\mu = \partial\varphi/\partial x^\mu$ . В случае спинорного поля  $\psi(x)$

$$K = \frac{1}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\varphi_\mu - \psi_\mu\gamma^\mu\bar{\psi}), \quad (6.3)$$

$$I = \frac{1}{2}\bar{\psi}\psi, \quad (6.3')$$

где  $\psi_\mu = \partial\psi/\partial x^\mu$ ;  $\gamma^\mu$  — матрицы Дирака (заметим, что в (6.3) и (6.3') эти инварианты выписаны явно для случая плоского пространства). Из вариационного принципа (6.1) следует уравнение поля

$$-\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[ \frac{\partial(L\sqrt{-G})}{\partial\varphi_\mu} \right] + \frac{\partial(L\sqrt{-G})}{\partial\varphi} = 0, \quad (6.4)$$

или в раскрытом виде

$$-\frac{\partial^2(L\sqrt{-G})}{\partial\varphi_\mu\partial\varphi_\nu}\varphi_{\mu\nu} + \frac{\partial(L\sqrt{-G})}{\partial\varphi} - \frac{\partial^2(L\sqrt{-G})}{\partial\varphi_\mu\partial\varphi}\varphi_\mu = 0, \quad (6.4')$$

где  $\varphi_{\mu\nu} = \partial^2\varphi/(\partial x^\mu\partial x^\nu)$ .

Подобным же образом для спинорного поля получим

$$-\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \frac{\partial(L\sqrt{-G})}{\partial\bar{\psi}_\mu} \right] + \frac{\partial(L\sqrt{-G})}{\partial\bar{\psi}} = 0, \quad (6.5)$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2(L\sqrt{-G})}{\partial\bar{\psi}_\mu\partial\bar{\psi}_\nu}\bar{\psi}_{\mu\nu} + \frac{\partial^2(L\sqrt{-G})}{\partial\bar{\psi}_\mu\partial\psi_\nu}\psi_{\mu\nu} - \\ & - \frac{\partial(L\sqrt{-G})}{\partial\bar{\psi}} + \frac{\partial^2(L\sqrt{-G})}{\partial\bar{\psi}_\mu\partial\bar{\psi}}\bar{\psi}_\mu + \frac{\partial^2(L\sqrt{-G})}{\partial\bar{\psi}_\mu\partial\psi}\psi_\mu = 0, \end{aligned} \quad (6.5')$$

и аналогичное сопряженное уравнение.

В отличие от уравнения Дирака уравнение (6.5') для спинорного поля является уравнением второго порядка. Нетрудно показать, что сохраняющийся ток

$$I^\mu = (\partial L/\partial K)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (6.6)$$

Уравнения типа (6.4') и (6.5') имеют переменные коэффициенты при высших производных, зависящие от поля и его первых производных. Поэтому характеристический конус, определяющий направления распространения сигналов (слабых разрывов), оказывается искривленным [6, 7]. При этом в некоторых случаях скорость сигнала может оказаться больше скорости света в пустоте. В работах [37–39] внимание обращено на целесообразность переопределения метрики пространства-времени в случае нелинейных полей. Это переопределение, в частности, позволяет избежать противоречия, возникающего в случае «сверхсветовых» сигналов. Внутренне согласованное переопределение



метрики было предложено в работе [40]. Пусть метрика задана квадратичной формой

$$ds^2 = G_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (6.7)$$

причем метрический тензор  $G_{\mu\nu}$  зависит теперь от поля  $\varphi$  и его производных  $\varphi_\mu$ . Соответствующее пространство обозначим  $R_4(\xi)$ . В этом пространстве волновое уравнение Даламбера записывается следующим образом:

$$-\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \sqrt{-G} G^{\mu\nu} \varphi_\nu \right] + \frac{\partial(L\sqrt{-G})}{\partial\varphi} = 0. \quad (6.8)$$

С другой стороны, из вариационного принципа (1) следует уравнение поля

$$-\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \frac{\partial(L\sqrt{-G})}{\partial\varphi_\mu} \right] + \frac{\partial(L\sqrt{-G})}{\partial\varphi} = 0, \quad (6.9)$$

в котором в отличие от (6.5) предполагается, что теперь тензор  $G_{\mu\nu}$  — функция  $\varphi$  и  $\varphi_\mu$ . Метрика будет согласована с характером распространения поля, если положить

$$\partial(L\sqrt{-G})/\partial\varphi_\mu = \sqrt{-G} G^{\mu\nu} \varphi_\nu \quad (6.10)$$

[40]. Таким образом нелинейное поле индуцирует в пространстве свою метрику. Если начальные данные для полей заданы стохастически, то индуцируемая нелинейным полем метрика стохастическая и само пространство  $R_4(x)$  также стохастическое (это показано на простом примере в следующем разделе).

## 7. Пример стохастического пространства, основанного на нелинейном поле

Обратимся к уравнению типа (6.2), однако в двумерном пространстве  $R_2(x)$ , так что  $x \equiv (t, x)$ . Возьмем лагранжиан в форме

$$L = b^2[1 + (2/b^2)K]^{1/2} - b^2, \quad (7.1)$$

где

$$K = (1/2)(\varphi_t^2 - \varphi_x^2), \quad (7.2)$$

$b$  — масштаб нелинейности. Из этого лагранжиана вытекает уравнение

$$(1 + \varphi_x^2)\varphi_{tt} + 2\varphi_x\varphi_t\varphi_{xt} + (1 - \varphi_t^2)\varphi_{xx} = 0, \quad (7.3)$$

имеющее кривые характеристики. Решение задачи Коши для этого уравнения получено в работе [41]. При этом показано, что это решение имеет простой

вид в пространстве  $R_2(\xi; \tau)$ , точки которого связаны с точками пространства  $R_2(x)$  преобразованиями

$$t = \tau + \frac{1}{2b^2} \int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} [H_0(\lambda) - b^2] d\lambda; \quad (7.4)$$

$$x = \xi + \frac{1}{2b^2} \int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} g_0(\lambda) d\lambda. \quad (7.5)$$

Здесь  $H$  — гамильтониан рассматриваемого поля:

$$H = (\partial L / \partial \varphi_t) \varphi_t - L, \quad (7.6)$$

а  $g$  — его импульс:

$$g = (\partial L / \partial \varphi_x) \varphi_x. \quad (7.7)$$

$H_0(\lambda)$  и  $g_0(\lambda)$  — значения этих величин на пространственной поверхности в  $R_2(\xi, \tau)$ . Эта поверхность совпадает с пространственной поверхностью (кривой) в  $R_2(x)$  при  $t = 0$ . В пространстве  $R_2(\xi)$  поле  $\varphi(\tau, \xi)$  удовлетворяет простому уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = 0 \quad (7.8)$$

и равно:

$$\varphi(\xi, \tau) = \frac{1}{2} [\varphi_0(\xi + \tau) + \varphi_0(\xi - \tau)] + \frac{1}{b^2} \int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} \Pi_0(\lambda) d\lambda, \quad (7.9)$$

где  $\Pi_0(\lambda)$  — значения импульса  $\Pi$ , канонически сопряженного полю  $\varphi$ , на поверхности  $\tau = 0$ :

$$\Pi = \partial L / \partial \varphi_t, \quad (7.10)$$

$\varphi_0(\lambda)$  — значения поля на этой же поверхности. Допустим теперь, что начальные значения  $\varphi_0$  и  $\Pi_0$  являются случайными величинами  $\varphi_0$ ,  $\Pi_0$ , задаваемыми распределением

$$dw \equiv dw \{ \widehat{\varphi}_0, \widehat{\Pi}_0 \}. \quad (7.11)$$

Тогда преобразования (7.4) и (7.5) — стохастические преобразования:

$$t = \tau + \frac{1}{2b^2} \int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} [\widehat{H}_0(\lambda) - b^2] d\lambda \equiv t(\xi, \tau \{ \widehat{\varphi}, \widehat{\Pi}_0 \}); \quad (7.12)$$

$$x = \xi + \frac{1}{2b^2} \int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} \widehat{g}_0(\lambda) d\lambda \equiv x(\xi, \tau \{ \widehat{\varphi}_0, \widehat{\Pi}_0 \}). \quad (7.13)$$

Поверхность  $\tau = 0$  в  $R_2(\xi)$  совпадает с поверхностью  $t = 0$  в  $R_2(x)$ , и поэтому эта поверхность есть реперная область. Поле  $\widehat{\varphi}(\xi, \tau)$  принимает определенные, хотя и случайные значения в пространстве  $R_2(\xi)$ . Это пространство можно назвать собственным пространством поля  $\varphi$ .

В пространстве  $R_2(x)$  ситуация является существенно новой в том отношении, что мы уже не имеем ответа на вопрос о вероятности того или иного значения поля  $\varphi(x, t)$ . Вместо этого мы вынуждены спрашивать о вероятности того, что поле  $\widehat{\varphi} = \varphi$  и одновременно  $\widehat{x} = x$ ,  $\widehat{t} = t$ . Эта вероятность равна

$$\begin{aligned} dw(\varphi, x, t) &= \int dw\{\varphi_0, \Pi_0\} \delta[t - t(\xi, \tau\{\widehat{\varphi}_0, \widehat{\Pi}_0\})] \times \\ &\times \delta[x - x(\xi, \tau\{\widehat{\varphi}_0, \widehat{\Pi}\})] \delta[\varphi - \Phi(\xi, \tau\{\widehat{\varphi}_0, \widehat{\Pi}_0\})] \equiv \\ &\equiv dw(\varphi, x, t; \xi, \tau), \end{aligned} \quad (7.14)$$

где функция  $\Phi$  определена формулой (7.9) с заменой там  $\varphi_0$  и  $\Pi_0$  случайными величинами.

Рассмотренный пример интересен тем, что он содержит обобщение понятия поля  $\varphi(x)$  в пространстве  $R_2(x)$  в том смысле, что не существует функции  $\varphi = \widehat{\varphi}(x, t)$ , а существует лишь вероятность найти три величины  $\widehat{\varphi} = \varphi$ ,  $\widehat{x} = x$ ,  $\widehat{t} = t$ , соответствующие точке  $(\xi, \tau)$  в пространстве  $R_2(\xi)$ .

## 8. Стохастическое гравитационное поле

Турбулентное движение материи порождает турбулентную или стохастическую метрику [6, 42]. В этом случае тензор энергии-импульса материи  $T_{\mu\nu}$  является случайной функцией в пространстве  $R_4(x)$ . Это обстоятельство может быть выражено явно введением стохастических параметров  $\widehat{\zeta}$ :

$$\widehat{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(x, \widehat{\zeta}). \quad (8.1)$$

В качестве таких случайных параметров могут быть взяты, например, начальные значения лагранжевых координат частиц.

Из уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = (8\pi k/c^4) T_{\mu\nu}(x, \widehat{\zeta}) \quad (8.2)$$

следует, что метрический тензор  $g_{\mu\nu}$  будет также стохастической величиной:

$$\widehat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x, \widehat{\zeta}). \quad (8.3)$$

Если флуктуации при турбулентном движении материи невелики по сравнению со средними значениями характерных величин, то тензор в (8.1) целесообразно разложить на две части:

$$T_{\mu\nu} = \overline{T}_{\mu\nu}(x) + \Phi_{\mu\nu}(x, \widehat{\zeta}), \quad (8.4)$$

где  $\bar{T}_{\mu\nu}(x)$  — значения тензора импульса-энергии:

$$\bar{T}_{\mu\nu}(x) = \int T_{\mu\nu}(x, \hat{\zeta}) dw(\hat{\zeta}). \quad (8.5)$$

Здесь  $dw(\hat{\zeta})$  — нормированная вероятность того или иного распределения случайных параметров  $\hat{\zeta}$ . Тензор определяется целиком флуктуациями движущегося вещества. Будем считать его пропорциональным некоторому малому параметру  $\varepsilon$ , определяющему амплитуду флуктуации. Подобным же образом разложим и метрический тензор (8.3):

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}(x) + h_{\mu\nu}(x, \hat{\zeta}). \quad (8.6)$$

Здесь тензор  $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$  определяется средним движением материи, а тензор  $h_{\mu\nu}(x, \hat{\zeta})$  — флуктуациями материи и считается также пропорциональным параметру  $\varepsilon$ . Приравнявая нулю коэффициенты при степенях  $\varepsilon$  в (8.2), получаем уравнения

$$\bar{R}_{\mu\nu} - (1/2)\bar{g}_{\mu\nu}R = (8\pi k/c^4)\bar{T}_{\mu\nu}(x) \quad (8.7)$$

и

$$A^{\rho\sigma}_{\mu\nu} h_{\rho\sigma} + B^{\rho\sigma\alpha}_{\mu\nu} \frac{\partial h_{\rho\sigma}}{\partial x^\alpha} + C^{\rho\sigma\alpha\beta}_{\mu\nu} \frac{\partial^2 h_{\rho\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \frac{8\pi k}{c^4} \Phi_{\mu\nu}(x, \zeta), \quad (8.8)$$

где

$$A^{\rho\sigma}_{\mu\nu} = \partial \bar{L}_{\mu\nu} / \partial \bar{g}_{\rho\sigma}, \quad B^{\rho\sigma\alpha}_{\mu\nu} = \partial \bar{L}_{\mu\nu} / [\partial (\partial \bar{g}_{\rho\sigma} / \partial x^\alpha)], \quad (8.9)$$

$$C^{\rho\sigma\alpha\beta}_{\mu\nu} = \partial \bar{L}_{\mu\nu} / \partial \left( \frac{\partial^2 \bar{g}_{\rho\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right)$$

и

$$\bar{L}_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} - (1/2)\bar{g}_{\mu\nu}R. \quad (8.10)$$

Теперь заметим, что коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  в (8.8) имеют тот же порядок величины, что и  $\bar{L}_{\mu\nu}$ , а именно

$$\bar{L}_{\mu\nu} \approx 1/l^2, \quad (8.11)$$

где  $l$  — масштаб длины, определяющий кривизну пространства, метрика которого диктуется средним движением в согласии с уравнением (8.7). С другой стороны, правая часть уравнения (8.7) имеет порядок величины:

$$\frac{8\pi k}{c^4} \bar{T}_{\mu\nu} \approx \frac{8\pi k}{c^2} \bar{\rho}, \quad (8.12)$$

где  $\bar{\rho}$  — средняя плотность материи; ее можно представить в форме  $\bar{\rho} = \mathcal{M}/a^3$ . Здесь  $\mathcal{M}$  — характерная масса, а  $a$  — характерный размер рассматриваемой системы. Тогда

$$(8\pi k \mathcal{M}/c^2)(1/a^3) = 4\pi a_g/a^3, \quad (8.13)$$

где  $a_g$  — гравитационный радиус, соответствующий массе системы  $M$ . Из (8.7), (8.11) и (8.13) следует

$$1/l^2 \approx a_g/a^3, \quad (8.14)$$

т. е. радиус кривизны равен:

$$1/l \approx (1/a)(a_g/a)^{1/2}. \quad (8.15)$$

Обратимся теперь к уравнению (8.8). Пусть масштаб длины, характеризующий градиент стохастического поля  $h$ , есть  $l'$ . Масса, характерная для масштаба флуктуации тензора  $T_{\mu\nu}(x)$ , пусть будет  $\Delta m$ , а  $b$  — длина, определяющая размер этих флуктуаций. Тогда из уравнения (8.8) следует

$$\frac{\alpha}{l^2}h + \frac{\beta}{ll'}h + \frac{\gamma}{l'^2h} \simeq \frac{4\pi b_g}{b^3}. \quad (8.16)$$

Здесь  $\alpha, \beta, \gamma$  — числа порядка единицы, а

$$b_g = 2\pi k \Delta m / c^2 \quad (8.17)$$

есть гравитационный радиус флуктуации. По смыслу величин  $l$  и  $l'$ ,  $l > l'$ . В силу линейности уравнения для тензора  $h_{\mu\nu}$  длина  $l'$  порядка  $b$ . Таким образом:

$$h \sim (l'^2/b^3)b_g = b_g/b. \quad (8.18)$$

Из (8.18) следует, что  $h$  будут малыми поправками, если мало отношение  $b_g/b$  (эту величину и можно принять в качестве упомянутого параметра  $\varepsilon$ , по которому идет разложение исходного уравнения и тензоров  $g_{\mu\nu}$  и  $T_{\mu\nu}$ ).

Если  $\varepsilon = b_g/b$  не мало, то разложение в ряд по степеням  $\varepsilon$  становится непригодным. Одновременно возникает трудность, имеющая, по всей видимости, принципиальный характер. Именно координаты точек пространства  $R_4(x)$  устанавливаются в общей теории относительности хроногеометрическими методами так, что четверки чисел  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$ , приписываемые той или иной точке, не что иное, как расстояние и промежутки времени, измеренные световым сигналом. Между тем в случае, когда флуктуации тензора  $T_{\mu\nu}$  велики, флуктуации интервала

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x, \hat{\zeta}) dx^\mu dx^\nu \quad (8.19)$$

также не малы. Если этот интервал используется для введения координатной сетки в  $R_4(x)$  (как это принято в хроногеометрии [6, 43]), то значения координат каждой физической точки могут быть приписаны лишь в вероятностном смысле.

Возникающая ситуация весьма необычна. Если к тому же отсутствует реперная область, то привычное нам понятие возможности упорядочения событий в  $R_4(x)$  теряет свой смысл.

Видимо, такая ситуация может иметь место в микромире, если роль гравитации там не исключается причинами, которые еще не изучены с полной

ясностью. Суть дела в том, что возможно вообразить такое распределение материи в микромире, которое крайне ослабляет значение гравитации по сравнению с другими взаимодействиями. Для этого достаточно, чтобы масштаб  $b$ , характеризующий градиенты полей в микромире, был бы существенно больше гравитационного радиуса  $b_g$  микроскопических скоплений материи.

С подобной же ситуацией неупорядочиваемости событий можно встретиться и в астрофизике, в среде или вблизи нее, в тех случаях, когда флуктуации плотности материи велики.

## 9. Квантовые флуктуации гравитационного поля

Флуктуации гравитационного поля, обусловленные вакуумными колебаниями материи, вычислены в работе [42]. В вакууме среднее значение тензора импульса-энергии  $\bar{T}_{\mu\nu}(x) = 0$ .

Поэтому флуктуационная часть тензора  $\Phi_{\mu\nu}$  в (8.4) совпадает с самим тензором  $T_{\mu\nu}$ . Далее средние значения компонент метрического тензора  $\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0$ , где  $g_{\mu\nu}^0$  — значения этого тензора для псевдоевклидова пространства ( $g_{00} = +1$ ,  $g_{kk} = -1$ ,  $g_{0k} = 0$ ,  $k = 1, 2, 3$ ). Уравнение (8.8) принимает простой вид:

$$(1/2)\square\psi_\nu^\mu = -(8\pi k/c^3)T_\nu^\mu, \quad (9.1)$$

где

$$\psi_\nu^\mu = h_\nu^\mu - (1/2)\delta_\nu^\mu h, \quad h = h_\sigma \quad (9.2)$$

и

$$\partial\psi_\nu^\mu/\partial x^\mu = 0. \quad (9.3)$$

Тензор  $T^{\mu\nu}$  описывает суммарные флуктуации всех полей с учетом их взаимодействия. Возможно, что этот тензор имеет более простой вид, чем частные тензоры для того или иного поля. Однако этот полный тензор нам неизвестен. Приводимые ниже вычисления для специальных случаев указывают на то, что основные выводы несущественно зависят от частного вида поля.

В случае скалярного поля  $\varphi$  лагранжиан имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \left( g^{\alpha\beta} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\beta} - m^2\varphi^2 \right) \quad (9.4)$$

и соответствующий контрвариантный тензор импульса-энергии определяется формулой

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\beta} - g^{\mu\nu} L. \quad (9.5)$$

Само поле  $\varphi$  представимо рядом:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} [\hat{a}_k \exp(ikx) + \hat{a}_k^+ \exp(-ikx)], \quad (9.6)$$

где приняты обычные обозначения:  $V$  — нормировочный объем  $V \rightarrow \infty^3$ ; вектор  $\mathbf{k}$  имеет компоненты  $k = (\omega_k, \mathbf{k})$ ,  $\omega_k = \sqrt{m^2 + k^2}$ ,  $m$  — масса частиц

поля;  $\hat{a}_k$  и  $\hat{a}_k^+$  — операторы уничтожения и рождения частиц, подчиняющиеся условию перестановки:

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^+] = \delta_{kk'}. \quad (9.7)$$

Остальные скобки равны нулю. В случае спинорного поля  $\psi$

$$T_\mu^\nu = \frac{1}{2} \left( \bar{\psi} \gamma^\nu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\mu} \gamma^\nu \psi \right) \quad (9.8)$$

(мы выписываем в этом случае его смешанные компоненты,  $\gamma^\nu$  — матрицы Дирака). Поле  $\psi$  и сопряженное ему поле  $\bar{\psi}$  разлагается в ряды:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p; r=1,2} \{ \hat{a}_r(p) u^r(p) \exp(ipx) + \hat{b}_r^+(p) v^r(-p) \exp(-ipx) \}, \quad (9.9)$$

$$\bar{\psi} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p; r=1,2} \{ \hat{a}_r^+(p) \bar{u}^r(p) \exp(-ipx) + \hat{b}_r(p) \bar{v}^r(-p) \exp(ipx) \}, \quad (9.9')$$

где  $\hat{a}_r$ ,  $\hat{a}_r^+$  и  $\hat{b}_r$ ,  $\hat{b}_r^+$  — операторы рождения и уничтожения электронов и позитронов;  $u^r(p)$  и  $v^r(p)$  — нормированные к 1 спиноры. Условия квантования:

$$\{ \hat{a}_r(p), \hat{a}_{r'}^+(p) \} = \delta_{rr'}, \quad (9.10)$$

$$\{ \hat{b}_r(p), \hat{b}_{r'}^+(p) \} = \delta_{rr'}; \quad (9.10')$$

остальные антикоммутируют и равны нулю. Равенство нулю среднего значения тензора импульса-энергии  $T_{\mu\nu}$  обеспечивается тем, что в (9.5) и (9.8) берем псевдоевклидовы значения тензора  $g_{\mu\nu}^0$ , а произведения операторов  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^+$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{b}^+$  — в нормальном виде. По определению нормального произведения среднее значение  $T_{\mu\nu}$  по вакууму равно нулю. Из уравнения (9.1) получим

$$\psi_\nu^\mu(x) = \frac{16\pi k}{c^3} \int G(x-x') \hat{T}_\nu^\mu(x') d^4 x', \quad (9.11)$$

где  $G(x-x')$  — функция Грина «свободного» уравнения (9.1)<sup>1</sup>.

Следуя работе [47], вычислим среднее по вакууму от произведения величин  $\psi_\nu^\mu(x)$ ,  $\psi_\beta^\alpha(y)$ , т. е. корреляцию этих величин. Из (9.11) имеем

$$\overline{\psi_\nu^\mu(x) \psi_\beta^\alpha(y)} = \left( \frac{16\pi k}{c^3} \right)^2 \int G(x-x') G(y-y') Q_{\nu\beta}^{\mu\alpha}(x'-y') d^4 x' d^4 y', \quad (9.12)$$

где тензор  $Q_{\nu\beta}^{\mu\alpha}(x'-y')$  — коррелятор

$$Q_{\nu\beta}^{\mu\alpha}(x-y) = \overline{T_\nu^\mu(x) T_\beta^\alpha(y)}. \quad (9.13)$$

<sup>1</sup> В (9.11) имеется в виду функция Грина  $G(x-x')$ , симметричная относительно прошедшего и будущего.

В силу однородности вакуума этот коррелятор зависит лишь от разности  $x - y$ . Представим его в виде спектрального разложения

$$Q_{\nu\beta}^{\mu\alpha}(x - y) = \int \tilde{Q}_{\nu\beta}^{\mu\alpha}(q) \exp[iq(x - y)] d^4 q. \quad (9.14)$$

Тогда для спектрального разложения коррелятора компонент метрического тензора получим

$$\mathcal{M}_{\nu\beta}^{\mu\alpha}(x - y) = \overline{\psi_{\nu}^{\mu}(x) \psi_{\beta}^{\alpha}(y)} = \int \tilde{\mathcal{M}}_{\nu\beta}^{\mu\alpha}(q) \exp[iq(x - y)] d^4 q. \quad (9.15)$$

Из (9.11) и (9.13) следует

$$\tilde{\mathcal{M}}_{\nu\beta}^{\mu\alpha}(q) = \left( \frac{16\pi k}{c^3} \right)^2 \frac{1}{q^4} \tilde{Q}_{\nu\beta}^{\mu\alpha}(q), \quad (9.16)$$

где множитель  $q^4$  возник из соотношения

$$\tilde{G}(q) \sim 1/q^2. \quad (9.17)$$

В дальнейшем приводятся результаты довольно громоздких вычислений  $Q_{\nu\beta}^{\mu\alpha}$  для скалярного и спинорного полей. По причинам, которые будут понятны из дальнейшего, мы вынуждены ограничиться качественными выводами. В этой же связи ограничиваемся приведением результатов вычислений для компоненты  $Q_{00}^{00}(x)$ .

**Скалярное поле.** Для симметризованного коррелятора в этом случае имеем

$$\begin{aligned} Q_{00}^{00}(x - y) &= \frac{1}{2} \{ \overline{T_0^0(x) T_0^0(y)} + \overline{T_0^0(y) T_0^0(x)} \} = \\ &= \frac{\hbar^2}{(2\pi)^6 c^2} \int \frac{d^3 k d^3 k'}{2\omega_k 2\omega_{k'}} \mathcal{M}^2(k, k') \cos(k + k', x - y), \end{aligned} \quad (9.18)$$

где

$$\mathcal{M}(k, k') = -\omega_k \omega_{k'} \left( 1 - \frac{m^2}{\omega_k \omega_{k'}} + \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}'}{\omega_k \omega_{k'}} \right), \quad (9.19)$$

так что 4-вектор  $q$  равен

$$q = (\omega_k + \omega_{k'}, \mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (9.20)$$

Интеграл в (9.18) расходится, поэтому определим в нем верхнюю границу интегрирования по векторам  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ , именно положим  $|\mathbf{k}| < K$ ,  $|\mathbf{k}'| < K$ .

Оценка интеграла (9.18) при этом ограничении приводит к следующему результату:

$$Q_{00}^{00}(r) = \frac{1}{32(2\pi)^4} \frac{\hbar^2 K^2}{c^2} + \dots \quad (9.21)$$



при  $r \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow 0$  ( $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ ,  $t = t_x - t_y$ ). Далее

$$Q_{00}^{00}(r) = \frac{2}{(2\pi)^4} \frac{\hbar^2 K^4}{c^2} \frac{1}{r^4} (1 + \cos 2Kr) \quad (9.22)$$

при  $r \rightarrow \infty$ ,  $t \rightarrow 0$  и

$$Q_{00}^{00}(t) = -\frac{1}{2(2\pi)^4} \frac{\hbar^2 K^6}{c^2} \frac{1}{t^2} \cos 2Kt \quad (9.23)$$

при  $t \rightarrow \infty$ ,  $r = 0$ . Введем вместо  $K$  длину  $\Lambda = 2\pi/K$ . Тогда из (9.21) видно, что  $Q_{00}^{00}(r)$  имеет порядок  $\hbar^2/c^2 \Lambda^8$  и, следовательно, амплитуда колебаний плотности скалярной материи

$$\Delta\rho \sim \hbar c/(c^2 \Lambda^4). \quad (9.24)$$

Отношение гравитационного радиуса этой плотности

$$b_g = (8\pi k/c^2)(\Delta\rho \Lambda^3) \quad (9.25)$$

к размеру самой флуктуации  $\Lambda$ :

$$\frac{b_g}{\Lambda} = \frac{8\pi k}{c^2} \frac{\hbar c}{c^2 \Lambda^4} \Lambda^2 = \frac{\Lambda_g^2}{\Lambda^2}. \quad (9.26)$$

Отсюда следует, что гравитационные эффекты, вызванные вакуумными флуктуациями скалярного поля, имеющими линейный масштаб  $\Lambda$ , не зависят от массы частиц, если  $\Lambda \ll \hbar/mc$ , и малы до тех пор, пока

$$\Lambda \gg \Lambda_g = (8\pi k \hbar/c^3)^{1/2} \simeq 10^{-32} \text{ см}. \quad (9.27)$$

**Спинорное поле.** Вычисления проводятся аналогично случаю скалярного поля и приводят к результату:

$$Q_{00}^{00}(x - y) = \frac{1}{4} \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{\hbar^2}{c^2} \int d^3 k d^3 k' (\omega_k - \omega_{k'})^2 \times \\ \times \mathcal{M}^2(k, k') \cos(k + k', x - y), \quad (9.28)$$

причем  $\mathcal{M}^2(k, k') \approx 1$ . При таком же, как и в (9.18), обрезании интеграла получаем

$$Q_{00}^{00}(r) + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{16} \frac{1}{15} \frac{\hbar^2}{c^2} K^8 + \dots \quad (9.29)$$

при  $r = 0$ ,  $t = 0$ . Далее

$$Q_{00}^{00}(r) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\hbar^2}{c^2} \frac{K^2 m^2}{c^2} \frac{1}{r^4} (1 - \cos 2Kr) \quad (9.30)$$

при  $t \rightarrow \infty$  и  $t = 0$ ;

$$Q_{00}^{00}(t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\hbar^2 K^4 m^2}{t^2} \cos 2Kt \quad (9.31)$$

при  $t \rightarrow \infty$ ; здесь  $m$  — масса спинорных частиц. Как видно из сравнения формул (9.21)–(9.23) и (9.29)–(9.31), амплитуда плотности  $\Delta\rho$  в обоих случаях практически одна и та же и не зависит от массы частиц. Поведение же при больших  $r$  или  $t$  в случае бозе-статистики и ферми-статистики несколько различно.

## 10. Флуктуации гравитационного поля вблизи электрического заряда

Флуктуации гравитационного поля такого рода существенно отличаются от рассмотренных в предыдущем разделе только в том случае, если изменения метрики, вызванные присутствием заряда, велики. Классической моделью заряженной частицы может служить, например, «фридмон» [47] — частица с метрикой Фридмана во внутренней области и с метрикой шварцшильдовского типа во внешней области. Ограничимся здесь рассмотрением внешней области  $r > r_0$ , причем

$$r_0 = \sqrt{a_g a_0}, \quad (10.1)$$

где

$$a_g = 8\pi k m_0 / c^3, \quad a = \varepsilon^2 / (m_0 c^2), \quad (10.2)$$

т. е. длина  $r_0$  — среднее геометрическое гравитационного радиуса  $a_g$  частицы и ее электромагнитного радиуса  $a_0$ . При определенном выборе координат [44] метрика для  $r > r_0$  задается интервалом

$$ds = g_{00} dt^2 - g_{rr} dr^2 - r^2 d\Omega. \quad (10.3)$$

Здесь  $r$  — трехмерный радиус;  $\Omega$  — угловые координаты так, что  $d\Omega = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ ;  $g_{00}$ ,  $g_{rr}$  — компоненты метрического тензора, равные

$$g_{00} = (1 - r_0/r)^2, \quad g_{rr} = 1/g_{00}. \quad (10.4)$$

Теперь заметим, что длина  $r_0$  применительно к условиям микромира может быть записана в виде

$$r_0 = \Lambda_g \sqrt{\varepsilon^2 / \hbar c} < \Lambda_g. \quad (10.5)$$

Из (10.5) видно, что  $r_0$  может быть меньше или сравнимым с длиной  $\Lambda_g$ . Однако результаты расчетов, приведенных в предыдущем разделе, показывают, что в этой области квантовые флуктуации гравитационного поля будут очень велики. Поэтому классические модели частицы, видимо, могут иметь лишь эвристическое значение. Качественное рассмотрение квантовых флуктуаций гравитационного поля и поведения квантовых полей в гравитационном поле может быть усовершенствовано на основании методики, предложенной в рабо-

те [45]. Эта методика основана на рассмотрении фейнмановских интегралов по траекториям при ограничении гауссовым приближением для фазы.

Рассмотрим совместно гравитационное поле  $g_{\mu\nu}$  и скалярное поле  $\varphi$ . Представим метрический тензор  $g_{\mu\nu}$  в виде (8.6), причем под  $g_{\mu\nu}$  теперь будем понимать классическое гравитационное поле, а под  $h_{\mu\nu}$  — квантовое. Интеграл Фейнмана

$$G = \int d\{\varphi\}d\{h\}\delta(N)\exp(i\Phi), \quad (10.6)$$

где символы  $d\{\varphi\}$  и  $d\{h\}$  означают интегрирование в функциональных пространствах  $R_\varphi$  и  $R_h$ , а множитель  $\delta(N)$  учитывает возможные дополнительные условия  $N = 0$ . Фаза  $\Phi$  равна

$$\Phi = \int \left[ \frac{1}{2\Lambda_g^2} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} + \frac{1}{\hbar c} L \right] \sqrt{-g} dV. \quad (10.7)$$

Здесь  $\sqrt{-g} dV$  — инвариантный объем;  $g$  — определитель метрического тензора  $g_{\mu\nu}$ :  $g = \det(g_{\mu\nu})$ ;  $R_{\mu\nu}$  — тензор кривизны;  $L$  — функция Лагранжа скалярного поля (9.4). Гравитационное действие

$$W = \frac{1}{2} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \quad (10.8)$$

в соответствии с разложением

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (10.9)$$

может быть заменено в интеграле (10.6) выражением

$$W^* = \bar{W} + \bar{W}^{\mu\nu\rho\sigma} h_{\mu\nu} h_{\rho\sigma} + \bar{W}^{\mu\nu\rho\sigma\alpha} h_{\mu\nu} (\partial h_{\rho\sigma} / \partial x_\alpha) + \\ + \bar{W}^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta} (\partial h_{\mu\nu} / \partial x^\alpha) (\partial h_{\rho\sigma} / \partial x_\beta), \quad (10.10)$$

так как члены с первыми степенями  $h_{\mu\nu}$  в силу классических (неквантовых) уравнений гравитационного поля выпадут при интегрировании в (10.6).

Изучение коэффициентов  $\bar{W}^{\mu\nu\rho\sigma}$ ,  $\bar{W}^{\mu\nu\rho\sigma\alpha}$ ,  $\bar{W}^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta}$  позволяет сделать качественные заключения о поведении квантового гравитационного поля в той области, где имеется сильное классическое поле, например, вблизи заряда. Для иллюстрации этого рассмотрим более простой случай квантования скалярного поля  $\varphi$  в классическом гравитационном поле. В этом случае полагаем  $h_{\mu\nu} = 0$  и тензор  $g^{\mu\nu}$  в (10.10) равным  $\bar{g}^{\mu\nu}$ .

Фаза  $\Phi$  в (10.7) принимает вид

$$\Phi = \frac{1}{\Lambda_g^2} \int \bar{W} \sqrt{-g} dV + \frac{1}{2\hbar c} \int \left( \bar{g}^{\mu\nu} \frac{\partial\varphi\partial\varphi}{\partial x^\mu\partial x^\nu} - m^2 \varphi^2 \right) \sqrt{-g} dV. \quad (10.11)$$

Интересующая нас квантовая часть этой фазы

$$\Phi^* = \frac{1}{2\hbar c} \int \left( \bar{g}^{\mu\nu} \frac{\partial\varphi\partial\varphi}{\partial x^\mu\partial x^\nu} - m^2 \varphi^2 \right) \sqrt{-\bar{g}} dV. \quad (10.12)$$

Подставляя сюда  $\bar{g}^{\mu\nu}$  из (10.4), получаем квантовое скалярное поле в классическом гравитационном поле заряда  $\varepsilon$ .

Нетрудно проверить, что в этом случае

$$g^{00} = 1/g_{00} = (1 - r_0/r)^{-2}, \quad g^{rr} = -g_{00}, \quad g^{\varphi\varphi} = r^2, \quad g^{\psi\psi} = r^2 \sin^2 \theta, \quad (10.13)$$

так что

$$\sqrt{-g} dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\psi dt = dx dy dz dt \quad (10.14)$$

и лагранжева плотность

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{(1 - r_0/r)^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \left( 1 - \frac{r_0}{r} \right)^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 - \\ & - \left[ \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Отсюда видно, что квантовые флуктуации производной поля по времени  $\partial\varphi/\partial t$  в области  $r > r_0$  становятся меньше (успокаиваются) в сравнении со случаем плоского пространства. Действительно, первый член в (10.15) дает тот же вклад в фазу интеграла Фейнмана, что и в псевдоевклидовом случае, но при значениях производной  $|\partial\varphi/\partial t|$ , меньших в  $(1 - r_0/r)$  раз. Этот эффект гравитационного поля может быть понят в терминах «эффективной постоянной Планка», которая была введена в работе [45]. А именно, канонически сопряженный полю импульс

$$\Pi = \partial L / \partial \varphi_t = g^{00} \varphi_t, \quad (10.16)$$

и, следовательно, условие квантования гласит:

$$[\varphi_t(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{x}', t)] = \frac{i\hbar}{g^{00}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = i\hbar^* \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (10.17)$$

где  $\hbar^*$  — эффективная постоянная Планка:

$$\hbar^* = \hbar(1 - r/r_0)^2, \quad (10.18)$$

так что при  $r_0 \rightarrow r$   $\hbar^* \rightarrow 0$ . Из (10.18) теперь непосредственно видно, что квантовые флуктуации производной  $\varphi_t$  убывают по мере приближения к заряду. Однако радиальные флуктуации возрастают; действительно, второй член в (10.15), содержащий производную  $\varphi_r$ , имеет коэффициент, убывающий при  $r \rightarrow r_0$ . Поэтому возрастает вклад квантовых флуктуаций поля по направлению радиус-вектора, проведенного из центра заряда.

Этот пример показывает возможность качественного анализа, на основе интеграла Фейнмана (10.6), влияния гравитации на квантовое поле.

## 11. Пространство Снайдера

К стохастическим пространствам может быть отнесено и пространство, впервые введенное Снайдером [46]. В этом пространстве координаты  $x^\mu$  точечного события  $\mathcal{P}(x)$  являются операторами  $\hat{x}^\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3, 4$ ), не коммутирующими между собой, так что

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\hat{C}^{\mu\nu}, \quad (11.1)$$

где  $\hat{C}^{\mu\nu}$  — некоторый оператор, подлежащий дальнейшему определению.

Из (11.1) следует, что измерение координаты  $x^\mu$  вдоль некоторого направления  $Ox^\mu$  несовместимо с измерением координаты  $x^\nu$ , взятой вдоль другого направления  $Ox^\nu$ . Если  $x^\mu = x^{\mu'}$ , то относительно  $x^\mu$  могут быть сделаны лишь вероятностные предсказания. Таким образом, координатное пространство Снайдера  $S_4(x)$  является пространством стохастическим.

Определенная реализация условий (11.1) достигается на основе предположения, что пространство импульса  $R_4(p)$  остается числовым пространством, однако его метрика отличается от псевдоевклидовой метрики (1.4) и является метрикой пространства Римана с постоянной кривизной:

$$dp^2 = g_{\mu\nu}(p)dp_\mu dp_\nu, \quad (11.2)$$

где  $g_{\mu\nu}(p)$  — соответствующий метричный тензор<sup>1</sup>. Предположение о постоянной кривизне пространства  $R_4(p)$  весьма ограничивает произвол в выборе этого тензора и позволяет дать разумное определение операторам  $\hat{x}^\mu$ .

Наиболее естественный путь определения тензора  $g_{\mu\nu}(p)$  — это рассматривать метрику в  $R_4(p)$  как метрику некоторой поверхности второго порядка, погруженной в псевдоевклидово пространство  $R_5(p)$ . Такая поверхность должна иметь вид

$$g_5 p_5^2 + p_4^2 - p_3^2 - p_2^2 - p_1^2 = g_0(\hbar^2/a^2). \quad (11.3)$$

Здесь все импульсы  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$  считаются действительными. Величина  $\hbar/a$  имеет смысл радиуса кривизны пятимерной гиперповерхности;  $a$  — «элементарная» длина, являющаяся характерным параметром теории<sup>2</sup>. Так как сигнатура  $+- - -$  в пространстве  $R_4(p_1, p_2, p_3, p_4)$  определена, то имеются лишь четыре возможности:  $g_0 = \pm 1$ ,  $g_5 = \pm 1$ .

Одна из наиболее интересных возможностей заключается в выборе  $g_0 = +1$ ,  $g_5 = +1$ <sup>3</sup>.

При таком выборе

$$p_5^2 + p_4^2 - p^2 = \hbar^2/a^2. \quad (11.4)$$

<sup>1</sup> В работе [47] рассмотрен более общий случай.

<sup>2</sup> В дальнейшем следуем работам В. Г. Кадышевского и его сотрудников, благодаря которым теория пространства Снайдера приняла математически законченную форму.

<sup>3</sup> Этот вариант метрики положен в основу квантовой теории поля, в которой точки в пространстве Снайдера рассматриваются как относительные координаты частиц. См. работу [49].

Так как  $p_5$  действительно, а разность  $p_4^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$  имеет смысл квадрата массы, то из (11.4) следует, что  $\hbar/a$  играет роль максимально возможной массы частицы (максимона):

$$M = \hbar/a. \quad (11.5)$$

На пространственноподобный импульс  $p^2 < 0$  ограничений не накладывается.

В таком варианте геометрии Снайдера условия коммутации (11.1) удовлетворяются операторами

$$\hat{x}^\mu = ip_5(\partial/\partial p_\mu), \quad C^{\mu\nu} = a^2 \mathcal{M}^{\mu\nu}, \quad \mathcal{M}^{\mu\nu} = i[p_\mu(\partial/\partial p_\nu) - p_\nu(\partial/\partial p_\mu)], \quad (11.6)$$

где  $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ .

Таким образом, коммутатор (11.1) принимает вид

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = ia^2 \mathcal{M}^{\mu\nu}. \quad (11.7)$$

Оператор  $\mathcal{M}^{\mu\nu}$  — оператор бесконечно малых вращений гиперболы (11.4) и может рассматриваться как оператор 4-момента количества движения.

Операторы  $\hat{x}^\mu$  (11.6) являются генераторами вращения в плоскости  $(5, \mu)$ . Такие вращения играют роль сдвигов на гиперсфере. Поэтому в излагаемой интерпретации оператор  $\hat{x}^\mu$  можно рассматривать как оператор бесконечно малых сдвигов:

$$f(p_\mu(+)\epsilon) = f(p) + \epsilon \hat{x}^\mu f(p). \quad (11.8)$$

Важный шаг, сделанный в работе [49], заключается в переходе от координатных операторов  $\hat{x}^\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3, 4$ ) к полному набору операторов, содержащему операторы Казимира группы симметрии  $SO(2, 3)$  гиперболы (4), т. е. квадрат пятимерного момента

$$\frac{1}{2} M^{ik} M_{ik} = \frac{1}{2} \mathcal{M}^{\mu\nu} \mathcal{M}_{\mu\nu} + \xi^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial p_\mu} \left( g^{\mu\nu} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \dots \right) \equiv \tilde{\square}. \quad (11.9)$$

Здесь  $g$  — детерминант тензора  $g_{\mu\nu}$ . Помимо (11.9) в рассматриваемый полный набор операторов целесообразно включить величину  $M_{54}^1$ , т. е. оператор  $\hat{x}^4$  (11.6), который играет роль времени. Этот оператор имеет особенно простой вид в системе координат  $(\omega, \mathbf{p})$ :

$$p_5 = \cos \omega \sqrt{1 + \mathbf{p}^2}, \quad p_4 = \sin \omega \sqrt{1 + \mathbf{p}^2}, \quad \mathbf{p} \equiv \mathbf{p}, \quad |\omega| \leq \pi, \quad 0 < p < \infty, \quad (11.10)$$

а именно

$$\hat{x}^4 = -i(\partial/\partial \omega). \quad (11.11)$$

Очевидно, что его собственная функция

$$\psi_n(\omega) = \exp\{in\omega\}, \quad (11.12)$$

<sup>1</sup> Ср. с теорией момента количества движения в квантовой механике.

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , а собственное значение оператора времени (если восстановить размерность)

$$x^4 = an. \quad (11.13)$$

Таким образом, в рассматриваемой геометрии время квантуется согласно (11.13).

Оператор  $\tilde{\square}$  (11.9) является аналогом лапласиана  $\square = \partial^2/\partial p_4^2 - \partial^2/\partial p_1^2 - \partial^2/\partial p_2^2 - \partial^2/\partial p_3^2$ , который в случае плоского пространства является оператором интервала  $s^2 \equiv t - \mathbf{x}^2$ . Это обстоятельство дает основание толковать оператор  $\square$  так же, как оператор интервала  $\tilde{s}^2$  в пространстве Снайдера  $\tilde{\square} \equiv \tilde{s}^2$ . Собственные функции  $\psi_\lambda$  и собственные значения  $\lambda$  этого оператора определяются из уравнения

$$\tilde{s}^2 \psi_\lambda = \lambda \psi_\lambda. \quad (11.14)$$

Отсылая читателя к оригинальной работе [49], ограничимся здесь приведением результатов исследования уравнения (11.14). Собственные функции, отвечающие полному набору переменных

$$\psi_{\lambda, \dots} = \psi_{\lambda, n, l, m}(p_1, p_2, p_3, p_4), \quad (11.15)$$

где квантовое число  $n$  совпадает с  $n$  в (11.12), (11.13), числа  $l, m$  — имеют значение индексов сферических гармоник; наконец, число  $\lambda$  представляет две серии: дискретную

$$\lambda = L(L+3), \quad L = -1, 0, 1, 2, 3, \dots \quad (11.16)$$

и непрерывную

$$\lambda = -(3/2)^2 - \Lambda^2, \quad 0 \leq \Lambda < \infty. \quad (11.16')$$

Первая серия представляет собой собственные значения времениподобного интервала  $s^2 > 0$  (причем  $|n| \geq L+3$ ), вторая серия соответствует пространственноподобным интервалам  $s^2 < 0$ .

Из (11.16) и (11.16') следует, что в рассматриваемой геометрии не существует светового конуса, так как между  $s^2 > 0$  и  $s^2 < 0$  имеется разрыв.

С помощью функций (11.15) можно ответить на вопрос, какова вероятность того, что при заданном интервале  $s^2$  длина проекции луча на некоторое новое направление  $(O, 4')$ , отличное от  $(O, 4)$ , будет равна  $an'$ . Эта вероятность определяется квадратами модулей коэффициентов  $D_{nlmn'l'm'}^\lambda(\alpha)$  в разложении

$$\psi_{\lambda, n, l, m}(p) = D_{nlmn'l'm'}^\lambda(\alpha) \psi_{\lambda n' l' m'}(p'), \quad (11.17)$$

где под  $\alpha$  подразумеваются параметры, определяющие поворот от направления  $(O, 4)$  к направлению  $(O, 4')$ .

Таким образом,

$$w(nlm, n'l'm') = |D_{nlmn'l'm'}^\lambda(\alpha)|^2. \quad (11.18)$$

С помощью этой формулы решается вопрос о вероятности того или иного значения координаты  $x_4'$ , если задан интервал  $s^2$  и задано значение координаты  $x_4$ .

Аналогично можно рассуждать относительно пространственноподобных лучей, лежащих внутри  $s^2 < 0$ , т. е. в непрерывной серии (11.16').

## 12. Пространство $\Gamma_4(\hat{x})$ и нелокальное поле

Ранее была рассмотрена гипотеза о существовании максимона — частицы с наибольшей массой и было указано на то, что эта гипотеза ведет к представлению о пространстве, в котором координаты точек  $\mathcal{P}$  определены лишь с некоторой вероятностью, т. е. к стохастическому пространству  $R_4(\hat{x})$ .

Координаты точечного события  $\mathcal{P}(x)$  в таком пространстве могут быть представлены в виде суммы

$$\hat{x}^\mu = x^\mu + \hat{\xi}^\mu(x), \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \quad (12.1)$$

где  $x^\mu$  — среднее значение координаты точечного события  $\mathcal{P}(x)$ , которая может интерпретироваться как координата точечного события  $\mathcal{P}(x)$  в римановом пространстве  $R_4(x)$ ;  $\hat{\xi}_\mu$  — отклонение координаты от среднего (которое является стохастической величиной). По определению среднее от  $\hat{x}^\mu$

$$\langle \hat{x}^\mu \rangle_R = x^\mu; \quad \langle \hat{\xi}^\mu \rangle_R = 0, \quad (12.2)$$

где  $\langle \dots \rangle_R$  обозначает усреднение по статистическому ансамблю, в котором определены вероятности тех или иных значений  $\hat{\xi}_\mu$ . Природа и характер этого ансамбля определяются физикой.

Заметим, что при заданной средней координате точечного события  $\xi^\mu$  имеет смысл дифференциал  $dx$ , который и определяет в стохастическом смысле окрестность точки  $\mathcal{P}(x)$ . Элемент длины в этой окрестности  $\Delta \hat{s}$  определим, следуя принципам геометрии Финслера [50]. В этой геометрии элемент длины  $ds$  в окрестности каждой точки пространства задается в виде формы первого порядка по  $dx^\mu$ :

$$ds = n_\mu dx^\mu, \quad (12.3)$$

причем в этой формуле вектор  $n$  может быть функцией координат точки  $\mathcal{P}(x)$ , а также зависеть от отношений дифференциалов  $dx^\mu/dx^\nu$ . В случае пространства Минковского вектор  $n$  постоянен и  $n^2 = 1$ . Для времениподобного направления вектора  $n$  элемент длины  $ds$  чисто мнимый. В нашем случае роль  $dx^\mu$  играют конечные величины  $\Delta x^\mu$ , так что элемент длины  $\Delta \hat{s}$  является также конечной, стохастической величиной:

$$\Delta \hat{s} = n_\mu \Delta \hat{x}^\mu = n_\mu \xi^\mu. \quad (12.4)$$

Среднее от произведения величин  $\xi^\mu(x)$  и  $\xi^\nu(y)$

$$\langle \xi^\mu(x), \xi^\nu(y) \rangle = C^{\mu\nu}(x, y) \quad (12.5)$$

определяет корреляцию окрестностей точек  $\mathcal{P}(x)$  и  $\mathcal{P}(y)$ . Простейшим является случай, когда отсутствует корреляция:

$$\langle \xi^\mu(x), \xi^\nu(y) \rangle_R = 0, \quad x \neq y. \quad (12.6)$$

Если стохастическое пространство однородно, то  $\hat{\xi}^\mu(x)$  не зависят от  $x$ . Однако условие (12.6) сохраняет свое значение и в этом вырожденном случае



и означает, что каждой точке  $\mathcal{P}(x)$  приписывается свой, только ей принадлежащий вектор  $\hat{\xi}^\mu(x)$ , одинаковый в статистическом понимании для всех точек в  $R_4(x)$ .

Рассмотрим теперь одну из реализаций стохастического пространства  $R_4(\hat{x})$ . Положим

$$\hat{x}^\mu = x^\mu + a\gamma^\mu, \quad \hat{\xi}^\mu = \alpha\gamma^\mu, \quad (12.7)$$

где  $\gamma^\mu$  — матрицы Дирака и  $a$  — амплитуда флуктуаций координаты. Допустим, что существует некоторое распределение длины  $a$ , например нормальное:

$$dw\left(\frac{a}{\Lambda}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{da}{\Lambda} \exp\left\{-\frac{a^2}{\Lambda^2}\right\}, \quad (12.8)$$

где  $\Lambda$  — «элементарная длина». Таким образом,  $\hat{\xi}_\mu$  является оператором с неопределенной амплитудой. Из (12.4) и (12.7) следует:

$$\Delta\hat{s} = a(n_\mu\gamma^\mu) = a(n\gamma). \quad (12.9)$$

Формулы (12.7)–(12.9) определяют особое пространство  $\Gamma_4(x)$ , являющееся частным случаем стохастического пространства  $R_4(\hat{x})$  [51].

Операторы элемента длины  $\Delta\hat{s}$ , взятые в одной и той же точке, но для разных направлений  $n$ , не коммутируют между собою, так как

$$[\xi^\mu, \xi^\nu] = 2a^2\delta^{\mu\nu}, \quad (12.10)$$

где  $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ . В силу этого окрестность точки  $\mathcal{P}(x)$  распадается на отдельные, несовместимые друг с другом лучи. В этом свойстве пространства  $\Gamma_4(x)$  можно усмотреть аналогию с «квантованным» пространством Снайдера.

Эта аналогия становится еще более убедительной, если заметить, что коммутатор операторов

$$[\hat{\xi}^\mu, \hat{\xi}^\nu] = ia\Sigma^{\mu\nu}, \quad (12.10')$$

где  $\Sigma^{\mu\nu}$  — известный оператор спина. Аналогия между (12.10') и (11.7) совершенно очевидна.

Найдем собственные значения  $\lambda$  оператора  $\Delta s$ . Для этого следует решить уравнение

$$\Delta\hat{s}u_\lambda = \lambda u_\lambda, \quad (12.11)$$

где  $u_\lambda$  — собственный спинор. Уравнение (12.11) решается элементарно, при этом получаем

$$\lambda_\pm = \pm a\sqrt{n^2}, \quad u_\lambda = i\sigma n/(n_4 + \lambda), \quad (12.12)$$

где  $\sigma$  — векторная матрица Паули.

Ввиду того что нет оснований предпочесть одно из собственных значений другому, будем считать, что состояние окрестности любой точки  $\mathcal{P}(x)$  является смешанным и оба значения  $\lambda_\pm$  равновероятны.

При этом предположении усреднение любой функции  $f(\Delta\hat{s})$  в окрестности какой-либо точки в пространстве  $\Gamma_4(\hat{x})$  определяется формулой

$$\langle f(\Delta\hat{s}) \rangle_\Gamma = \frac{1}{2} \int dw\left(\frac{a}{\Lambda}\right) [f(\lambda_+) + f(\lambda_-)]. \quad (12.13)$$

Такое усреднение возможно в каждой точке  $\mathcal{P}(x)$  и статистически независимо от усреднения в другой точке  $\mathcal{P}(y)$ , если только  $x \neq y$ .

Обратимся теперь к рассмотрению полей.

Под полем в пространстве  $\Gamma_4(\hat{x})$  будем подразумевать представимую в виде интеграла Фурье функцию  $\Psi$ :

$$\Psi(\hat{x}) = \int \tilde{\Psi}(k) \exp(ik\hat{x}) d^4k. \quad (12.14)$$

Функции  $\Psi(\hat{x})$  суть функции операторов  $\hat{x}^\mu$  и поэтому не удовлетворяют какому-либо дифференциальному уравнению. Дифференциальное уравнение для  $\Psi(\hat{x})$  можно заменить условием типа

$$\tilde{\Psi}(k) = \delta(k^2 + m^2)f(k), \quad (12.15)$$

накладываемым на ее фурье-образ  $\tilde{\Psi}(k)$ . Это условие выражает закон дисперсии волн  $\Psi(\hat{x})$ . При этом предполагается, что  $f(k)$  уже не содержит  $\delta$ -функций.

Найдем теперь среднее поле  $\Psi(x)$ . Для этого заметим, что на основании (12.7) и (12.12) собственные значения оператора  $\exp(ik\hat{x})$  равны:

$$f_{\pm}(k, x) = \exp[i(kx \pm a\sqrt{k^2})], \quad (12.16)$$

и, согласно (12.13), их среднее значение

$$\langle f_{\pm}(k, x) \rangle_{\Gamma} = \exp(ikx) \int dw(a) \exp(ia\sqrt{k^2}) \quad (12.17)$$

(если  $dw(a) = dw(-a)$ ). В силу этого среднее поле

$$\Psi(x) = \langle \Psi(\hat{x}) \rangle_{\Gamma} = \int \tilde{\Psi}(k) \exp(ikx) \tilde{K}(\Lambda\sqrt{k^2}) d^4k, \quad (12.18)$$

где, согласно (17.17),

$$\tilde{K}(\Lambda\sqrt{k^2}) = \int dw \left( \frac{a}{\Lambda} \right) \exp(ia\sqrt{k^2}). \quad (12.19)$$

Если  $\tilde{K}(z)$  — целая функция, то из (12.15) следует

$$\square\Psi(x) + m^2\Psi(x) = 0, \quad (12.20)$$

т. е. среднее поле удовлетворяет уравнению Клейна. Для дальнейшего удобно несколько изменить обозначения. Положим

$$\tilde{K}(\Lambda\sqrt{k^2}, m) = \tilde{K}(\Lambda\sqrt{k^2}) / \tilde{K}(\Lambda\sqrt{-m^2}); \quad (12.21)$$

$$\tilde{\Phi} = \tilde{K}(\Lambda\sqrt{-m^2}) \tilde{\Psi}(k). \quad (12.21')$$

Тогда вместо (12.18) получим

$$\Psi(x) = \int \tilde{\Phi}(k)(\Lambda\sqrt{k^2}, m) \exp(ikx) d^4k. \quad (12.22)$$

Из  $\tilde{\Phi}(k)$  можно построить локальное поле:

$$\Phi(x) = \int \tilde{\Phi}(k) \exp(ikx) d^4k, \quad (12.23)$$

также удовлетворяющее уравнению (12.20), если  $\tilde{K}(z)$  — функция целая. Из (12.22) следует

$$\Psi(x) = \int K(x-y) \Phi(y) d^4y, \quad (12.24)$$

где  $K(x)$  — пространственный образ Фурье функции  $\tilde{K}(\Lambda\sqrt{k^2}, m)$ :

$$K(x) = \int \tilde{K}(\Lambda\sqrt{k^2}, m) \exp(ikx) d^4k. \quad (12.25)$$

Заметим, что  $K(x)$  может и не существовать, однако представление (12.24) все же будет иметь силу.

Обратимся теперь к среднему от произведения полей  $\langle \Psi(\hat{x})\Psi(\hat{y}) \rangle$ , взятых в различных точках пространства. На основании предположения о статистической независимости окрестностей различных точек  $\mathcal{P}(x)$  и  $\mathcal{P}(y)$

$$\langle \Psi(\hat{x})\Psi(\hat{y}) \rangle_{\Gamma} = \langle \Psi(\hat{x}) \rangle_{\Gamma} \langle \Psi(\hat{y}) \rangle_{\Gamma} \quad (12.26)$$

и

$$\langle \Psi(\hat{x})\Psi(\hat{y}) \rangle_{\Gamma} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \langle \Psi(\hat{x})\Psi(\hat{x} + \delta) \rangle_{\Gamma} = \langle \Psi(\hat{x}) \rangle_{\Gamma} \langle \Psi(\hat{x}) \rangle_{\Gamma}. \quad (12.27)$$

Таким образом, каждому полю  $\Psi(\hat{x})$  в пространстве  $\Gamma_4(x)$  сопоставляется нелокальное поле  $\Psi(x)$  в пространстве  $R_4(x)$  как результат усреднения поля в окрестности каждой точки  $\mathcal{P}(x)$ . Далее нелокальному полю  $\Psi(x)$  согласно (12.23) и (12.24) сопоставляется локальное поле  $\Phi(x)$ .

Обратимся теперь к квантованию поля  $\Psi(\hat{x})$ . Наиболее прямой путь построения коммутационных условий для такого поля, взятого в различных точках  $x$  и  $y$ , основывается на использовании формулы (12.22) или (12.24), которые связывают среднее нелокальное поле с локальным. Эти соотношения позволяют построить среднее от коммутатора полей  $\Psi(\hat{x})$  и  $\Psi(\hat{y})$  и выразить его через коммутатор  $D(x-y)$  локальных полей  $\hat{\Phi}(x)$  и  $\hat{\Phi}(y)$ :

$$\begin{aligned} \langle [\Psi(\hat{x}), \Psi(\hat{y})] \rangle_{\Gamma} &= [\Psi(x), \Psi(y)] = \\ &= \int K(x-x') K(y-y') d^4x' d^4y' [\hat{\Phi}(x'), \hat{\Phi}(y')] = \\ &= \int K(x-x') K(y-y') d^4x' d^4y' \cdot iD(x'-y') = iD_{\Gamma}(x-y), \end{aligned} \quad (12.28)$$

где

$$D_{\Gamma}(x-y) = \int \tilde{V}(\Lambda\sqrt{q^2}, m) \tilde{D}(q) \exp[iq(x-y)] d^4q \quad (12.29)$$

и

$$\tilde{V}(\Lambda\sqrt{q^2}, m) = [\tilde{K}(\Lambda\sqrt{q^2}, m)]^2. \quad (12.30)$$

Подобным же образом может быть построено  $T$ -произведение, упорядоченное по среднему времени:

$$\begin{aligned} \langle T\Psi(\hat{x})\Psi(\hat{y}) \rangle_{\Gamma} &= T(\Psi(x)\Psi(y)) = \\ &= T \int \tilde{K}(\Lambda\sqrt{k'^2}, m) \tilde{K}(\Lambda\sqrt{k''^2}, m) d^4k' d^4k'' T[\Phi(k') \exp(ik'x) \Phi(k'') \exp(ik''x)]. \end{aligned} \quad (12.31)$$

Усредним теперь это выражение по вакууму локальных полей. Учитывая, что

$$\langle 0|T\Phi(k')\Phi(k'') \exp\{i(k'x + k''y)\}|0\rangle = \delta^4(k' + k'') \exp[ik'(x-y)] \tilde{D}_c(k'), \quad (12.32)$$

получим

$$\langle 0| \langle T(\Psi(\hat{x})\Psi(\hat{y})) \rangle_{\Gamma} |0\rangle \equiv \langle 0|T\Psi(x)\Psi(y)|0\rangle = D_{c\Gamma}(x-y), \quad (12.33)$$

где

$$D_{c\Gamma}(x-y) = \int \tilde{V}(\Lambda\sqrt{q^2}, m) \tilde{D}_c(q) \exp[iq(x-y)] \quad (12.34)$$

— нелокальная причинная функция, а  $\tilde{D}_c(q)$  есть фурье-образ локальной причинной функции:

$$\tilde{D}_c(q) = 1/(k^2 + m^2 + i\varepsilon). \quad (12.35)$$

Из формул (12.28)–(12.30), (12.33) и (12.35) следует, что нелокальное поле  $\Psi(x)$ , полученное в результате усреднения поля  $\Psi(\hat{x})$  в стохастическом пространстве  $\Gamma_4(x)$ , обладает всеми чертами нелокального поля (подробно исследованного в работах [52, 53]) при условиях, что функция  $\tilde{V}(z, m)$ ,  $z = \Lambda\sqrt{k^2}$  является целой, имеет определенный рост в комплексной плоскости  $z$ ,  $\tilde{V}(z, m) \sim \exp(|z|\rho)$ ,  $\rho \geq 1/2$ , равна 1 при  $z = \Lambda\sqrt{-m^2}$  и убывает в пространственноподобной области, т. е. при  $k^2 \rightarrow \infty$ . При этих условиях матрица рассеяния, построенная на основе нелокального поля, удовлетворяет требованиям унитарности и макроскопической причинности [53]. Указанные необходимые требования к функции  $\tilde{V}(z, m)$  на основании (12.19), (12.21) и (12.30) могут быть сформулированы на языке моментов амплитуды флуктуаций  $a$ . Действительно, из (12.19) следует

$$\tilde{K}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int dw \left(\frac{a}{\Lambda}\right) \left(\frac{a}{\Lambda}\right)^n \frac{(iz)^n}{n!} = \Sigma \frac{b_n}{n!} (iz)^n, \quad (12.36)$$

где

$$b_n = \int dw \left(\frac{a}{\Lambda}\right) \left(\frac{a}{\Lambda}\right)^n \quad (12.37)$$

есть момент  $n$ -го порядка от  $a/\Lambda$ . Таким образом, функция  $\tilde{K}(z)$  полностью определена моментами амплитуды флуктуаций.

Если  $dw(a/\Lambda)$  — нормальное распределение (12.8), то из (12.19) и (12.21) следует

$$\tilde{K}(z, m) \equiv \tilde{K}(\Lambda\sqrt{k^2}, m) = \exp [(-\Lambda^2/4)(k^2 + m^2)]; \quad (12.38)$$

$$\tilde{V}(z, m) \equiv \tilde{V}(\Lambda\sqrt{k^2}, m) = \exp [(-\Lambda^2/2)(k^2 + m^2)]. \quad (12.39)$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям, необходимым для соблюдения унитарности матрицы рассеяния.

Для иллюстрации соблюдения в этой теории макроскопической причинности возьмем в (12.24) в качестве  $\Phi(y)$  пробную функцию

$$\Phi(y) = \exp \left[ -\frac{y_0^2 + \mathbf{y}^2}{b^2} \right] = \int \exp \left[ -\frac{b^2}{4}(q_0^2 + \mathbf{q}^2) + i q y \right] d^4 q \quad (12.40)$$

и  $\tilde{K}(\Lambda\sqrt{k^2}, m)$  из (12.38). Тогда

$$\begin{aligned} K(x - y) &= \int \exp \left[ -\frac{\Lambda^2}{4}(k^2 + m^2) + i k(x - y) \right] d^4 k = \\ &= \exp [-(\Lambda/4)m^2] \exp [-(x - y)^2/\Lambda^2]. \end{aligned} \quad (12.41)$$

Подставляя (12.40) и (12.41) в (12.24), находим

$$\Psi(x) \approx \exp [-(\Lambda/4)m^2] \exp [-(x_0^2/T - \mathbf{x}^2/L^2)], \quad (12.42)$$

где

$$T = l^2 - \Lambda^2; \quad L^2 = l^2 + \Lambda^2. \quad (12.43)$$

Отсюда видно, что при  $l \gg \Lambda$ , т. е. для волновых пакетов, размеры которых превосходят элементарную длину  $\Lambda$ , нелокальная волновая функция  $\Psi$  лишь несколько размыта в окрестности локальной функции  $\Phi(x)$ .

Из (12.42) можно было бы заключить, что причинность полностью нарушается при  $l < \Lambda$  (так как тогда  $T^2 < 0$ ).

Однако это обстоятельство связано с тем, что волновой пакет (12.41) имеет фурье-образ  $\tilde{\Phi}(q)$  того же роста, что и  $\tilde{K}(a\sqrt{k^2}, m)$ , и поэтому не удовлетворяет общим требованиям теории Г.В. Ефимова. Согласно этим требованиям, все пробные функции должны иметь рост  $\gamma < 1/(1 - 1/2\rho)$ . Пробные функции  $\tilde{\Phi}(y)$  такого роста «размазываются» оператором  $K(x - y)$  в ограниченной четырехмерной области, причем сдвиг аргумента  $y_0$  чисто мнимый, а аргумент  $\mathbf{y}$  действительный [52].

Это любопытное обстоятельство в теории стохастического пространства  $\Gamma_4(x)$  связано с тем, что оператор  $\xi^0 = \xi^4/i$  чисто мнимый.

## Список литературы

1. *Poincaré H.* La mesure du temps. Rev. de Metaphysique et de Morale. 1898. V. VI.
2. *Эйнштейн А.* Сб. науч. трудов. 1965. С. 7; Сущность теории относительности. Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1955.
3. *Мандельштам Л. И.* Собр. соч. в 5-и томах. Т. V. М.: Наука, 1950.
4. *Фридман А. А.* Мир как пространство и время. М.: Наука, 1965.
5. *Тяпкин А. А.* // УФН. 1972. Т. 106. С. 617;  
*Кадомцев Б. Б. и др.* Там же.
6. *Блохинцев Д. И.* Пространство и время в микромире. М.: Наука, 1970.
7. *Марцке Р., Уилер Д. А.* Гравитация и относительность. М.: Мир, 1965.
8. *Синг Дж.* Общая теория относительности. Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. Изд. 4-е, М.: Наука, 1967.
10. *Уиллер Дж. и др.* Теория гравитации и гравитационный коллапс. Пер. с англ. М.: Мир, 1967.
11. *Blokhintsev D. I.* // Acta phys. Acad., Scient. Hung. 1967. V. 22. P. 307.
12. *Weisskopf V.* // Phys. Rev. 1939. V. 56. P. 72.
13. *Попов В. С.* // ЯФ. 1970. Т. 12. С. 429.
14. *Ambarzumian V., Ivanenko D. Z.* // Z. Phys. 1930. Bd. 64. S. 563.
15. *Landau L., Peierls R.* // Z. Phys. 1931. Bd. 69. S. 56.
16. *Schrödinger E.* // Sitz. Berlin. Preuss. Akad. Wiss. 1931. Bd. 12. S. 238.
17. *Соловьев Л. Д.* // XV Международная конференция по физике высоких энергий. Киев, 1970. Киев: Наук. думка, 1972.
18. *Марков М. А.* Препринт ОИЯИ Е-2014. Дубна, 1966.
19. *Марков М. А.* Препринт ОИЯИ Е2-5271. Дубна, 1970.
20. *Блохинцев Д. И.* // УФН. 1957. Т. 62. С. 381. — Статья № 86 в наст. изд. — *Прим. ред.*
21. *Блохинцев Д. И.* // УФН. 1973. Т. 110. С. 481. — Статья № 103 в наст. изд. — *Прим. ред.*
22. *Биленький С. М.* Введение в диаграммную технику. М.: Атомиздат, 1971.
23. *Блохинцев Д. И.* Препринт ОИЯИ Р2-6094. Дубна, 1971.
24. *Blokhintsev D. I.* JINR Preprint E2-6566. Dubna, 1972.
25. *Mengree K.* // Proc. Nat. Acad. Soc. 1959. V. 37. P. 226.
26. *Schweizer B.* // A. Skalar. Posific. J. Math. 1960. V. 10. P. 313.
27. *Schweizer B.* Probabilistic metric Space — the first 25 years University Massachusetts. 1967.
28. *Шерстнев А. Н.* // ДАН СССР. 1963. Т. 149. С. 280.
29. *March A. Z.* // Z. Phys. 1934. Bd. 104. S. 93; 1937. Bd. 105. S. 620.
30. *Марков М. А.* Гипероны и К-мезоны. М.: Физматгиз, 1958.
31. *Jukawa H.* Research Inst. Fund. Phys. Kyoto University, PIEP-55. 1966.
32. *Ingraham R. I.* Renormalisation Theory of Quantum Field with a Cut off. N.Y.: Gordon et Beach, 1967.
33. *Блохинцев Д. И.* // ДАН СССР. 1966. Т. 166. С. 574. — Статья № 92 в наст. изд. — *Прим. ред.*

34. Блохинцев Д. И. // ТМФ. 1972. Т. 11. С. 3. — Статья № 98 в наст. изд. — *Прим. ред.*
35. Блохинцев Д. И. Препринт ОИЯИ Е2-5922. Дубна, 1971.
36. Welton T. // Phys. Rev. 1948. V. 74. P. 1157; Вопросы причинности в квантовой механике: Сб. пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1955.
37. Блохинцев Д. И., Орлов В. И. // ЖЭТФ. 1953. Т. 25. С. 513. — Статья № 82 в наст. изд. — *Прим. ред.*
38. Блохинцев Д. И. // ДАН СССР. 1953. Т. 82. С. 553; Nuovo Cim. 1956. V. 3, № 4. P. 629.
39. Блохинцев Д. И. // ДАН СССР. 1966. Т. 168. С. 774. — Статья № 93 в наст. изд. — *Прим. ред.*
40. Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хъеу. Препринт ОИЯИ Р2-4605. Дубна, 1969.
41. Барбашов Б. М., Черников Н. А. // ЖЭТФ. 1965. Т. 50, вып. 5. С. 1296.
42. Blokhintsev D. I. // Nuovo Cim. 1960. V. 16. P. 382.
43. Марцке Р., Уилер Д. // Гравитация и относительность: Сб. Пер. с англ. М.: Мир, 1965.
44. Марков М. А. К теории фридмонов. Препринты ОИЯИ Е2-644, 1966; Е2-5271, 1970; Р2-5289, 1970.
45. Блохинцев Д. И. // ТМФ. 1970. Т. 4. С. 145.
46. Snyder H. // Phys. Rev. 1947. V. 71. P. 38.
47. Тамм И. Е. // XII Междунар. конф. по физике высоких энергий. Дубна, 1964, т. II. С. 229.
48. Кадышевский В. Г. // ЖЭТФ. 1961. Т. 41. С. 1885; ДАН СССР. 1962. Т. 147. С. 588.
49. Dankov A. D. et al. JINR Preprint Е2-6992. Dubna, 1973.
50. Rund H. The differential geometry of Finsler Spaces. J. Springer, 1959. Имеется перевод: Х. Рунд. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981. — *Прим. ред.*
51. Блохинцев Д. И. // ТМФ. 1973. Т. 17. С. 153. — Статья № 100 в наст. изд. — *Прим. ред.*
52. Efimov G. V. // Com. Math. Phys. 1967. V. 5. P. 42; 1968. V. 7. P. 138.
53. Алебастров В. А., Ефимов Г. В. Сообщение ОИЯИ Р2-6586. Дубна, 1972.

Комментарий. Выдающийся русский ученый Д. И. Блохинцев всегда работал над проблемами, которые были на переднем крае теоретической физики. Основопологающей является его идея об особых свойствах пространства-времени на малых расстояниях. Целый ряд важных физических результатов был получен им при введении фундаментальной длины в физику микромира с целью устранения ультрафиолетовых расходимостей в квантовой теории поля. Основные положения и формулировка этого подхода были изложены в его оригинальных работах [1–4]. Он говорил, что «... теоретическая физика начинается с упорядочения событий». Это основа всех основ. Для упорядочения событий каждому точечному событию  $\mathcal{P}$  приписывается четверка

чисел  $\hat{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  — координат этого события. Эта операция называется арифметизацией событий.

В физике микромира представителями точечных событий являются элементарные частицы. Однако они не могут быть локализованы *точнее*, нежели

$$\Delta x \geq \hbar/m_0 c,$$

где  $m_0$  — масса частицы. Если предположить, что массы частиц ограничены сверху некоторой массой «максимона»  $M$  или планковской массой  $M_{Pl}$ , то это равносильно существованию в природе некоторой фундаментальной длины  $l$ . В этом случае точность определения координат точечного события  $\mathcal{P}(x)$  будет ограничена комптоновской длиной  $\hbar/Mc$  либо значением фундаментальной длины  $l$ .

Согласно Д. И. Блохинцеву допущение о существовании максимона или фундаментальной длины приводят к представлению о *стохастической пространстве*, в котором координаты события  $\mathcal{P}(\hat{x})$  могут быть представлены в виде суммы

$$\hat{x}_\mu = x_\mu + b_\mu(x), \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (1)$$

где  $x_\mu$  есть среднее значение координаты события  $\mathcal{P}(\hat{x})$  в классическом смысле. Величина  $b_\mu(x)$  является стохастической величиной, вероятность которой  $W(b_\mu)$  удовлетворяет соотношениям

$$\int dW(b_\mu) = 1, \quad dW(b_\mu) \geq 0. \quad (2)$$

Если речь идет о нерелятивистском движении частиц, то достаточно предположить стохастичность по пространственным по компонентам  $x_\mu$ :

$$\mathbf{x} \rightarrow \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{b},$$

где  $\mathbf{b}$  — универсальная стохастическая переменная с вероятностным распределением  $W(\mathbf{b}) = W(|\mathbf{b}|^2)$ , например:

$$W(\mathbf{b}) = (2\pi l^2)^{-3/2} \exp\left(-\frac{|\mathbf{b}|^2}{2l^2}\right),$$

где  $l$  — универсальная длина.

В релятивистском случае такая операция Блохинцева требует некоторого уточнения. В релятивистской теории пространство  $R_4(\hat{x}_\mu)$  должно быть пространством Минковского. *Индефинитность метрики* этого пространства приводит к ряду специфических проблем, которые отсутствуют в евклидовом пространстве.

Эти трудности связаны с требованиями *инвариантности* и условием *нормировки вероятности* того или иного значения интервала  $b^2 = b_0^2 - \mathbf{b}^2$  в пространстве с индефинитной метрикой [5]. Так, требование инвариантности означает, что распределение  $W(b_\mu)$  для вектора  $b_\mu$  должно быть функцией интервала  $b^2 = b_\mu b^\mu$ , а условие нормировки дает равенство

$$\int dW(b_\mu b^\mu) = 1.$$



Одновременное выполнение этих двух требований для  $W(b_\mu)$  в пространстве Минковского фактически невозможно.

Оказывается, что можно избежать упомянутых выше трудностей, если сделать следующие предположения [5]:

1. Стохастичность пространства  $R_4(\hat{x}_\mu)$  проявляется в евклидовой области переменных  $\hat{x}_E^\mu = x_E^\mu + b_E^\mu$ .

2. Физические величины рассматриваются как функции комплексного времени  $t + i\tau$  в пределе  $\tau \rightarrow 0$  ( $\tau$  — стохастическая переменная), что обеспечивает гипотезу о стохастичности евклидова пространства  $E_4(\hat{\mathbf{x}}, \tau)$  вместо стохастичности пространства Минковского  $R_4(\hat{\mathbf{x}}, t)$ . Обоснование важности сдвига времени  $t \rightarrow t + i\tau$  в квантовой теории поля и квантовой механике было дано Г. В. Ефимовым [6].

Используя эти предположения, нам [5] удалось построить нелокальную теорию квантованных полей вида

$$\Psi_l(x) = \int dW_l(b_4^2 + \mathbf{b}^2) \varphi(x_0 + ib_4, \mathbf{x} + \mathbf{b}),$$

где  $\Psi_l(x)$  и  $\varphi(\hat{x})$  — нелокальное и локальное поля соответственно. Явная форма вероятностного распределения  $W(b_\mu^2)$  прямо связана с нелокальной обобщенной функцией Г. В. Ефимова в евклидовом  $p$ -пространстве:

$$G_l(x) = K_l(l^2 \square) \delta^4(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} (\square l^2)^n \delta^4(x), \quad \square = -\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}.$$

В мировой литературе эта нелокальная теория получила название теории Г. В. Ефимова.

Согласно Д. И. Блохинцеву принципиальное значение имеет вывод о том, что нелокальный объект, определяемый некоторой длиной  $l$ , например, диполь с потенциалом вида

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r} \left(1 + \frac{2l}{r}\right) \quad (\epsilon_0 = 1),$$

может испустить нелокальный фотон, которому соответствует пропагатор [7]

$$D_{\mu\nu}^l(x) = \frac{-i}{(2\pi)^4} g_{\mu\nu} \int d^4p e^{ipx} \left[ \frac{1}{p^2 - i\epsilon} + \pi l \frac{-i\hat{p}}{p^2 - i\epsilon} \right]. \quad (3)$$

Ограничение на  $l$ , величину «размазки» нелокального объекта — диполя, можно получить из экспериментальных данных по измерению аномального магнитного момента электрона и мюона:

$$l \lesssim 4 \cdot 10^{-20} \text{ см.}$$

Второй член в выражении (3) соответствует пропагатору безмассового спинора, подобного фотину. Это в определенной степени указывает на единство физических законов в духе Блохинцева.

1. *Блохинцев Д. И.* Стохастическое пространство и нелокальное поле // ТМФ. 1973. Т. 17, вып. 2. С. 153–159. — Статья № 100 в наст. изд. — *Прим. ред.*
2. *Блохинцев Д. И.* «Элементарная длина» и эффект Мёссбауэра // ЯФ. 1973. Т. 17, вып. 4. С. 830–835. — Статья № 101 в наст. изд. — *Прим. ред.*
3. *Блохинцев Д. И.* Геометрия и физика микромира // УФН. 1973. Т. 110, вып. 4. С. 481–497. — Статья № 103 в наст. изд. — *Прим. ред.*
4. *Блохинцев Д. И.* Стохастические пространства // ЭЧАЯ. 1974. Т. 5, вып. 3. С. 606–644. — Статья № 104 в наст. изд. — *Прим. ред.*
5. *Namsrai Kh.* Nonlocal Quantum Field Theory and Stochastic Quantum Mechanics, D. Reidel, 1986, Dordrecht, Holland.
6. *Ефимов Г. В.* Нелокальные взаимодействия квантованных полей. М.: Наука, 1977.
7. *Namsrai Kh., Myanganbayar Ts.* Selected Problems of Contemporary Physics. Ulaanbaatar, 2008.

*Х. Намсрай*

## СУЩЕСТВЕННО-НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОЛЯ И ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА

Показано, что поведение плотности энергии взаимодействующих полей при больших градиентах находится в соответствии с классификацией по их перенормируемости. Рассмотрена также поляризация вакуума, приводящая к полям с ограниченными производными.

### 1. Поля при больших градиентах

В дальнейшем существенно-нелинейным полем называю поле, слабый разрыв которого («сигнал») распространяется со скоростью, зависящей от производных поля, самого поля или от того и другого сразу.

В этом разделе метод, который будет позднее применен к существенно-нелинейному полю, поясняется на примере более простых полей, подчиняющихся уравнениям с постоянными коэффициентами при высших производных. При этом будет показано, что возникающая простая классификация полей соответствует классификации полей по их перенормируемости.

Суть метода заключается в изучении поведения плотности энергии классического (неквантованного) поля, сосредоточенного в малой области размером  $\sim l$  и имеющего градиенты  $\partial/\partial x$ ,  $(1/c)(\partial/\partial t)$  порядка  $1/l$  при  $l \rightarrow 0^1$ .

**А.** Рассмотрим сначала скалярное поле  $\varphi(x, t)$  с самодействием. Для этого поля плотность энергии имеет вид

$$H = \frac{1}{2}[\dot{\varphi}^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2] + g\varphi^n. \quad (1)$$

Выражение в скобках есть плотность энергии свободного поля, последний член — энергия самодействия,  $g$  — константа самодействия. Введем вместо  $\varphi$ ,  $g$  и  $H$  безразмерные величины  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{g}$ ,  $\tilde{H}$  согласно формулам

$$\varphi = \frac{\sqrt{\hbar c}}{l} \tilde{\varphi}, \quad g = (\hbar c)^{1-n/2} \Lambda^{n-4} \tilde{g}, \quad H = \tilde{H} \frac{\hbar c}{l^4}. \quad (2)$$

<sup>1</sup> Заметим, что при функциональном интегрировании область интегрирования в интеграле Фейнмана, определяющем матрицу рассеяния, распространяющаяся на все возможные значения классического поля, неизбежно включает и указанную область значений поля.

Здесь  $\Lambda$  — некоторая длина, определяющая силу самодействия. Заметим, что величина  $\hbar c/l^4$  по порядку равна плотности нулевой энергии волны, длина которой равна  $l$ . Из (1) и (2) следует

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}'\tilde{\varphi}' + m^2 l^2 \tilde{\varphi}\tilde{\varphi}] + \tilde{g} \left(\frac{l}{\Lambda}\right)^{4-n} \tilde{\varphi}^n \quad (3)$$

(здесь  $\tilde{\varphi}'$  означает безразмерную производную). Из (3) видно, что при  $l \rightarrow 0$  самодействие исчезает, если  $n < 4$  — это «суперренормируемая» теория. При  $n = 4$  самодействие остается конечным — теория перенормируема. Наконец, при  $n > 4$  самодействие неограниченно растет — теория в этом случае перенормируема.

**В.** Обратимся теперь к электродинамике. В этом случае плотность энергии имеет вид<sup>1</sup>

$$H = (\hbar c \bar{\Psi} \hat{\partial} \Psi + m c^2 \bar{\Psi} \Psi) + e \bar{\Psi} \hat{A} \Psi + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4)$$

Обозначения очевидны. Положим здесь

$$\Psi = \frac{1}{l^{3/2}} \tilde{\Psi}, \quad A_\mu = \frac{\sqrt{\hbar c}}{l} \tilde{A}_\mu, \quad F_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{\hbar c}}{l^2} (\tilde{A}_{\mu\nu} - \tilde{A}_{\nu\mu}). \quad (5)$$

Отсюда и из (4) получим

$$\tilde{H} = \tilde{\Psi} \tilde{\Psi}' + m c l \tilde{\Psi} \tilde{\Psi} + \alpha^{1/2} \tilde{\Psi} \tilde{A} \tilde{\Psi} + \frac{1}{4} (\tilde{A}')^2. \quad (6)$$

Здесь  $\alpha = e^2/\hbar c$ . Из (6) видно, что при  $l \rightarrow 0$  плотность  $\tilde{H}$  остается конечной. Известно, что электродинамика перенормируема. Рассмотрим теперь следующий случай.

**С.** Слабое взаимодействие двух спинорных полей  $\Psi$  и  $\varphi$  посредством контактного взаимодействия токов. Выражение для плотности энергии теперь таково:

$$H = (\hbar c \bar{\Psi} \hat{\partial} \Psi + m_1 c^2 \bar{\Psi} \Psi) + (\hbar c \bar{\varphi} \hat{\partial} \varphi + m_2 c^2 \bar{\varphi} \varphi) + G_F \bar{\Psi} O^\lambda \Psi \bar{\varphi} O_\lambda \varphi. \quad (7)$$

Здесь  $m_1$  и  $m_2$  — массы спинорных полей,  $G_F$  — константа фермиевского взаимодействия,  $O_\lambda$  — оператор тока. Применяя здесь первую формулу из (5), получим

$$\tilde{H} = (\tilde{\Psi} \tilde{\Psi}' + m_1 c l \tilde{\Psi} \tilde{\Psi}) + (\tilde{\varphi} \tilde{\varphi}' + m_2 c l \tilde{\varphi} \tilde{\varphi}) + \frac{\Lambda_F^2}{l^2} \tilde{\Psi} O^\lambda \Psi \tilde{\varphi} O_\lambda \tilde{\varphi}, \quad (8)$$

$\Lambda_F = (G_F \hbar c)^{1/2} = 0,67 \cdot 10^{-16}$  см. При  $l \rightarrow 0$  плотность энергии взаимодействия неограниченно растет и не может быть скомпенсирована плотностью

<sup>1</sup> В формуле (4) и далее рассматривается плотность функции Лагранжа, т. е. плотность для разности кинетической и потенциальной энергий. — *Прим. ред.*

кинетической энергии<sup>1</sup>. Теория слабого взаимодействия неперенормируема. Ситуация меняется, если контактное взаимодействие заменить взаимодействием через промежуточный бозон (поле  $B_\mu$ ). Теперь плотность энергии примет вид

$$\hat{H} = T_1 + T_2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial B_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\mu} \right)^2 + \frac{M^2}{2} B^\mu B_\mu + g_1 \bar{\Psi} O_\lambda \Psi B^\lambda + g_2 \bar{\varphi} O_\lambda \varphi B^\lambda, \quad (9)$$

где через  $T_1$  и  $T_2$  обозначена плотность свободных спинорных полей (первые два члена в (8)), следующие два члена в (9) — плотности энергии бозонного поля,  $M$  — масса промежуточного бозона. Два последних члена — взаимодействие бозонного поля с фермионными, причем  $g_1 g_2 / M^2 = G_F$ . Полагая

$$B_\mu = \frac{\sqrt{\hbar c}}{l} \tilde{B}_\mu,$$

без труда убедимся, что

$$\tilde{H} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + \frac{1}{4} (\tilde{B}')^2 + \frac{M^2}{2} l^2 \tilde{B}^2 + \tilde{g}_1 \bar{\Psi} O_\lambda \tilde{\Psi} \tilde{B}^\lambda + \tilde{g}_2 \bar{\varphi} O_\lambda \varphi \tilde{B}^\lambda. \quad (10)$$

Это выражение при  $l \rightarrow 0$  остается конечным. При этом  $\tilde{g}_1 = g_1 / \sqrt{\hbar c}$ ,  $\tilde{g}_2 = g_2 / \sqrt{\hbar c}$ . Теория становится перенормируемой<sup>2</sup>.

**Д.** Кирально-симметричное поле  $\Pi_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ). В этом случае плотность энергии имеет вид

$$H = \frac{1}{2} g_{ab} (\dot{\Pi}_a \dot{\Pi}_b + \nabla \Pi_a \nabla \Pi_b), \quad (11)$$

причем киральный тензор  $g_{ab}$  равен [3]

$$g_{ab} = A \delta_{ab} + B \frac{\Pi_a \Pi_b}{\Pi^2}, \quad (12)$$

$$B = 1 - A, \quad A = (\sin z / z)^2, \quad z = \Pi / \Pi_0, \quad (13)$$

где  $\Pi_0$  — некоторая константа [2]. Полагая

$$\Pi = \frac{\sqrt{\hbar c}}{l} \tilde{\Pi}, \quad z = \frac{\sqrt{\hbar c}}{l \Pi_0},$$

убеждаемся, что безразмерная плотность  $\tilde{H}$  остается конечной при  $l \rightarrow 0^3$ . В этом случае бесконечности устраняются методом суперпропагатора [3].

<sup>1</sup> Этот вывод был приведен автором еще в 1957 г. в работе, посвященной слабому взаимодействию [1].

<sup>2</sup> Теория (9) перенормируема в том случае, если масса векторного поля генерируется механизмом Хиггса.

<sup>3</sup> Заметим, что, несмотря на зависимость тензора  $g_{ab}$  от поля  $\Pi$ , кирально-симметричное поле имеет прямолинейные характеристики и поэтому не относится к классу существенно-нелинейных полей.

## 2. Существенно-нелинейное поле

Простейшим примером существенно-нелинейного поля является скалярное поле  $\varphi$ , уравнения для которого определяются лагранжианом

$$L = L(K), \quad K = \frac{1}{2}[\dot{\varphi}^2 - (\nabla\varphi)^2]. \quad (14)$$

Ради упрощения последующего обсуждения ограничимся случаем двух измерений  $(t, x)$ . При этом упрощении уравнение для поля принимает вид

$$g_{00} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2g_{01} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + g_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (15)$$

где

$$g_{00} = 1 + \alpha p^2, \quad g_{01} = \alpha p q, \quad g_{11} = -(1 - \alpha q^2), \quad (16)$$

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad q = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \alpha = \frac{d^2 L}{dK^2} / \frac{dL}{dK}. \quad (17)$$

Скорость распространения сигнала (слабого разрыва) для такого поля равна [4, 5]

$$u^{\pm} = \frac{1}{g_{00}}(g_{01} \pm \sqrt{-D}), \quad (18)$$

$$D = g_{00}g_{11} - g_{01}^2 = -[1 + \alpha(p^2 - q^2)]. \quad (19)$$

Две скорости различных направлений получаются лишь при условии, что  $D < 0$  и  $g_{00}$  и  $g_{11}$  имеют различные знаки (нормальное поведение). Если же знаки  $g_{00}$  и  $g_{11}$  одинаковы, то обе скорости  $u^{\pm}$  имеют одно и то же направление. В этом случае не существует отраженного сигнала — наступает явление «коллапса» для поля  $\varphi$ . При  $D > 0$  скорости становятся комплексными. Уравнение превращается в уравнение эллиптического типа. Время и пространство перестают различаться (по полю  $\varphi$ ). Это явление было названо автором образованием «комка» событий (см. [5])<sup>1</sup>.

Таким образом, область нормального поведения классического поля ограничивается условиями

$$D < 0, \quad g_{00} \geq 0, \quad g_{11} \leq 0. \quad (20)$$

На основании (17) и (19) эти условия гласят

$$1 + \alpha(p^2 - q^2) > 0, \quad 1 + \alpha p^2 \geq 0, \quad 1 - \alpha q^2 \geq 0. \quad (21)$$

Условия (21) означают ограничение на допустимые значения производных, которое должно быть учтено в функциональном интеграле Фейнмана при интегрировании в функциональном пространстве  $R\{\varphi(x, t)\}$ .

<sup>1</sup> В этой связи интересно подробнее изучить ситуацию в гравитационном поле при коллапсе: не происходит ли там после коллапса возникновения «комка» событий?

Полагая опять  $\varphi = (\sqrt{\hbar c}/l)\tilde{\varphi}$  и замечая, что лагранжиан (14) является функцией вида  $L(K) = b_0^2 F(K/b_0^2)$  ( $b_0$  есть масштаб поля, определяющий нелинейность уравнений), получим для меры производных поля отношение

$$\gamma = \frac{\sqrt{\hbar c}}{l^2} \frac{1}{b_0}. \quad (22)$$

Это отношение не должно превосходить величин порядка 1. Отсюда

$$l > \left( \frac{\hbar c}{b_0^2} \right)^{1/4}. \quad (23)$$

Таким образом, возникает ограничение на величину градиентов поля, иными словами на длину волны. Более точное условие (23) может быть сформулировано только на основании знания коэффициента  $\alpha(K/b_0^2)$ .

В частности, для лагранжиана типа Борна–Инфельда

$$L = b_0^2 [\varepsilon \sqrt{1 + 2\varepsilon K/b_0^2} - \varepsilon], \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (24)$$

ограничения на производные, вытекающие из (21), гласят

$$b_0^2 + \varepsilon(p^2 - q^2) > 0, \quad b_0^2 + \varepsilon p^2 > 0, \quad b_0^2 - \varepsilon q^2 > 0. \quad (25)$$

В класс полей, описываемых лагранжианом (24), входит поле «одномерной струны», изученное в работе [6]. В последнее время интерес к теории такой струны повысился в результате работ [7, 8], указавших на связь этой теории с теорией дуальной амплитуды Венециано.

### 3. Поляризация вакуума

В этом разделе мы рассмотрим поляризацию вакуума фермионного поля  $\Psi$  большой массы  $M$ . Это поле может быть интерпретировано как поле «партонов», «кварков» или «максимонов». Под понятием «максимон» я разумею частицы большой (предельной) массы, которые могут и не существовать в свободном состоянии из-за большой константы распада  $\Gamma$ , сравнимой с самой массой  $\Gamma \simeq M$ .

Рассмотрим поляризацию такого вакуума, вызванную сходящейся сферической волной некоторого бозонного поля  $\varphi$ , масса которого  $m \ll M$ . Поляризация вакуума определяется полем

$$b_0 = \frac{Mc^2}{g} \frac{1}{\hbar/Mc} = \frac{M^2 c^3}{g\hbar}, \quad (26)$$

имеющим простой смысл: работа этого поля на длине  $\hbar/Mc$  равна  $Mc^2$  (ср. [9]). За меру поля  $\varphi$ , как и раньше, примем величину  $\sqrt{\hbar c}/l$ , так что  $\varphi = (\sqrt{\hbar c}/l)\tilde{\varphi}$  ( $\tilde{\varphi} \simeq 1$ ). Поляризация вакуума, вызванная волной  $\varphi$ , будет зна-

чительной, если величина  $\gamma$  (22) будет порядка единицы. С другой стороны, при  $\gamma$ , близкой к 1, возникает указанное выше ограничение на производные поля  $\varphi$ . Это ограничение с учетом (22), (23) гласит:

$$l \geq \left( \frac{g^2}{\hbar c} \right)^{1/4} \frac{\hbar}{Mc}. \quad (27)$$

Поляризация вакуума будет значительной, когда это соотношение близко к равенству.

Для того чтобы поле  $\varphi$  адекватно описывалось лагранжианом, принадлежащим к классу существенно-нелинейных (14), необходимо, чтобы соблюдалось условие квазистационарности

$$\left| \frac{\hbar}{Mc} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| = \left| \frac{\hbar}{Mc} \frac{1}{l} \varphi \right| \ll |\varphi|, \quad (28)$$

т.е.  $l \gg \hbar/Mc$ . При  $g^2/\hbar c \gg 1$  существует область значений поля и его производных, для которых соблюдается условие (28) и достигается равенство в (27). Это означает, что в этой ситуации бозонное поле при приближении к максимуму становится существенно-нелинейным. В частности, не исключено и аномальное поведение поля (коллапс).

Из (27) и (28) следует, что ничего подобного не может быть в электродинамике, так как равенство в (27) достигается в этом случае при  $l \ll \hbar/Mc$ ; исключение составят системы с  $Z > 137$ .

### Список литературы

1. Блохинцев Д. И. // УФН. 1957. Т. 62. С. 381; 1973. Т. 110. С. 482. — Статьи 86 и 103 в наст. изд. — *Прим. ред.*
2. Волков М. К., Первушин В. Н. JINR Preprints E2-7661, E2-7283. Dubna, 1973.
3. Volkov M. K. // Ann. Phys. 1968. V. 49. P. 202.
4. Блохинцев Д. И. // ДАН СССР. 1952. Т. 82. С. 553. — Статья 81 в наст. изд. — *Прим. ред.*
5. Блохинцев Д. И. Пространство и время в микромире. М.: Наука, 1970.
6. Барбашов Б. М., Черников Н. А. // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. С. 1296.
7. Cadard P. et al. // Nucl. Phys. 1973. V. 856. P. 109.
8. Барбашов Б. М., Черников Н. А. Препринт ОИЯИ Р-2151. Дубна, 1965.
9. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1969.



## О ГИПОТЕЗЕ РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ ВСЕЛЕННОЙ

Несомненный факт существования красного смещения в спектре излучения, идущего от удаленных галактик, рост этого смещения с ростом расстояния до них, а также малое значение средней плотности космической материи  $\rho = (0,5 - 1,5) \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3 < \rho_{\text{кр}} = 5 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3$  указывают на то, что пространство нашей Вселенной является замкнутым и расширяющимся с течением времени<sup>1</sup>. Эта модель геометрии Вселенной была разработана выдающимся русским ученым А. А. Фридманом еще в 20-х годах [1]. Модель Фридмана, дополненная идеей Г. Гамова [2] о «горячей» Вселенной, в недавние годы получила основательное подтверждение в открытии реликтового излучения [3].

Последовательный синтез этих гениальных идей приводит к представлению о том, что вся материя Вселенной, в раннюю пору своего развития, т. е.  $\sim 10^{10}$  лет тому назад, была сконцентрирована в крайне малых размерах и нагрета до высочайшей температуры. По мере расширения этой материи в возрасте  $\sim 1$  с температура, как оценивается теоретически, упала до  $10^{10} \text{ К}$  и дальнейшая эволюция материи в процессе ее расширения и охлаждения уже поддается теоретическому расчету (по крайней мере, при некоторых дополнительных предположениях) [4].

Таким образом, речь идет, собственно говоря, о взрыве. Американцы называют его «Big Bang», будем называть его более почтительно: «Великий взрыв» (ВВ). Поскольку этот взрыв имел место в прошлом, удаленном от нашей эпохи на конечное время, то неизбежно возникает вопрос и о его происхождении, и о начальном состоянии материи в момент, последующий ВВ.

Если бы ВВ имел место при  $t = -\infty$ , то вопрос о его происхождении, разумеется, бы не возникал бы, попросту по той причине, что ранее  $t = -\infty$  ничего быть не могло по определению понятия  $\infty$ . Возникающая дилемма имеет также глубокое методологическое значение. В самом деле, если ВВ имел место при конечном времени  $t_0 = -T$ , где  $T$  — возраст нашей Вселенной, то мы должны допустить, что при  $t < t_0$  ничего не существовало и, следовательно, наша Вселенная возникла из ничего. Такая методологическая позиция вряд ли может считаться приемлемой. Поэтому или  $t_0 = -\infty$

---

<sup>1</sup> Если  $\rho > \rho_{\text{кр}}$ , то пространство было бы периодически расширяющимся и сжимающимся. Ввиду того, что данные о величине  $\rho$  могут измениться, нельзя считать, что модель Вселенной, о которой идет речь в статье, является доказанной эмпирически. Пока это лишь весьма вероятная гипотеза.

(и, стало быть,  $T = \infty$ ), или следует со всей ясностью поставить вопрос о том, что было до ВВ, т. е. при  $t < t_0$ ?

Состояние материи и ее эволюция для возраста Вселенной  $t < 1$  с крайне неясно. Обычно предполагают, что в этот период было много нуклонных пар (нуклонов и антинуклонов), которые в дальнейшем выгорели (аннигилировали). При этом остается необъяснимым тот факт, что известная нам Вселенная состоит из вещества, а не из антивещества. Эта асимметрия представляет серьезнейшую трудность для разрабатываемых ныне моделей горячей Вселенной. Решить ее, по-видимому, невозможно без обращения к той или иной гипотезе о происхождении ВВ.

Наиболее простым предположением было бы предположение о происхождении ВВ при столкновении тел огромной энергии, содержащих то или иное количество вещества и антивещества. В работе [5] было высказано предположение, что макроскопические количества вещества могли бы в принципе образовываться и при столкновении элементарных частиц крайне высокой энергии. Это предположение основывалось на том факте, что сечение образования новых частиц при столкновении двух элементарных частиц не убывает с ростом энергии. Если эта тенденция будет сохраняться и в пределе крайне высоких энергий, то при столкновении нуклонов с такой энергией, полученной за счет ускорения в космических полях, могли бы рождаться макроскопические тела, массы которых  $m$  ограничены только величиной относительной энергии  $w$  сталкивающихся частиц,  $m < w/c^2$ . В принципе допустимо рождение звезд не в лабораторном смысле, а в смысле астрономическом. Так могла бы возникнуть прямая связь микроскопических и макроскопических явлений, в частности явлений астрономических.

Однако в начальной стадии Великого взрыва в пространстве Фридмана, сжатом до крайне малого объема, нет места для предполагаемого движения сталкивающихся тел, будь то тела и антитела или элементарные частицы и античастицы. Поэтому возникает идея о том, что материальные объекты, порождающие ВВ, до этого взрыва находятся вне фридманова пространства-времени, принадлежат другому, более обширному пространственно-временному многообразию, которые назовем метапространством  $\mathcal{M}_n$ .

Простейшая модель такого многообразия могла бы быть такова: метапространство  $\mathcal{M}_n$  есть плоское псевдоевклидово пространство с числом пространственных измерений  $m > 3$  и одним временным измерением, допускающим понятие временной последовательности событий; итого  $n = m + 1$  измерение. Соответствующий интервал  $ds$  в таком пространстве определяется формулой

$$ds^2 = dx_0^2 - \sum_{k=1}^m dx_k^2. \quad (1)$$

В таком пространстве нет гравитации.

Рассмотрим теперь четырехмерную гиперповерхность в метапространстве  $\mathcal{M}_n$

$$x_\mu = F_\mu(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (2)$$

где  $\xi_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , суть координаты точки на этой поверхности. Интервал длины на этой поверхности  $d\sigma$  будет иметь вид

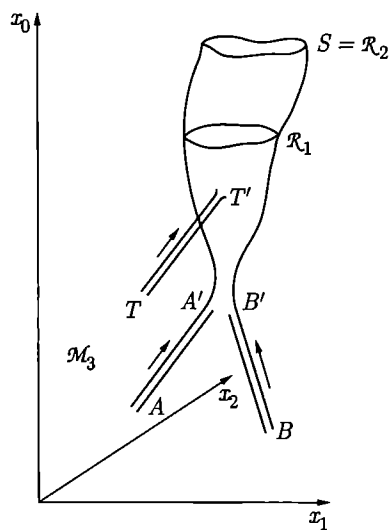
$$d\sigma^2 = g_{\alpha\beta} d\xi_\alpha d\xi_\beta, \quad (3)$$

где метрический тензор  $g_{\alpha\beta}$  есть функция точки на гиперповерхности  $\mathcal{R}_4(\xi)$ . Ограничимся рассмотрением поверхностей, для которых  $g_{00} > 0$ ,  $\det g_{\alpha\beta} < 0$ . Таким образом, на поверхности  $\mathcal{R}_4(\xi)$  определено риманово пространство с локальной псевдоевклидовой метрикой, со знаками компонент метрического тензора  $+- - -$  (в системе координат, в которой  $g_{\alpha\beta} = 0$  при  $\alpha \neq \beta$ ).

Будем рассматривать такую поверхность как физическую поверхность, заполненную материей. Тогда согласно основному уравнению общей теории относительности распределение материи (импульса и энергии) будет определяться тензором  $T_{\alpha\beta}(\xi)$ :

$$T_{\alpha\beta} = \frac{c^4}{8\pi k} (R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R), \quad (4)$$

где  $R_{\alpha\beta}$  — тензор кривизны Риччи, а  $R$  — скалярная кривизна пространства  $\mathcal{R}_4(\xi)$ ,  $k$  — постоянная тяготения<sup>1</sup>.



В этой концепции наша Вселенная (метагалактика) рассматривается погруженной в псевдоевклидово метaproстранство  $\mathcal{M}_n(x)$  и полностью заключена внутри искривленного пространства  $\mathcal{R}_4(\xi)$ . Предположение о существовании метaproстранства  $\mathcal{M}_n$ ,  $n > 4$ , открывает возможность для обсуждения событий, предшествовавших ВВ.

Суть моей гипотезы заключается в предположении, что в метaproстранстве  $\mathcal{M}_n$  свободно движутся тела и антитела (лучше называть их метателами и метаантителями), а метагалактики рождаются при столкновении подобных метател. Более детально определять природу этих метател было бы преждевременно. Пока здесь остается большая свобода для спекуляций: это могли бы быть элементарные частицы, обладающие огромной энергией относительного движения, или огромные массивные тела и антитела.

Хотя начальное состояние ВВ не может быть сейчас определено точнее, но гипотеза о том, что с самого начала в сталкивающихся метателах преобладало вещество (а не антивещества), становится весьма естественной. Вместе с тем отпадает основная трудность для модели горячей Вселенной, состоящая в явном преобладании вещества над антивеществом в видимой Вселенной.

<sup>1</sup> Разумеется, эти уравнения еще должны быть дополнены уравнениями движения материи, например гидродинамическими релятивистскими уравнениями.

На основе рассматриваемой гипотезы данные о состоянии вещества в начальной стадии расширения горячей Вселенной должны быть пересмотрены.

Из рассматриваемой гипотезы вытекает возможность залета в фридманово пространство нашей Вселенной  $\mathcal{R}_4(\xi)$  метател (или метаантител) из метапространства  $\mathcal{M}_n(x)$ . Столкновение такого рода метател с массивными объектами нашей метagalактики могло бы быть наблюдаемым явлением, сопровождающимся огромным выделением энергии. Этот вывод из развиваемой концепции находит поддержку в интересной теории В. А. Амбарцумяна [6] о рождении новых звезд из некоторого плотного взрывающегося ядра.

Из предположения о существовании метапространства следует, что идея о единственности нашей метagalактики не может быть обоснована. Более того, естественно предполагать, что могут существовать различные по размерам и своей внутренней геометрии метagalактики, возникшие в результате столкновений различных метател. Не исключается также возможность, что при такого рода столкновениях рождается не одна, а две или более метagalактик или метagalактики и антиметagalактики, подобно тому как при столкновении элементарных частиц рождаются многие частицы и античастицы.

На рисунке на примере трехмерного метапространства  $\mathcal{M}_3$  иллюстрируется сказанное. Линии  $AA'$  и  $BB'$  суть трубки, изображающие движение метател в  $\mathcal{M}_3$ . Окрестность точек  $A'B'$  есть район их столкновения — область  $BB$ . Поверхность  $S$  есть пространство-время  $\mathcal{R}_2$  образовавшейся метagalактики. Наконец, кольцо  $\mathcal{R}_1$  есть одномерное пространство расширяющейся метagalактики. Трубка  $TT'$  иллюстрирует движение метатела, залетающего во Вселенную из метапространства (окрестность точки  $T'$  на поверхности  $S$ ).

## Список литературы

1. Фридман А. А. Избранные труды. М., 1966.
2. Gamov G. // Phys. Rev. 1948. V. 74. P. 505; Rev. Mod. Phys. 1949. V. 21. P. 367.
3. Penzias A. A., Wilson R. W. // Astrophys. J. 1965. V. 142, № 1. P. 419.
4. Зельдович Я. Б. // УФН. 1968. Т. 89, вып. 4.
5. Блохинцев Д. И. Природа. 1959. № 9. С. 25. — Статья 112 в наст. изд. — Прим. ред. УФН. 1959. Т. 69. С. 3.
6. Амбарцумян В. А. // Звездные ассоциации. Научн. труды, т. 2. Ереван, 1960.

Объединенный институт  
ядерных исследований

Поступила  
23 марта 1976 г.

Комментарий. В данной работе Д. И. Блохинцев фактически предвосхитил так называемый сценарий Вселенной на бране (brane world scenario),

который очень популярен в настоящее время (см., например, Roy Maartens «Brane-world gravity», Living Rev. Rel. V. 7, 7 (2004); arXiv: gr-qc/0312059v2). В этом подходе наша Вселенная рассматривается как 3-мерный объект (брана), движущийся в объемлющем многомерном пространстве (в «балке»). Поля материи, фигурирующие в стандартной модели, «живут» на бране, в то время как гравитационное поле в силу своей универсальности распространяется и в балке. В этом подходе удастся рассматривать также макроскопически большие дополнительные размерности (L. Randall and R. Sundrum. Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 3370; 4690). Конечно, полного совпадения этих двух подходов нет, но идейно они очень близки.

*В. В. Нестеренко*

## ДИНАМИКА КВАРКОВ\*

Предложена кварковая модель адрона, базирующаяся на стохастической Г-геометрии и позволяющая рассматривать связанные кварки как свободные когерентные частицы.

Проблема удержания кварков внутри адронов бросает серьезный вызов современной квантовой теории поля. Известные сейчас модели «мешков», предназначенные для удержания кварков в адронах, оказываются сложными и не соответствуют простоте кварковой модели.

Являясь структурными элементами адронов, кварки не обязаны следовать предписаниям квантовой теории поля, предназначенной для описания динамики точечных частиц. Поэтому есть основание ожидать, что динамика кварков подчиняется законам, принципиально отличным от законов, диктуемых квантовой теорией поля. В этой работе рассматривается такая возможность, основанная на стохастической Г-геометрии.

Эта геометрия изложена в [1] и [2]. В настоящей работе мы заимствуем из цитированных работ основное положение, согласно которому координаты точки в такой геометрии являются операторами:

$$\hat{X}_\mu = x_\mu + \hat{\xi}_\mu, \quad (1)$$

здесь  $x_\mu$  — средняя координата, а  $\hat{\xi}_\mu$  — стохастическая флуктуация координаты этой точки. Эта последняя величина есть оператор, определяемый в Г-геометрии формулой

$$\hat{\xi}_\mu = a\gamma_\mu, \quad (2)$$

где  $a$  — масштаб флуктуации, а  $\gamma_\mu$  — обычные матрицы Дирака. Из (2) следует правило коммутации

$$[\hat{\xi}_\mu, \hat{\xi}_\nu] = 2ia^2 \Sigma_{\mu\nu}, \quad (3)$$

где  $\Sigma_{\mu\nu}$  — матрица  $\gamma_\mu\gamma_\nu$ ,  $\mu \neq \nu$ .

Исходя из (1) рассмотрим свойства стохастической окрестности точки  $x$ . Переписав (1) в виде  $\hat{\xi}_\mu = \hat{H}_\mu - x_\mu$ , мы находим, что стохастический интервал в Г-геометрии равен

$$\hat{s}^2 = \sum_{\mu=1}^4 (\hat{X}_\mu - x_\mu)^2 = \hat{\xi}_4^2 + \hat{\xi}_3^2 + \hat{\xi}_2^2 + \hat{\xi}_1^2 = 4a^2, \quad (4)$$

является постоянной положительно-дефинитной величиной и указывает на евклидов характер рассматриваемого  $\Gamma$ -пространства. В силу (4) имеем

$$[\hat{s}^2, \hat{\xi}_\mu] = 0. \quad (5)$$

Из (3) и (5) видно, что точка  $\Gamma$ -пространства в окрестности  $x$  может быть описана величиной  $\hat{s}^2$  и собственным значением одной из координат  $\text{Eigw } \hat{\xi}_\mu = \pm a$ ; остальные три координаты будут при этом неопределенными. Собственные значения координат  $\hat{\xi}_\mu$  определяются из уравнений

$$\hat{\xi}_\mu \Phi = \lambda \Phi, \quad (6)$$

здесь  $\Phi$  является биспинором, приводящим оператор  $\hat{\xi}_\mu$  к диагональному виду.

Нетрудно показать, что собственные значения координатных операторов  $\hat{\xi}_\mu$  равны  $\pm a$ .

Из соотношений (3) и уравнений (6) следует, что в окрестности точки  $x$  можно разместить шесть объектов, имеющих одну из пространственных координат с определенным значением  $+a$  или  $-a$ . Эти точки следующие:

$$\pm a, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3; \quad \hat{\xi}_1', \pm a, \hat{\xi}_3'; \quad \hat{\xi}_1'', \hat{\xi}_2'', \pm a. \quad (7)$$

Если в какой-либо из этих точек находится реальная частица, обладающая импульсом  $p$  и массой  $M$ , то в  $\Gamma$ -пространстве ей может быть приписан оператор собственного времени  $\hat{\tau}$ :

$$\hat{\tau} = \frac{1}{i}(N\hat{\xi}), \quad (8)$$

где  $N = p/M$ ,  $N^2 = -1$ . Этот оператор коммутирует с  $\hat{s}^2$ , но не коммутирует с координатами

$$[\hat{\tau}, \hat{\xi}_\mu] = 2a^2(N_\alpha \Sigma_{\alpha\mu}), \quad \alpha \neq \mu. \quad (9)$$

Таким образом, в присутствии частицы имеется еще один оператор, коммутирующий с  $\hat{s}^2$ . Оператор  $\hat{\tau}$  имеет собственные значения, определяемые из уравнения

$$\hat{\tau}\Psi = \tau\Psi. \quad (10)$$

Его собственные значения равны

$$\tau = \pm \frac{1}{i} a \sqrt{N^2} = \pm a. \quad (11)$$

Это следует из уравнения (10) совместно с уравнением Дирака для частицы, описываемой спинором

$$\Psi = \Psi(x_\mu + \hat{\xi}_\mu). \quad (12)$$

Заметим, что зависимость  $\Psi$  от аргумента  $\hat{\xi}_\mu$  напоминает здесь теорию суперполя.

Уравнение Дирака гласит

$$\gamma^\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} + M \Psi = 0. \quad (13)$$

Для «свободной» частицы с импульсом  $p$  это уравнение приводится к форме

$$i(\gamma^\mu p_\mu)u(p) + Mu(p) = 0, \quad (14)$$

а его решение имеет вид

$$\Psi = u(p) e^{ipX} = u(p) e^{ipx - M\tau}, \quad (15)$$

где  $u(p)$  — обычный биспинор для свободной частицы, имеющей импульс  $p$ . Из сравнения (11) и (14) следует, что спинор  $\Psi$  совпадает со спинором в уравнении (10), так что  $\tau$  в (15) равно  $\pm a$  в зависимости от знака  $N_0$  в (8), что соответствует знаку энергии  $E = (1/i)p_4$  в уравнении (14).

Если задано собственное значение собственного времени частицы  $\hat{\tau}$ , то ее координаты  $\hat{\xi}_\mu$  согласно (9) неопределенны: определенность ее положения в окрестности точки  $x$  несовместима с информацией о ее движении в пространстве координат  $\hat{X}_\mu$ . Для получения такой информации необходимо привести к диагональному виду операторы  $\hat{\xi}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Спинор  $\Phi$  в (6) не совпадает со спинором  $\Psi$  в (13) и (14). Спинор  $\Phi$  описывает тахионное состояние частицы. Возможные тахионные состояния содержатся в (7). Если принять соглашение, что две частицы не могут находиться на одной пространственной прямой в  $\Gamma$ -пространстве, то мы придем к выводу, что в этом пространстве можно разместить лишь три частицы, имеющие определенные, но различные положения в пространстве  $\Gamma_3$  и неопределенное время  $\hat{\xi}_4$ . Эти частицы описываются обязательно спинорами.

Эти соображения приводят к заключению о целесообразности отождествить их с кварками; три возможных положения кварков наводят на мысль о соответствии их с цветом кварков. Размещая три кварка около точки  $x$ , мы будем рассматривать их координаты  $\hat{\xi}_k$  как относительные координаты, а  $x_k$  как координаты их центра масс. Это возможно в силу того, что сумма любых трех координат  $\hat{\xi}'_k + \hat{\xi}''_k + \hat{\xi}'''_k$  в среднем для состояния с определенным  $\tau$  равна нулю:

$$\langle \hat{\xi}'_k + \hat{\xi}''_k + \hat{\xi}'''_k \rangle = 0. \quad (16)$$

Трехкварковая система  $q'q''q'''$  будет описываться трехиндексным спинором, причем «кварковая» масса  $m$  бариона будет равна

$$m = M' + M'' + M'''. \quad (17)$$

При этом все три кварка размещены в состоянии  $\tau' = \tau'' = \tau''' = +a$ , их координаты  $\hat{\xi}$  неопределенны, но находятся на сфере (4) и не могут выйти за ее пределы.

Для системы кварк-антикварк  $q\bar{q}$  возможно размещение с  $\tau' = a$  и  $\tau'' = -a$  соответственно.



Важной особенностью описанной динамики кварков является то обстоятельство, что, несмотря на существование конечного размера кварковой области адрона  $\hat{s}^2 = 4q^2$ , которую кварки не могут покинуть, модель обладает свойством скэйлинга и совмещает представление связанных кварков с описанием их как собственных частиц. Незавершенной остается динамическая картина адронов с высшими спинами, лежащими на траекториях Редже. Здесь возможны, по крайней мере, два различных варианта, среди которых еще не удастся сделать выбор. Поэтому изложенная выше идея «геометрической тюрьмы» для кварков пока должна рассматриваться как любопытная абстрактная возможность.

### Список литературы

1. Блохинцев Д. И. // ТМФ. 1973. Т. 17. С. 153. — Статья № 100 в наст. изд. — Прим. ред.
2. Блохинцев Д. И. // ЭЧАЯ. 1974. Т. 5. С. 606. — Статья № 104 в наст. изд. — Прим. ред.

Объединенный институт  
ядерных исследований

Поступила  
27 сентября 1976 г.

## КВАРКИ В КВАНТОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ\*

Рассматриваются следствия для кинематики кварков, вытекающие из предположения о квантовании пространства. Показано, что существуют только две упорядоченные в пространстве структуры из двух или трех частиц. На этой основе дана геометрическая интерпретация цвета.

### 1. О квантовании пространства

Общая постановка вопроса такова: вместо числовых координат точек  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , образующих дифференцируемое многообразие  $\mathcal{M}_4(x)$  (допускающее определенную метрику), рассматриваются линейные операторы  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4$ , в общем случае не коммутирующие между собой. При этом возникает вопрос о числовых («измеримых») значениях координат точечного события и об упорядочении событий в таком операторном пространстве  $\mathcal{M}_4(\hat{x})$ .

Единственный разумный ответ на вопрос, поставленный выше относительно числового многообразия, определяемого операторами  $\hat{x}_\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3, 4$ ), заключается в допущении возможности отображения такого операторного пространства на пространство собственных значений операторов  $\hat{x}$  или функций от них  $f(\hat{x})$ , образующих полный набор переменных. Этот набор должен быть достаточным для упорядочения точек в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве.

В соответствии с данной постановкой проблемы мы допускаем в каждой точке пространства  $\mathcal{M}_4(\hat{x})$  существование пространства  $\mathcal{H}(\Phi)$  собственных функций  $\Phi$ , образующих такой полный набор.

Рассмотрим в дальнейшем три примера операторного пространства, из которых последний будет применен к теории кварков.

**Пример 1.** Положим  $\hat{x}_\mu = i\partial/\partial p_\mu$ , где  $p_\mu$  — сопряженный импульс. Точки  $p$  образуют плоское пространство Минковского  $\mathcal{M}_4(p)$ . В этом случае операторы  $\hat{x}_\mu$  коммутируют между собой и имеют общие собственные функции  $\Phi = e^{ip_\mu x'_\mu}$ , где  $x'_\mu$  есть собственное значение оператора  $\hat{x}_\mu$ . Ситуация в этом примере тривиальная. Пространство  $\mathcal{M}_4(\hat{x})$  соответствует числовому пространству  $\mathcal{M}_4(x')$ .

**Пример 2.** Предполагается, что пространство импульсов  $\mathcal{M}_4(p)$  обладает постоянной кривизной. Операторы  $\hat{x}_\mu$  в этом случае рассматриваются как операторы сдвига в этом искривленном пространстве. Такая возможность была указана Снайдером [1] много лет тому назад и обстоятельно изучалась в работах В. Г. Кадышевского и его сотрудников [2, 3].

В качестве пространства  $\mathfrak{M}_4(p)$  принималось пространство де Ситтера  $S_4(p)$  — пространство с постоянной отрицательной кривизной. Его геометрия совпадает с геометрией гиперboloида в плоском пятимерном пространстве:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = -1/a^2, \quad (1)$$

причем здесь  $p_4 = ip_0$ ,  $p_5 = iq_0$  ( $p_0$ ,  $q_0$  действительны). Операторы  $\hat{x}_\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3, 4$ ) теперь не коммутируют между собой:

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = ia^2 \hat{\mathcal{M}}_{\mu\nu}, \quad (2)$$

где  $\hat{\mathcal{M}}_{\mu\nu}$  — оператор вращения,  $a$  — некоторая элементарная длина, определяющая кривизну пространства импульсов.

В силу (2) собственные значения операторов координат  $\hat{x}_1$ ,  $\hat{x}_2$ ,  $\hat{x}_3$ ,  $\hat{x}_4$  не могут образовать полного набора из четырех переменных. Как было показано в работах [2, 3], этот набор может быть найден, если в его основу положить собственные значения оператора Казимира группы де Ситтера  $SO(2, 3)$ :

$$\hat{S}^2 = \mathcal{M}_{kl} \mathcal{M}^{kl}, \quad (3)$$

где  $k, l = 1, 2, 3, 4, 5$ . Этот инвариантный оператор принимается за оператор интервала  $\hat{S}^2$ . При  $a \rightarrow 0$  он переходит в выражение, соответствующее плоскому пространству  $\hat{s}^2 = -\sum_1^4 \partial^2 / \partial p_\mu^2$ .

Оказывается, что любое возможное собственное значение  $\hat{s}^2$  совместимо с определенным значением четырехмерного вектора  $N$ , указывающего направление этого интервала.

Единичный вектор  $N$  ( $N_1, N_2, N_3, N_4$ ) удовлетворяет обычному условию  $N^2 = -1$  или  $+1$  для времениподобного и пространственноподобного направлений соответственно. Значение  $N^2 = 0$  (световой конус) при этом исключается.

Собственные векторы  $\Phi(p)$  оператора  $\hat{s}^2$  различны для  $N^2 = -1$  и  $N^2 = +1$ :

$$\Phi(p) = \langle L, N|p \rangle \quad \text{или} \quad \langle \Lambda, N|p \rangle, \quad (4)$$

где величины  $L$  и  $\Lambda$  определяют две серии собственных значений<sup>1</sup> оператора  $\hat{s}^2$ :

$$s^2 = -L(L+3), \quad L = -1, 0, 1, 2, 3, \dots, N^2 = -1, \quad (5)$$

$$s^2 = (3/2)^2 + \Lambda(\Lambda+1), \quad 0 < \Lambda < \infty, \quad N^2 = +1. \quad (5a)$$

Таким образом, точки пространства  $\mathfrak{M}_4(x)$  могут быть теперь определены с помощью четырех чисел  $s^2$  и  $N$  и поля  $\Phi$ , которое естественно назвать геометрическим полем.

<sup>1</sup> Явный вид функций (4) приведен в [3]. Существует и другой полный набор — «сферический».

Из факта зависимости собственной функции интервала (4) от вектора  $N$  следует, что интервалы, относящиеся к различным  $N$ , имеют различные собственные функции и поэтому не совместимы друг с другом, т. е. принадлежат к различным полным наборам. Поэтому из любой точки такого пространства можно провести только одну, но любую прямую ( $N$ ), имеющую дискретную или непрерывную меру длины, (5) или (5а).

Пример 3. Мы сосредоточимся теперь на другой возможности, указанной в [4, 5]. Если рассмотренный выше вариант покоился на замене плоского пространства  $\mathcal{M}_4(p)$  пространством с ненулевой кривизной  $S_4(p)$ , то рассматриваемая ниже возможность исходит из обобщения пространства Финслера  $F_4(x)$  [6].

## 2. Обобщение пространства Финслера

В отличие от риманова пространства пространство Финслера неизотропно. Элемент длины (интервала)  $ds$  в этой геометрии является формой первого порядка от дифференциалов координат  $dx(dx_1, dx_2, dx_3, dx_4)$ :

$$ds = L(dx, x) \quad (6)$$

и зависит от направления вектора  $dx$ . Четырехмерное пространство Минковского  $\mathcal{M}_4(x)$  есть частный случай однородного пространства Финслера, так как в пространстве  $\mathcal{M}_4(x)$  различаются пространственноподобные и времениподобные направления. Действительно, интервал длины в пространстве Минковского может быть представлен в виде, характерном для геометрии Финслера:

$$ds = N_\mu dx^\mu, \quad (7)$$

где вектор  $N_\mu$  есть форма нулевого порядка относительно  $dx$ . Эта форма различна для пространственноподобных, времениподобных направлений и светового конуса в соответствии с тремя возможными значениями  $N^2 = \pm 1, 0$ .

Квантовое обобщение пространства Финслера основывается на замене дифференциалов координат  $dx^\mu$  в формуле (7) конечными операторами

$$\Delta \hat{x}_\mu = a \gamma^\mu, \quad (8)$$

где  $\gamma^\mu$  — матрицы Дирака и  $a$  — некоторая длина. В соответствии с (7) и (8) оператор интервала приобретает вид

$$\Delta \hat{s} = N_\mu \Delta \hat{x}^\mu \quad (9)$$

для  $N^2 = \pm 1$  и

$$\Delta \hat{s} = \frac{1}{i} N_\mu \Delta \hat{x}^\mu \quad (9a)$$

для  $N^2 = -1$  и  $N^2 = 0^1$ . Из (8) следует, что

$$[\Delta \hat{x}_\mu, \Delta \hat{x}_\nu] = 2ia^2 \hat{I}_{\mu\nu}, \quad (10)$$

<sup>1</sup> Это определение интервала отлично от описанного в [5]. Оно соответствует определению, данному ранее в [4].

где  $\hat{I}_\mu$  — оператор четырехмерного спина. Этот коммутатор соответствует коммутатору в формуле (2). Пространство, определенное формулами (8), (9) и (9а), мы будем называть пространством  $\Gamma_4(\hat{x})$ .

В силу (10) собственные значения операторов  $\Delta\hat{x}_1, \Delta\hat{x}_2, \Delta\hat{x}_3, \Delta\hat{x}_4$  не образуют полного набора. Полный набор четырех необходимых переменных так же, как в примере 2, может быть образован собственным значением интервала  $\Delta\hat{s}$  и единичным вектором  $N$ . Из уравнения для собственных функций  $\Phi_\lambda$  и собственных значений оператора  $\hat{\sigma}(N) = (1/a)\Delta\hat{s}(N)$

$$\hat{\sigma}(N)\Phi_\lambda = \lambda\Phi_\lambda \quad (11)$$

нетрудно убедиться, что собственные значения  $\lambda$  равны

$$\lambda = \pm\sqrt{N^2} \quad \text{для } N^2 > 0 \quad (12)$$

и

$$\lambda = \pm\sqrt{-N^2} \quad \text{для } N^2 < 0, \quad (12a)$$

так что собственные значения  $\Delta s = \pm a$  или 0. Вероятностная интерпретация геометрического поля  $\Phi$  оказывается невозможной, так как для тахионных состояний (12) инвариант  $\Phi_\lambda \bar{\Phi}_\lambda \equiv 0$ . Из (9) и (10) следует, что операторы интервалов  $\Delta\hat{s}(N')$  и  $\Delta\hat{s}(N'')$  для двух непараллельных направлений  $N'$  и  $N''$  не коммутируют между собой. Действительно,

$$[\Delta\hat{s}(N'), \Delta\hat{s}(N'')] = a^2 \gamma^\mu \gamma^\nu (N' \times N'')_{\mu\nu} \quad (13)$$

(здесь  $\times$  — знак векторного произведения). В силу этого обстоятельства через каждую точку квантованного пространства  $\Gamma_4(\hat{x})$  можно провести только одну прямую (но любую). Далее следует указать выбор знака для интервала. В силу того что  $\lambda = \pm 1$ , мы встречаемся с двузначностью совершенно того же типа, что и в геометрии Минковского, в которой  $ds = \pm\sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_4^2}$ . Выберем этот знак в соответствии с понятием времени  $\tau$  и расстояния  $l$ . Для времениподобного интервала ( $\hat{s} = \hat{\tau}$ ,  $N^2 = -1$ ) в каждой точке допускаются два значения  $\tau$  по правилу

$$\lambda = \pm 1, \quad \Phi_\lambda \equiv \Phi_\pm(\pm N), \quad (14)$$

т. е.  $\tau = \pm a$ .

Для пространственноподобного интервала  $\hat{s} = \hat{l}$ ,  $N^2 = +1$  допускаем лишь один знак «+»:

$$\lambda = +1, \quad \Phi_\lambda \equiv \Phi_+(\pm N), \quad (14a)$$

т. е.  $l = +a$ .

В силу этих соглашений в любой точке для пространственноподобного направления имеется только один возможный луч  $N$ . Для времениподобного направления — два луча  $\pm N$ . Тем самым определено упорядочение событий в пространстве  $\Gamma_4(\hat{x})$ . Оно осуществляется так же, как и в пространстве Минковского, с помощью интервала  $s$  и единичного вектора  $N$  с тем

существенным различием, что в каждой точке возможны лишь одна прямая (для  $N^2 = -1$ ) и лишь один луч (для  $N^2 = +1$ ). Собственное значение интервала для  $N^2 = -1$  совпадает с временем  $\tau$  в той системе отсчета, где  $N = (1, 0, 0, 0)$ , и для  $N^2 = +1$  совпадает с длиной  $l$  в системе отсчета, где  $N = (0, \mathbf{N})$ . Что касается интервала  $\Delta s = 0$ ,  $N^2 = 0$ , то он не определяет ни длины, ни времени, так как операторы  $\hat{x}_4$  и  $\hat{x}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) при  $\Delta s = 0$  не коммутируют с оператором  $\Delta \hat{s}$  ни в какой системе отсчета. Поэтому положение точек, разделенных между собой световым конусом  $N^2 = 0$ , в этой геометрии неопределенно.

В окрестности каждой точки  $A$  пространства  $\Gamma_4(\hat{x})$  можно указать соседнюю точку  $B$  для  $N^2 = +1$ , определенную собственным вектором  $\Phi_\lambda(A, N)$  оператора  $\Delta \hat{s}(N)$ , заданного в точке  $A$ . Это определенное геометрическое состояние может быть осуществлено двумя эквивалентными способами вследствие вырождения поля  $\Phi_\lambda$  по его киральности.

Из точки  $A$  нельзя провести две или более линий, соединяющих ее с  $B$ ,  $C$ , ... (на рис. 1–4 показаны окрестности точек в пространстве  $\Gamma_4(\hat{x})$ , сплошные линии — определенные интервалы, пунктирные линии — неопределенные интервалы). В любую точку  $A$  можно подвести из ее окрестности сколько угодно линий извне, из «соседних» точек  $C$ ,  $C'$ ,  $C''$  ... (рис. 2).

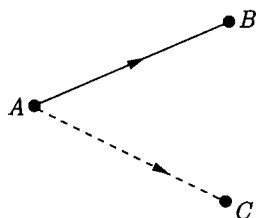


Рис. 1

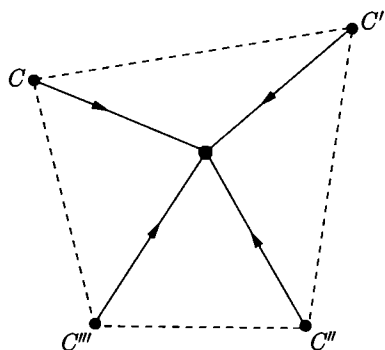


Рис. 2

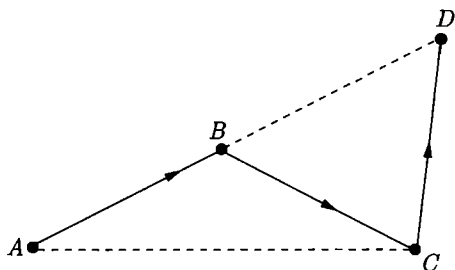


Рис. 3

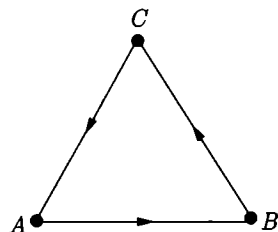


Рис. 4

Однако расстояния между точками  $C$ ,  $C'$ ,  $C''$  ... и т.д. будут неопределенны. Такая окрестность точки  $A$  будет неупорядоченной. Около любой точки  $B$ , соседней с точкой  $A$ , можно указать новую точку  $C$ , которая

определяется собственным вектором  $\Phi_\lambda(B, N)$  оператора  $\Delta\hat{s}(N')$ , взятого в точке  $B$ , и т. д. Таким образом, возникает кривая  $ABCD$ , состоящая из пространственноподобных или времениподобных отрезков, длина которых кратна  $a$  (рис. 3 и 4). Упорядоченная окрестность любой точки  $A$  состоит максимально из трех точек (см. рис. 4). Такое максимальное упорядочение возможно лишь в том случае, если контур  $ABC$  может быть замкнут. В силу дискретности интервалов в геометрии  $\Gamma_4(x)$  такое замыкание не всегда возможно.

Четвертая точка уже не может иметь определенного положения по отношению ко всем трем упорядоченным точкам, так как это привело бы к двум исключаящим друг друга собственным функциям  $\Phi_\lambda$ . Например, определенное значение интервала  $BC$  в силу (13) исключает определенное значение интервала  $BD$  (ср. рис. 3). По этой же причине линии в этом пространстве не могут пересекаться.

Таким образом, в геометрии  $\Gamma_4(\hat{x}_\mu)$  только две или три точки могут быть упорядочены относительно друг друга. Пространство  $\Gamma_4(\hat{x})$  может быть погружено в пространство  $\mathcal{M}_4(x)$ , подобно тому, как всякая дискретная решетка составляет только часть непрерывного многообразия. Это выглядит так, как если бы на относительные координаты точек в  $\mathcal{M}_4(x)$  были наложены дополнительные условия.

### 3. Кинематика кварков

Основное предположение рассматриваемой ниже кинематики кварков таково: глюонное поле  $\mathcal{G}$ , связывающее кварки  $q$  (или антикварки  $\bar{q}$ ), определено в пространстве  $\Gamma_4(\hat{x})$ , т. е.  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\hat{x}) \equiv \mathcal{G}(N, \hat{\sigma}(N))$ .

На основании сказанного выше о свойствах  $\Gamma_4(\hat{x})$ -геометрии мы можем заключить, что каждый кварк имеет только одну направленную от него к соседней линии  $N$ , вдоль которой может распространяться одномерное взаимодействие. Иными словами, кварки имеют направленную валентность, более того они одновалентны.

Пространственноподобные конфигурации, обладающие полной упорядоченностью и, следовательно, определенными взаимодействиями между кварками, состоят только из пар кварков или из триад.

Таков вывод из сделанного выше предположения о характере глюонного поля.

Далее, в силу дискретности  $\Gamma_4(\hat{x})$ -пространства пространственноподобные интервалы не могут быть меньше  $a$  (элемента длины). Поэтому кварки не могут находиться в одной точке. Тем самым отпадает известная трудность относительно статистики кварков: различные положения кварков можно рассматривать как их различный цвет. Иными словами, различие в цвете кварков может быть отождествлено с различием в положении этих кварков.

Мы придем к разумной картине кварковых взаимодействий, если дополним идею направленных одномерных валентностей следующим положением: кварковые структуры образуются только замкнутыми валентностями. Это положение в триаде кварков осуществляется само собой на основании

объясненных выше геометрических свойств окрестности точки в квантованном пространстве.

Что касается пары кварк-антикварк  $(q, \bar{q})$ , то согласно сделанному предположению она имеет вид, показанный на рис. 5 (насыщение валентностей). Вследствие того, что поля  $\Phi_q$  и  $\Phi_{\bar{q}}$  имеют два знака киральности, полное число способов, которым может быть осуществлено упорядочение пары  $(q, \bar{q})$ , равно четырем. Тем самым учетверяется отношение  $R = \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны})/\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ , которое ниже порога рождения чармованных кварков будет равно  $8/3$ .

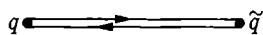


Рис. 5

Другие структуры, содержащие большее число кварков, не могут быть упорядочены по всем парным взаимодействиям.

Простейшее движение в триаде кварков определяется постоянством собственных векторов  $\Phi_\lambda(A)$ ,  $\Phi_\lambda(B)$ ,  $\Phi_\lambda(C)$ . При этом условия треугольник остается подобным самому себе. Заметим, что наименьший треугольник имеет стороны, равные  $a$ .

Одномерный характер взаимодействия позволяет допустить линейный рост энергии связи с ростом расстояния между кварками  $L = la$ . Этот рост, видимо, возможен только до известного предела. Действительно, если энергия связи кварков достигает величины  $2mc^2$  ( $m$  — масса кварка), разделение состояний с  $\pm m$  становится невозможным («парадокс Клейна»). Наиболее простое толкование этой трудности — предположение о разрыве связи при расстоянии  $L \cong 2mc^2/gB$ , где  $g$  — константа взаимодействия, а  $B$  — напряженность глюонного поля. При этом в разрыве образуется пара  $(q, \bar{q})$ .

В заключение заметим, что возможно развить подобную же теорию, исходя из искривленного  $S_4(p)$ -пространства, в том варианте, когда дискретный спектр имеет место для пространственноподобного интервала.

Автор выражает благодарность Б. М. Барбашову, А. В. Ефремову и Р. М. Мир-Касимову за полезные обсуждения.

## Список литературы

1. Snyder H. // Phys. Rev. 1947. V. 71. P. 38.
2. Donkov A. D. et al. // Proc. of the XVIII Intern. Conf. on High Energy Physics, Tbilisi, p. A5-1, Dubna, 1977.
3. Донков А. Д. и др. // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 136. С. 85.
4. Блохинцев Д. И. // ТМФ. 1970. Т. 4. С. 145; — Статья № 96 в наст. изд. — Прим. ред. ЭЧАЯ. 1974. Т. 5. С. 606. — Статья № 104 в наст. изд. — Прим. ред.
5. Блохинцев Д. И. // ТМФ. 1977. Т. 30. С. 299. — Статья № 107 в наст. изд. — Прим. ред.
6. Rund H. The differential geometry of Finsler spaces. Springer, 1959.



## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О ФЛУКТОНАХ И ПЕРЕДАЧА БОЛЬШОГО ИМПУЛЬСА СЛОЖНЫМ СИСТЕМАМ\*

*Совместно с А. В. Ефремовым, В. К. Лукьяновым, А. И. Титовым*

### 1. Флуктоны

Еще в пятидесятых годах внимание теоретиков привлекло явление возникновения «надбарьерных осколков» [1]. Оно состоит в выбивании протонами легких ядер (осколков) из более тяжелых ядер в условиях, когда передаваемый легкому ядру импульс значительно превосходит энергию связи этого ядра.

Тогда же была предложена гипотеза [2] о том, что передача большого импульса сложной системе нуклонов, как целому, может осуществиться только в том случае, если в момент столкновения с падающим нуклоном группа нуклонов ядра, в силу квантовых флуктуаций, собирается в малом объеме и воспринимает передаваемый импульс как единая частица с массой  $M_k = kt$  ( $t$  — масса нуклона,  $k$  — число нуклонов в группе). Такое многонуклонное образование получило в последнее время название «флуктон».

На основе этого представления было получено [2] удовлетворительное согласие с известными тогда данными по выходу надбарьерных осколков. Размер флуктона при этом оказывался сравнимым с размером отталкивающего кора, в иных случаях достигал размеров нуклонов. В то время это казалось несколько удивительным, однако, сейчас стало ясно, что такой механизм образования флуктонов не противоречит современным представлениям о структуре частиц, а сами флуктоны должны рассматриваться на кварковом уровне. Тем самым перебрасывается мост, связывающий физику элементарных частиц с физикой ядра в области больших передаваемых импульсов и возникает возможность исследования многокварковых систем.

Существование флуктонов сейчас находит свое подтверждение в целом ряде явлений. Это процессы кумулятивного рождения частиц [3–5], имеющие целый ряд характерных черт. К этому же классу относится и поведение электромагнитных формфакторов ядер при больших передачах импульса и ряд других явлений.

\* Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий, Дубна, 21–27 июня 1978 г. Дубна: ОИЯИ, Д1,2-12036, 1978. С. 288–300. Краткое содержание этого доклада опубликовано в Proceedings of the 19th International Conference on high energy physics, Tokyo, August 23–30, 1978. Tokyo: Physical Society of Japan, 1979. P. 475–480.

## 2. Кумулятивные процессы

Наибольшее количество информации было получено в процессах кумулятивного рождения адронов, т. е. инклюзивного процесса  $A + B \rightarrow C + X$  при соударении быстрых частиц с ядром в кинематической области, недоступной для случая соударения этой частицы с покоящимся нуклоном. Эти процессы, как известно, проявляют целый ряд характерных свойств:

а) ядерный скейлинг, т. е. независимость инвариантных сечений от энергии падающей частицы;

б) экспоненциальное падение выходов кумулятивных частиц с их энергией и рост наклона экспоненты с ростом массы этих частиц;

в) анизотропия сечения по углу вылета  $\vartheta$  в л. с. при больших импульсах и изотропия — при малых.

г) степенная зависимость сечения от атомного номера  $d\sigma_{\text{кум}} \sim A^n$ , причем для  $\pi$ -мезонов  $n$  изменяется от  $2/3$  при малых энергиях до  $n \approx 1,2$  при больших ( $\sim 1$  ГэВ). Для тяжелых же частиц  $d, t$  показатель степени оказывается равным  $\sim 1,3-2$ ;

д) заметная корреляция (разность быстрот  $\approx 2$ ) на  $180^\circ$  по углу разлета между кумулятивной частицей ( $p, \pi$ ) и любой заряженной частицей.

Полученные за последние 2 года экспериментальные данные [7] в основном подтверждают и уточняют эти свойства. Среди этой информации хотелось бы обратить особое внимание на новые измерения поляризации кумулятивных  $\Lambda$ -частиц [8, 9]. Оказалось, что:

е) поляризация очень велика ( $\approx 100\%$ ) в области углов вылета  $\vartheta \approx 90^\circ$  и падает с ростом и уменьшением угла;

ж) в интервале 2,8–8 ГэВ не видно какой-либо зависимости поляризации от энергии падающей частицы.

Как известно, перечисленные свойства исключают в качестве причины кумулятивного процесса такие обычные механизмы, как ферми-движение или многократное рассеяние на нуклонах ядра.

Первое из них не в состоянии прежде всего объяснить тот факт, что кумулятивные частицы рождаются далеко за пределами, допустимыми средним ядерным полем, т. е. с импульсами порядка  $1,5-2 \text{ фм}^{-1}$ . Кроме того, ферми-движение не в состоянии объяснить столь сильную зависимость от атомного номера.

В качестве примера на рис. 1 приведены расчеты [10] в импульсном приближении сечения реакции  $p + {}^{12}\text{C} \rightarrow \pi + X$ . Кривая 1 — сечение образования пионов на неподвижных нуклонах. Кривая 2 показывает учет ферми-движения нуклонов в ядре мишени. Кривая 3 рассчитана с учетом эффектов релятивизации волновой функции связанного состояния нуклона. Из рисунка видно, что различие теоретических кривых с экспериментом, составляющее 4–5 порядков величины, обязано другому механизму пионообразования.

В механизме же многократного рассеяния для объяснения высокоимпульсной компоненты необходимы кратности, значительно превышающие число нуклонов вдоль траектории рассеиваемой частицы [11].

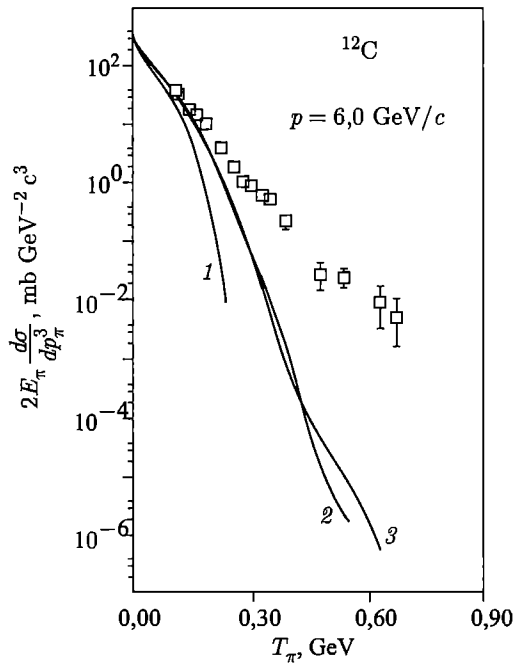


Рис. 1

Предложенная же недавно гипотеза так называемых малонуклонных корреляций [12] также кажется неудовлетворительной в виду того, что наклон  $\pi$ -мезонного спектра при этом должен быть больше, чем наклон нуклонного, так как кумулятивные мезоны, согласно этому механизму, появляются как продукты фрагментации кумулятивных протонов. Кроме того, на эксперименте не видно никакой корреляции между кумулятивным пионом и протоном в том же направлении.

При объяснении кумулятивного эффекта в рамках гипотезы о флуктонах возникает два вопроса: 1) Какова вероятность образования такой многонуклонной системы в ядре? 2) Как она взаимодействует с налетающей частицей?

Остановимся сначала на втором вопросе. Процесс  $B + A \rightarrow C + X$  зависит от трех инвариантных переменных

$$\begin{aligned} s &= 2p_A p_B = 2m_A E, \\ t &= -2p_A p_C = -2m_A \varepsilon, \\ u &= -2p_B p_C \simeq -2E(\varepsilon - p \cos \vartheta), \end{aligned}$$

где  $E$  — энергия падающей частицы, а  $\varepsilon$ ,  $p$  и  $\vartheta$  — энергия, импульс и угол вылета кумулятивной частицы  $C$ . Область кумулятивной частицы определяется условием на кумулятивное число  $k$ :

$$k \equiv -\frac{u}{s} \approx \frac{\varepsilon - p \cos \vartheta}{m} > 1. \quad (1)$$

Нетрудно убедиться, что в этой области все переменные  $s$ ,  $t$ ,  $u$ , а также  $\rho = ut/s = 2\varepsilon(\varepsilon - p \cos \vartheta)$  больше адронных масс, так же как и в процессах

с большим  $p_{\perp}$  ( $\rho \approx \frac{st}{u} \approx p_{\perp}^2$ ). По этой причине естественно думать, что кумулятивный процесс в области достаточно больших  $\rho$  определяется тем же механизмом, что и процесс с большими  $p_{\perp}$ , т.е. жестким бинарным соударением партонов флуктона и налетающей частицы (рис. 2). (К этому же результату приводит и рассмотрение асимптотики фейнмановских диаграмм КТП для кумулятивного процесса [14].)

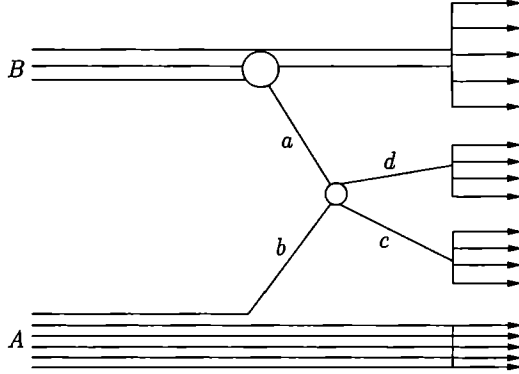


Рис. 2

Инвариантное сечение рождения в этом случае имеет обычный вид

$$\varepsilon_c \frac{d\sigma}{d^3p} = \int d\gamma d\Delta Q_{A/a}(\alpha) Q_{B/b}(p) \frac{1}{\pi} \frac{d\sigma}{dt'}(s', t') D_{C/c}(\gamma), \quad (2)$$

где

$$Q_{A/a}(\alpha) = \sum_{n=1}^A \beta_n^A Q_{nN/a} \left( \frac{\alpha}{k} \right), \quad \ln \frac{\gamma - x_1}{x_1} \leq \Delta \leq \ln \frac{\gamma - x_2}{x_2},$$

$$\alpha = \frac{x_1}{\gamma} (1 + e^{\Delta}), \quad x_1 = -\frac{u}{s} = k,$$

$$\beta = \frac{x_2}{\gamma} (1 + e^{-\Delta}), \quad x_2 = -\frac{t}{s} = \frac{\varepsilon}{E},$$

или

$$d\sigma_A = \sum_{n=1}^A \beta_n^A d\sigma_N \left( x_2, \frac{x_1}{n} \right) \left( 1 - \frac{x_1}{n} \right)^{6(n-1)}, \quad (2a)$$

где  $\beta_n^A$  — вероятность образования  $n$ -нуклонного флуктона, а  $Q_{nN/a}$  — вероятность его фрагментации в партон  $a$ .

Ввиду того, что величина  $\beta_n^A$  оказывается достаточно малой, подавление фрагментации  $B$  в антикварк  $b$  отсутствует, поэтому для кумулятивных мезонов более вероятным оказывается, по-видимому, прямое рождение мезонов и нуклонов типа рис. 3 (особенно если учесть еще «подавление триггером»), т.е.  $D(\gamma) \simeq \delta(\gamma - 1)$ . Сечение же  $d\sigma/dt'$ , как известно, сосредоточено в районе разности быстрот  $\Delta \approx 0$ .

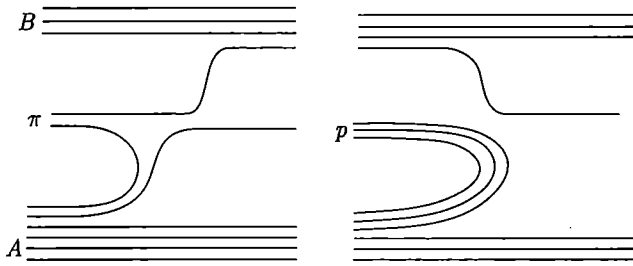


Рис. 3

Напомним, каким образом этот механизм обеспечивает выполнение вышеуказанных свойств.

В качестве величины  $\beta_n^A$  возьмем для начала классическую формулу флуктуаций идеального газа

$$\beta_n^A = \left( \frac{A}{n} \right) \left( \frac{V_\xi}{V_A} \right)^{n-1}, \quad (3)$$

где  $V_A \sim \pi R_A^3$ ,  $R_A$  — радиус ядра, а  $V_\xi$  — «объем когерентности», т. е. та характерная область, вне которой нуклоны можно считать некогерентными. Вероятность же фрагментации  $Q_{nN/a}$  возьмем в виде  $(1 - \alpha/n)^{6k-n_a} \approx (1 - x_1/k)^{6k-n_a}$  ( $n_a$  — число кварков в партоне  $a$ ). После суммирования по  $k$  методом перевала получим

$$\varepsilon \frac{d\sigma}{d^3p} \simeq \left( \frac{E}{p} \right)^{\alpha_p(0)} \left( \frac{V_0}{V_\xi} \right) \varphi(\varepsilon) \exp \left\{ -kB \left( \ln \frac{kV_A C}{AV_\xi} \right) \right\}, \quad (4)$$

где  $B(L)$  — некая монотонная функция при  $L > 0$  такая, что  $B(0) = 0$  и  $B(L) \sim L$  при  $L \rightarrow \infty$ . (Ее вид зависит от характера образования флуктона.) Видно, что при  $\alpha(0) \simeq 1$  сечение не зависит от  $E$ ; с ростом массы налетающей частицы величина  $B$  (наклон) растет; сечение изотропно по углу при  $p \ll \varepsilon$  и падает с ростом угла при  $p \approx \varepsilon$ .

Остановимся теперь на поляризации  $\Lambda$ -частиц [15]. Формула жесткого соударения (2) без труда обобщается на матрицу плотности, которая после дополнительного предположения о скейлинге

$$\rho_{\mu\nu} \frac{d\sigma}{dt} \approx \frac{1}{s'^{n/4}} \left[ \chi_1 \left( \frac{s'}{t'} \right) + (\sigma \mathbf{n}) \chi_2 \left( \frac{s'}{t'} \right) \sin \varphi \right]$$

( $\varphi$  — угол между импульсами пучка и мишени в системе покоя  $\Lambda$ -частицы) немедленно дает для поляризации

$$P_\Lambda = \frac{\int Q_{A/a}(\alpha) Q_{B/b}(\beta) \chi_2(\Delta) d\Delta}{\int Q_{A/a}(\alpha) Q_{B/b}(\beta) \chi_1(\Delta) d\Delta} = I(x_1, x_2) \sin \varphi.$$

Из анализа процессов с большим  $p_\perp$  известно, что функции  $\chi_1$  и  $\chi_2$  достаточно быстро падают с ростом  $\Delta$  ( $< e^{-|\Delta|}$ ), поэтому величина  $I$

в области фрагментации мишени ( $x_1 \approx x_F$ ,  $x_2 \approx \varepsilon/E$ ) слабо зависит как от своих переменных, так и от сорта мишени (и налетающей частицы). Это дает возможность сравнить поляризации  $\Lambda$ -частиц при 300 ГэВ/с в области фрагментации протона [16] с поляризацией кумулятивных  $\Lambda$ -частиц [8] при  $E = 2,8$  ГэВ (т. е. в области фрагментации ядра) ( $\sin \varphi \simeq (2m_{A\rho\perp})/(p_\perp^2 + m_A^2)$ ) и  $\sin \varphi = (m_A \sin \vartheta)/(\varepsilon - p \cos \vartheta) \approx \sin \vartheta$ . Это сравнение представлено на рис. 4. Оно еще раз демонстрирует, что флуктон ведет себя подобно многокварковому адрону.

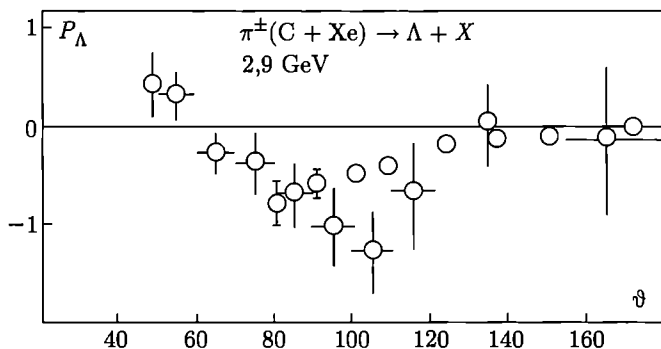


Рис. 4

Представленные на эту конференцию данные по поляризации кумулятивных  $\Lambda$ -частиц при  $E = 8,4$  ГэВ [9] подтверждают один из основных выводов механизма жесткого рассеяния — независимость поляризации от энергии падающей частицы.

Остановимся несколько подробнее на  $A$ -зависимости сечения. Из (4) видно, что эта характеристика зависит от того, что такое  $V_\xi$ , т. е. что такое флуктон. Здесь возможны две точки зрения.

А) Флуктон является неким квазистабильным образованием с определенной «энергией связи» и временем жизни (типа резонансного состояния). В этом случае объем  $V_\xi$  можно считать объемом некоей сепарабельной области в системе покоя ядра с радиусом порядка радиуса действия ядерных сил ( $\sim 1/m_\rho$ ). Тогда  $(V_A/V_\xi) \sim A$  и сечение растет пропорционально  $A$ . Уменьшение показателя степени до  $2/3$  может происходить за счет экранировки другим нуклоном ядра. Однако имеется очевидная трудность в объяснении показателей больших единицы.

Б) Флуктон является некоей моментальной флуктуацией когерентности, не имеющей какой-либо определенной энергии, когда несколько нуклонов оказываются одновременно, с точки зрения налетающей частицы, на расстоянии меньше, чем «радиус когерентности» ( $\sim 1/m_\rho$ ). Это означает, что при достаточно большой энергии налетающей частицы, когда  $\gamma$ -фактор достаточно велик, флуктон образует все нуклоны, попавшие в цилиндрическую трубку с радиусом  $1/m_\rho$ . При этом  $(V_A/V_\xi) \sim A^{2/3}$  и показатель степени  $A$  для сечения оказывается  $\alpha = 2/3 + (1/3)\varepsilon(B/L)$ , т. е. растет с ростом полной энергии. Для тяжелых частиц он может достигать больших значений. Однако

Видно, что рассчитанные вероятности в основном правильно согласуются с соответствующими экспериментальными значениями.

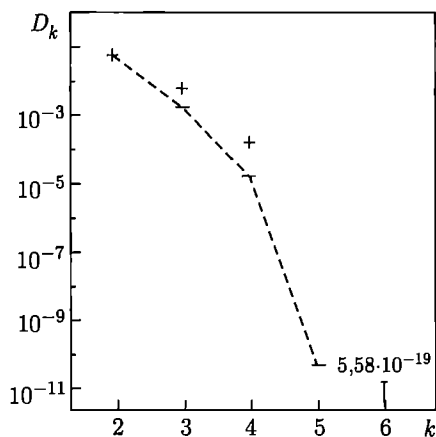


Рис. 9

## Заключение

Таким образом мы убедились, что гипотеза о флуктонах дает достаточно хорошее количественное и качественное описание основных свойств кумулятивного эффекта. Нам кажется, что изучение таких состояний кварковой материи может представлять интерес для теории элементарных частиц с нескольких точек зрения. Во-первых, это дает возможность изучать кварковые системы с переменным числом кварков, что может пролить некоторый свет на проблему удержания кварков. В частности, один из интересных вопросов — сколько кварков можно «насыпать в мешок»? Что происходит с размером мешка при насыпании в него все большего числа кварков?

Во-вторых, наличие таких плотных образований позволяет изучить процессы с большой передачей импульса даже на «малых» ускорителях. Так, даже на дубненской машине, в принципе, можно получить  $\pi$ -мезоны, летящие назад с энергией  $\approx 8$  ГэВ, что эквивалентно (по  $ut/s$ ) поперечным импульсам  $p_{\perp} \approx 16$  ГэВ, доступных ныне только на ISR. Конечно, реально достигнуть таких импульсов, по-видимому, не удастся ввиду крайне малых сечений. Однако ближайшей экспериментальной задачей, на наш взгляд, является более четкое доказательство наличия флуктонов в ядре.

## Список литературы

1. Ажгирей Л. С. и др. // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 1185.
  2. Блохинцев Д. И. // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 1295.
  3. Балдин А. М. // ЭЧАЯ. 1977. Т. 8. С. 429.
- Балдин А. М. Краткие сообщения по физике. № 1. М.: Наука, 1971.

4. Лексин Г. А. «Ядерный скейлинг». Лекции на школе «Некоторые вопросы экспериментальных исследований в области физики высоких энергий». М.: Изд-во МИФИ. М., 1975. С. 3.  
Баюков Ю. Д. и др. // ЯФ. 1973. Т. 18. С. 1246.
5. Cronin J. W. et al. // Phys. Rev. D. 1975. V. 11. P. 3105.
6. Efremov A. V. // Proc. of Tbilisi Conf. 1976. Dubna: JINR D1,2-10400, 1977. P. A6-12.
7. Baldin A. M. // Proc. of the 19th Intern. Conf. on High Energy Physics, Tokyo, August 20-30, 1978. Tokyo: Physical Society of Japan, 1979. P. 455.
8. Leksin G. A., Smirnitsky A. V. Preprint ITEP-87. 1977.
9. Shahbazian B. A. et al. JINR Preprint E11-11519. Dubna, 1958.
10. Burov V. V., Lukyanov V. K., Titov A. I. // Phys. Lett. B. 1977. V. 67. P. 46.
11. Лукьянов В. К., Титов А. И., Доркин С. М. Препринт ОИЯИ P2-11049. Дубна, 1977.
12. Frankfurt L. L., Strikman M. I. // Phys. Lett. B. 1977. V. 69. P. 93.
13. Ефремов А. В. // ЯФ. 1976. Т. 24. С. 1208.
14. Efremov A. V. // Fortschritte der Phys. 1974. Bd. 23. S. 575.
15. Efremov A. V. ЯФ. 1978. Т. 28. С. 166.
16. Bunce G. et al. // PRL. 1976. V. 36. P. 113.
17. Matveev V. A., Muradyan R. M., Tavkhelidze A. N. // Nuovo Cim. Lett. 1973. V. 7. P. 719;  
Brodsky S., Farrar G. // Phys. Rev. Lett. 1973. V. 31. P. 1153; Phys. Rev. D. 1975. V. 11. P. 1309.
18. Brodsky S. J., Chertok B. T. // Phys. Rev. Lett. 1976. V. 37. P. 269.
19. de Grand T. et al. // Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 2060.
20. Matveev V. A., Sorba P. FERMILAB-PUB-77/36, THY, Batavia, 1977;  
Arnold R. G. et al. // Phys. Rev. Lett. 1975. V. 35. P. 776.

Объединенный институт  
ядерных исследований

Поступила  
20 июля 1978 г.



## ВСЕЛЕННАЯ КАК ГАЗ ФРИДМОНОВ\*

В статье [1] была высказана гипотеза о структуре мира, основанная на идее А. А. Фридмана о возможности существования замкнутого, периодически расширяющегося и сжимающегося четырехмерного мира [2]. Такого рода миры мы будем называть, по терминологии М. А. Маркова, фридмонами, однако независимо от величины массы образующей их материи<sup>1</sup>.

Согласно моей гипотезе, мир Фридмана  $\mathfrak{F}_4(x)$  может быть лишь частью более обширного мира фридмонов, свободно движущихся в метaprостранстве  $\mathfrak{M}_n(x)$  большого числа измерений  $n > 4$ . Они образуют фридмонный газ, молекулами которого являются целые Вселенные типа известного нам из нашего опыта, может быть и большие, может быть и много меньшие. Простейший тип метaprостранства  $\mathfrak{M}_n(x)$  есть псевдоевклидово пространство с метрикой, определяемой квадратом элемента интервала  $dS_n$ ,

$$dS_n^2 = \sum_{\mu=0}^{n-1} c_\mu dx_\mu^2 = dx_0^2 - \sum_{\mu=1}^{n-1} dx_\mu^2, \quad (1)$$

так что  $c_0 = +1$ ;  $c_\mu = -1$ ,  $\mu > 0$ . Координата  $x_0$  играет роль времени.

Фридмон в таком мире определяется некоторой четырехмерной гиперповерхностью:

$$x_\mu = \Phi^\mu(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2)$$

имеющей элемент интервала  $d\sigma$ :

$$d\sigma^2 = \sum_{\alpha, \beta=0}^3 g_{\alpha\beta} d\xi_\alpha d\xi_\beta. \quad (3)$$

Здесь  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$  — координаты внутри фридмона. Подставляя  $dx_\mu$  из (2) в (1) и сравнивая полученное выражение с (3), найдем уравнение

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} c_\mu \frac{\partial \Phi^\mu}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \Phi^\mu}{\partial x_\beta} = g_{\alpha\beta}(\xi). \quad (4)$$

<sup>1</sup> Этот термин был введен М. А. Марковым применительно к микромиру. В этом случае масса материи фридмона составляет только  $\sim 10^{-5}$  г.

Число этих уравнений для  $s$ -мерной гиперповерхности  $\mathfrak{F}_s(\xi)$  составляет  $s(s+1)/2$ . Следовательно, число измерений метапространства  $n \geq s(s+1)/2$ ; в нашем случае  $s = 4$ ,  $n = 10$ . Однако метрика мира Фридмана обладает сферической симметрией (см., например, [3]):

$$d\sigma^2 = dt^2 - \left[ \frac{dr^2}{1 - r^2/a^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \quad (5)$$

Здесь  $a$  — радиус фридмона, зависящий от времени  $t$  (скорость света принята равной 1), остальные обозначения обычны.

Если положить  $r = a \sin \chi$ ,  $0 < \chi \leq \pi$ , то  $d\sigma^2$  принимает вид

$$d\sigma^2 = dt^2 - \left[ a^2 d\chi^2 + a^2 \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \quad (5')$$

Решение уравнений Эйнштейна для пылевидной материи приводит к следующему параметрическому представлению величин  $t$  и  $a$  [3]:

$$t = a_0(\eta - \sin \eta), \quad a = a_0(1 - \cos \eta), \quad 0 < \eta < \infty. \quad (6)$$

Сферическая симметрия  $\mathfrak{F}_4(\xi)$  позволяет ограничиться рассмотрением пятимерного метапространства. Если ввести в нем координаты  $0 < R < \infty$ ,  $0 < \theta_1 \leq \pi$ ,  $0 < \theta_2 \leq \pi$ ,  $0 < \theta_3 \leq 2\pi$ , то квадрат элемента интервала  $dS_5$  принимает вид

$$dS_5^2 = dx_0^2 - \left[ dR^2 + R^2 d\theta_1^2 + R^2 \sin^2 \theta_1 (d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_2 d\theta_3^2) \right]. \quad (7)$$

Сравнение с (5') показывает, что  $R = a$ ,  $\theta_1 = \chi$ ,  $\theta_2 = \theta$ ,  $\theta_3 = \varphi$ , причем

$$dt^2 = dx_0^2 - dR^2 = dx_0^2 - da^2, \quad (8)$$

откуда

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} = \pm \sqrt{1 + \left( \frac{da}{dt} \right)^2}. \quad (9)$$

Пользуясь параметрическим представлением  $t$  и  $a$ , нетрудно получить

$$\frac{dx_0}{d\eta} = 2a_0 \sin \frac{\eta}{2}, \quad (10)$$

где  $a_0$  — постоянная амплитуда и в (9) взят знак «плюс» (будущее время!). Из (10) находим

$$x_0(\eta) = 8a_0 m + 4a_0 \left( 1 - \cos \frac{\eta}{2} \right), \quad (11)$$

где  $m$  — число циклов колебаний фридмона. Радиус  $R = a(t)$  в  $\mathfrak{M}_5(x)$  определяется формулой

$$R = a_0[1 - \cos \eta(t)]. \quad (12)$$

На рис. 1 приведены кривые для  $x_0/4a_0$ ,  $t/\pi a_0$  и  $a/a_0$  в функции параметра  $\eta$ . Как видно, время внутри фридмона  $t$  и время метапространства  $x_0$  отличаются лишь множителем  $\pi/4$ .

Не меняя выкладок, мы можем переместить начало пространственных координат в  $\mathcal{M}_5(x)$  из точки  $(x, 0, 0, 0, 0)$  в точку  $x_0$ ,  $V_1 x_0$ ,  $V_2 x_0$ ,  $V_3 x_0$ ,  $V_4 x_0$ .

Такой сдвиг начала координат означает равномерное движение фридмона в метапространстве  $\mathcal{M}_5(x)$  со скоростью  $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3, V_4)$ . Внешнее гравитационное поле фридмона равно нулю, поэтому предположение о псевдоевклидовом характере метапространства  $\mathcal{M}_5(x)$  является весьма естественным, но, конечно, не обязательным, а только простейшим. Это пространство достаточно емко для описания свободного фридмонного газа, молекулами которого являются замкнутые миры — вселенные Фридмана. Описание столкновения фридмонов, процесса, нарушающего сферическую симметрию задачи и однородность пространства, требует метапространства большего числа измерений ( $n > 10$ ).

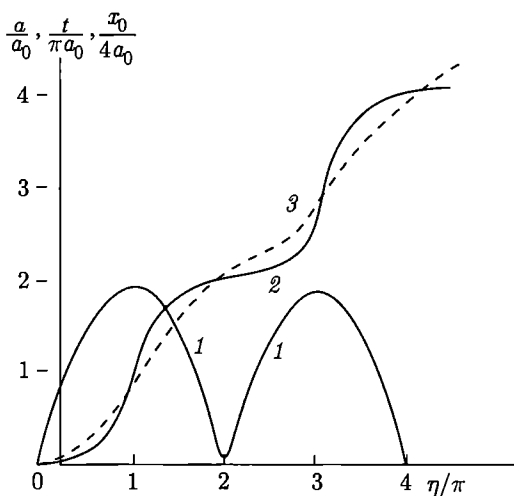


Рис. 1. Величины  $\frac{a}{a_0}$  (1),  $\frac{t}{\pi a_0}$  (2),  $\frac{x_0}{4a_0}$  (3) в функции параметра  $\eta$

Объединенный институт ядерных исследований  
Дубна Московской обл.

Получена 23.12.1978

## Список литературы

1. Блохинцев Д. И. // ДАН СССР. 1976. Т. 229, № 1. С. 67. — Статья № 106 в наст. изд. — Прим. ред.
2. Фридман А. А. // Избр. тр. М., 1966.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1967.

# Часть VIII

## ВЫСТУПЛЕНИЯ ПО ОБЩИМ ПРОБЛЕМАМ НАУКИ

111

### ГИПОТЕЗА НЕЙТРИНО И ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ\*

*Совместно с Ф. М. Гальпериным*

#### 1. Введение

В последнее время внимание физиков привлекает гипотеза Паули–Ферми о новой частице — *нейтрино*. Эта гипотеза была выдвинута для объяснения кажущегося несохранения энергии при бета-распаде. Сделанные до сих пор выводы из этой гипотезы находятся в согласии с опытом, благодаря чему, она завоевывает все большее и большее число сторонников, среди которых немало недавних рьяных противников закона сохранения энергии. Таким образом, мы имеем дело с новым поворотом в пользу закона сохранения энергии. История повторяется! В свое время только что открытый радий был объявлен Анри Пуанкаре [1] вечным двигателем, разрушающим архаическое представление о сохранении энергии. Искключительная по своей плодотворности, полностью подтвержденная экспериментально, гипотеза Резерфорда–Фаянса–Содди о превращении элементов при радиоактивном распаде рассеяла идеалистический туман, окружавший в то время радий. Новое противоречие с законом сохранения энергии, обнаруженное при альфа-распаде, было разрешено на основе сохранения энергии в радикальной теории Гамова, впервые применившего волновую механику к радиоактивным явлениям.

И, наконец, сейчас гипотеза нейтрино и опыты Эллиса и Мотта дают выход из трудностей, связанных с применением закона сохранения энергии к бета-распаду.

Закон сохранения и превращения энергии — фундаментальный закон природы. Столкновение с ним свидетельствует не о крушении этого закона; а о необходимости радикального изменения представлений, приводящих к таким коллизиям. Это особенно хорошо иллюстрируется на приведенных примерах из истории радиоактивности. Объективный ход развития физики в этой области явлений сокрушал всяческие спекуляции на парадоксах о сохранении энергии.

## 2. Бета-распад

Существует два ряда естественного радиоактивного распада: альфа- и бета-распад.

При альфа-распаде из ядра распадающихся атомов вылетает альфа-частица (ядро атома гелия с зарядом, равным  $+2$  и массой  $4$ )<sup>1</sup>. При этом масса атома уменьшается на четыре единицы, а заряд ядра — на две единицы. Так как заряд ядра определяет номер элемента в периодической системе Менделеева, то при альфа-распаде номер продукта распада на две единицы меньше чем номер исходного: элемент смещается влево, на два столбца периодической системы. Образующиеся новые ядра часто оказываются в возбужденном состоянии и испускают гамма-лучи. Исследование спектров этих гамма-лучей послужило хорошим подтверждением упомянутой выше гаммовской теории радиоактивного распада. Наблюдение показывает, что энергия альфа-частиц, вылетающих из ядер, имеет некоторые, вполне *определенные*, характерные для каждого элемента значения («дискретный энергетический спектр»), а кванты гамма-излучения соответствуют квантовым переходам ядра из одного состояния в другое. Гамма-лучи имеют поэтому также дискретный энергетический спектр.

Явление бета-распада заключается в том, что ядро испускает электроны. Масса атома при этом ввиду малости массы электрона (в принятых нами единицах равная  $1/1842$ ) остается практически неизменной, заряд же ядра увеличивается на  $+1$  (так как из ядра удаляется заряд, равный  $-1$ ). Исследование энергии электронов, вылетающих из ядра одного и того же элемента, показывает, что их энергия может иметь самые *разнообразные* значения (энергетический спектр *непрерывен*). Если на оси абсцисс отложить энергию  $E$  вылетающих электронов, а на оси ординат — число электронов  $N$ , имеющих эту энергию, то мы получим кривую распределения электронов по энергиям, характерную для бета-распада (см. рис. 1). Из закона сохранения энергии тогда следует, что ядерные остатки (после вылета электронов) должны также обладать разнообразными энергиями. Это противоречит, однако, тому факту, что при наступающем вслед за бета-распадом альфа-распаде получается дискретный энергетический спектр альфа- и гамма-лучей, свидетельствующий об энергетической тождественности ядер, получившихся в результате бета-распада.

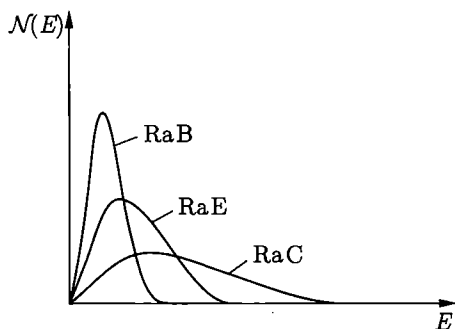


Рис. 1. Кривые распределения электронов по энергиям при бета-распаде. Для альфа-частиц (альфа-распад) кривая превратилась бы в совокупность отдельных точек, соответствующих тому, что имеются альфа-частицы только с некоторыми определенными энергиями

<sup>1</sup> За единицу заряда принимается заряд электрона, т. е. примерно  $4,8 \cdot 10^{-10}$  абс. эл.-ст. ед.; за единицу массы — масса атома водорода, т. е. примерно  $1,7 \cdot 10^{-21}$  г.

В этом и заключается парадокс с бета-распадом<sup>1</sup>. Отсюда и были сделаны Нильсом Бором и другими выводы о неприменимости закона сохранения энергии к бета-распаду<sup>2</sup>. В связи с этим интересно отметить, что закон сохранения энергии, по сути говоря, пренебрегается по сравнению с другими, более узкими законами, как-то: законом сохранения зарядов и законом сохранения вращательного момента. Остановимся на последнем. Каждой элементарной частице (электрону, позитрону, протону и нейтрону), согласно современным представлениям, приписывается собственное вращение. Это собственное вращение таково, что соответствующий вращательный момент (так называемый *спин*) равен  $+1/2$  или  $-1/2$ <sup>3</sup> в соответствии с двумя возможными направлениями вращения. Если какая-нибудь частица, например ядро, образуется совокупностью элементарных частиц, то ее спин алгебраически складывается из спинов образующих ее частиц: *спин каждой из частиц сохраняется*. Этот закон, как показывают исследования спина ядра, нельзя согласовать, со старым представлением, согласно которому ядра образуются из электронов и протонов. Столкнувшись с этой трудностью, физики пошли не по пути отрицания этого закона сохранения, а по пути изменения картины строения ядра: согласно *теперешним* [3] представлениям, достаточно обоснованным и общепринятым, электроны не входят в ядро; ядра образуются из протонов и открытых Жюлио-Кюри и Чадвиком в 1932 г. [4] новых частиц, не имеющих заряда — нейтронов (масса = 1). Таким образом ядро образуется только из тяжелых частиц. Мы не встречались с подобным отношением к закону сохранения энергии. Как видно из предыдущего, в связи с бета-распадом почти всеми физиками делался однозначный вывод не о необходимости новой физической картины явлений, а о неверности закона сохранения энергии.

Заметим, что в истолковании бета-распада, с этой, изложенной выше новой точки зрения о строении ядер, заключалась новая трудность, связанная с несохранением спина.

Действительно, при бета-распаде появляется электрон, имеющий спин  $\pm 1/2$ . Так как число тяжелых частиц в ядре или бета-распаде не меняется, то спин нового ядра должен по-прежнему складываться из спинов тяжелых частиц, входящих в состав первоначального ядра; следовательно, он должен остаться либо неизменным, либо измениться на  $\pm 1, \pm 2, \dots$  и т. д., т. е. на целое число единиц (при этом процессе могло бы произойти изменение направления спина одной или нескольких частиц, входящих в ядро, например: два протона имели первоначально спин  $+1/2 + 1/2 = 1$ , а после процесса распада  $+1/2 - 1/2 = 0$ , т. е. изменение на  $-1$ ). Это изменение спина ядра,

<sup>1</sup> Помимо изложенных соображений, есть и другие весьма веские доводы, заставляющие считать атомы тождественными. Именно изучение спектров двухатомных молекул легких элементов показывает, что ядра атомов, образующих молекулу, подчиняются квантовой статистике, одним из основных положений которой является неразличимость (тождественность) частиц. Нет оснований считать, что для тяжелых элементов, к числу которых принадлежат радиоактивные элементы, квантовая статистика окажется неприменимой.

<sup>2</sup> См. нашу статью [2].

<sup>3</sup> За единицу вращательного момента при этом принимают постоянную Планка  $h$ , деленную на  $2\pi$ ; в CGS-системе это будет:  $\hbar = h/2\pi = 1,047 \cdot 10^{-27}$  г · см<sup>2</sup>/с.

очевидно, ни в коем случае не может быть компенсировано спином появившегося электрона, так как последний не равен ни 0, ни 1, а  $1/2$ . Таким образом в этом случае мы имеем дело с несохранением спина. Характерно опять же для отношения физиков к закону сохранения энергии то обстоятельство, что Дирак, между прочим, не принадлежащий к числу гонителей закона сохранения энергии, высказывался на Ленинградской ядерной конференции в том смысле, что эта трудность со спином может быть более серьезна, чем трудности с энергией.

Изложенное отношение к закону сохранения энергии хотя и было преобладающим, однако отнюдь не всеобщим. Паули на Сольвейском конгрессе в 1928 г. выдвигал гипотезу о существовании весьма легких (в противоположность позднее открытому тяжелому нейтрону), не имеющих заряда частиц, названных им *нейтрино*. Последние, по его мысли, могут участвовать в бета-распаде, уносить с собой часть энергии и, будучи не замечаемыми на опыте, обуславливать размытость энергетических спектров бета-лучей (часть энергии, освобождающейся при бета-распаде, идет на электрон, а другая — на нейтрино). Однако эта точка зрения не была ни в достаточной мере развита самим Паули, ни принята кем-либо из физиков всерьез. Только работа Е. Ферми [5] в 1934 г. вновь воскресила эту гипотезу. Но прежде чем перейти к изложению этой новой работы, мы остановимся на тех *экспериментальных* фактах, которые поколебали и весьма сузили платформу противников закона сохранения энергии.

Среди физиков долго дискутировался вопрос: ограничена ли энергия электронов в бета-распаде или она может быть как угодно большой? Это вопрос о том, продолжают ли кривые на рис. 1 до бесконечности в сторону больших энергий или обрываются. Ответ на этот вопрос требовал весьма высокого экспериментального искусства, так как, как видно из рис. 1, при больших энергиях кривые идут очень полого и трудно установить, обрываются ли они или, скользя вдоль оси абсцисс, уходят в бесконечность. Ответ на этот вопрос был дан работой Сержента [6], тщательно измерявшего бета-спектр ряда радиоактивных элементов. Он пришел к заключению, что для каждого элемента существует верхняя граница в энергии бета-спектров, т. е., иными словами, энергия бета-электронов хотя и имеет разные значения, но тем не менее, *не превосходит* некоторой определенной, *максимальной величины*. Отсюда следует, что несохранение энергии при бета-распаде ограничено вторым, вполне определенным пределом, и уже на той же Ленинградской конференции Дирак отметил<sup>1</sup>, что наличие верхней границы «есть такой аргумент, после которого труднее говорить о несохранении» (энергии. — Д. Б. и Ф. Г.).

Особенно важным оказалось доказательство Эллисом и Моттом [7, 8] того факта, что максимальная энергия электронов в бета-распаде *подчиняется закону сохранения энергии*. Эллис и Мотт анализировали энергетический баланс при тех радиоактивных превращениях, при которых из одного и того же исходного продукта получается разными путями один и тот же конечный

---

<sup>1</sup> См. сборник [3]. С. 134.

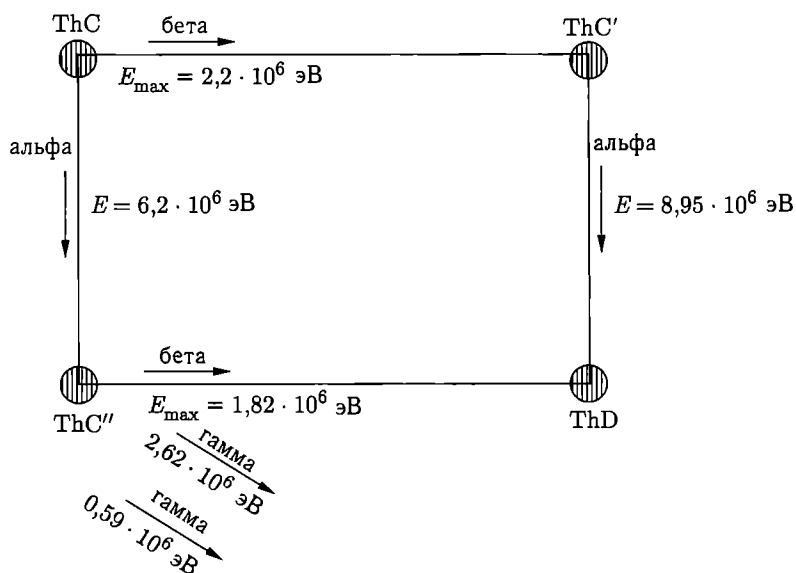


Рис. 2

продукт (так называемое «разветвление»). Так, например, торий С (ThC) превращается в ThD двумя путями, изображенными на диаграмме 2.

Именно часть атомов ThC распадается и, испуская альфа-частицы с энергией в  $6,2 \cdot 10^6$  электронвольт<sup>1</sup>, превращается в ThC. Этот последний превращается дальше в ThD, испуская гамма-лучи двух сортов с энергиями  $2,62 \times 10^6$  эВ и  $0,38 \cdot 10^6$  эВ и бета-лучи с максимальной энергией в  $1,82 \cdot 10^6$  эВ. Другая группа атомов ThC испускает сначала бета-лучи с максимальной энергией  $2,2 \cdot 10^6$  эВ и превращается в ThC'. ThC' испускает затем альфа-лучи с энергией  $8,95 \cdot 10^6$  эВ и превращается в тот же ThD. Если подвести энергетический баланс для этих энергий, то для распада по линии CC'D получим полную энергию  $11,15 \cdot 10^6$  эВ, а для линии CC'D —  $11,22 \cdot 10^6$  эВ. Получающееся небольшое расхождение следует отнести за счет неточности измерения.

Таким образом действительно максимальная энергия бета-электронов подчиняется закону сохранения энергии, и, следовательно, остается говорить только о несохранении энергии для электронов, имеющих энергию, меньшую максимальной энергии в бета-спектре. Плацдарм противников сохранения энергии, как видим, оказался крайне тесным и весьма сомнительным даже с самой «беспристрастной» точки зрения естествознания. В связи с этим недавние противники закона сохранения энергии спешно ретируются со своих позиций, чтобы принять участие в положительной разработке теории бета-распада. Ландау, о позиции которого в отношении закона сохранения энергии мы недавно писали [2], в настоящее время считает, что отрицание закона

<sup>1</sup> Электронвольт (эВ) — обычная в ядерных измерениях единица энергии, означающая энергию электрона, которую он приобрел бы, будучи разогнан в электрическом поле с разностью потенциалов в 1 вольт. 1 электронвольт =  $1,59 \cdot 10^{-12}$  эрг.



сохранения энергии приводит к весьма серьезным трудностям в общей теории относительности (теории тяготения) [8, 9]. В своем последнем очерке по строению атомного ядра Гамов [9], обсуждая замечание Ландау и приведенные нами выше доводы Эллиса и Мотта, говорит: «Оба вышеуказанных факта делают весьма сомнительной допустимость отбрасывания закона сохранения энергии при бета-распаде». Это последнее признание тем более ценно, что Гамов принадлежит к числу тех физиков, которые, следуя Бору, пытались превратить отрицание закона сохранения энергии в своего рода методологическую базу современной ядерной физики.

### 3. Рождение легких и превращение тяжелых частиц

Гипотеза о существовании *нейтрино* получила свое дальнейшее развитие в работе Ферми. Ферми исходит из того основного положения, что ядра элементов состоят только из тяжелых частиц: протонов и нейтронов. Эта картина строения была развита в работах Д. Д. Иваненко [3] и В. Гейзенберга [10]. Мы подчеркнем здесь еще раз отличие этой картины от прежней (согласно которой ядра состоят из протонов и электронов) и те обстоятельства, которые заставили прийти к этой новой картине. Первое соображение, ставящее под сомнение присутствие электронов в ядре как структурных частиц ядра, заключается в следующем: энергия внутренней связи частиц в ядре оказывается, по порядку величины, равной или даже превосходящей собственную энергию электрона, равную  $E = m_0 c^2 = 81 \cdot 10^{-8}$  эрг  $= 0,5 \cdot 10^6$  эВ ( $m_0$  — масса электрона,  $c$  — скорость света). Весьма трудно представить себе, чтобы частица сохранила свою индивидуальность, если энергия связи больше ее внутренней энергии. Второе соображение, как мы уже отмечали, относится к спину ядер. Иллюстрируем его на примере азота. Масса ядра азота равна 14, а заряд ядра  $= +7$ . Согласно старой картине, такое ядро складывалось из четырнадцати протонов (заряд  $14 \times (+1) = +14$ , масса  $14 \times 1 = 14$ ) и семи электронов (заряд  $7 \times (-1) = -7$ , масса ничтожно мала), компенсировавших излишек положительного заряда протонов в  $+7$  единиц. Тогда спин ядра<sup>1</sup> необходимо должен измеряться нечетным числом половин  $1/2$ <sup>2</sup>, в то время как опыт показывает, что он равен  $\pm 1$ . В новой картине ядро азота образуется из 7 протонов (масса 7, заряд  $+7$ ) и 7 нейтронов (масса 7, заряд 0). Две из числа этих четырнадцати частиц имеют одинаково направленные спины (и, следовательно, дают  $\pm 1/2 \pm 1/2 = \pm 1$ ), спины остальных 12 частиц взаимно компенсируются ( $\pm 1/2 \mp 1/2 = 0$ ). Эта картина строения ядра из тяжелых частиц является первой предпосылкой теории Ферми.

Но, как мы уже отмечали, бета-распад связан с появлением электрона и, следовательно, с увеличением заряда ядра на  $+1$  (суммарный заряд

<sup>1</sup> Спин частицы или ядра  $s$  в единицах постоянной Планка  $\hbar$  равен целому или полуцелому числу, или нулю. Проекция спина  $s$  на заданное направление может принимать  $2s + 1$  значений от  $-s$  до  $+s$  с интервалом 1. В данной статье речь идет фактически о сложении проекций спинов, принадлежащих разным частицам. — *Прим. ред.*

<sup>2</sup> Спин как электрона, так и протона равен  $+1/2$ . Очевидно, нельзя так сложить 21 ( $14 + 7$ ) половин ( $\pm 1/2$ ), чтобы получить суммарный спин  $\pm 1$ .

появившегося электрона и нового ядра равен заряду прежнего ядра: *заряд сохраняется*). Как следует объяснять появление этого электрона, если он не входит в структуру ядра? Действительно, если электрон не входит в ядро, то, очевидно, вылет электрона *из ядра* при бета-распаде следует понимать лишь как «*façon de parler*». Выход из этого затруднения дал Ферми. С его точки зрения, при бета-распаде испускается электрон, который *не существовал* в ядре до бета-распада, а *родился, возник* при этом явлении *за счет энергии тяжелых частиц ядра*.

Это подобно излучению кванта света атомом при переходе электрона из одного возбужденного состояния в другое, когда происходит не вылет из атома кванта, уже в готовом виде находившегося там до излучения, а появление, рождение не существовавшего ранее кванта.

Таким образом, задача Ферми сводилась к нахождению внутри ядра механизма, способного порождать легкие частицы. Следуя Гейзенбергу, Ферми рассматривает электрический заряд тяжелой частицы (протона) не как субстанцию, а как некоторое внутреннее квантовое состояние частицы. При этом нейтрон (масса = 1, заряд = 0) и протон (масса = 1, заряд = +1) рассматриваются не как две различных частицы, а как два разных квантовых состояния одной и той же тяжелой частицы (масса = 1), входящей в состав ядра. Между этими квантовыми состояниями (можно сказать, «нейтронными» и «протонными») возможны квантовые переходы. Бета-распаду и соответствует, согласно Ферми, переход тяжелой частицы из нейтронного состояния в протонное (т.е. превращение нейтрона в протон). Заряд в этой теории таким образом теряет характер атрибута частицы и оказывается только ее модальным свойством. При этом переходе (подобно рождению кванта света при переходе электрона в атом из одного состояния в другое) *рождается пара* легких частиц: электрон и нейтрино. Энергия этой пары частиц равна разности энергий тяжелой частицы в нейтронном и протонном состояниях так же, как энергия кванта света равна разности энергий электрона в высшем и низших квантовых состояниях.

Закон сохранения энергии лежит, следовательно, в самом существе теории: электрон и нейтрино возникают при бета-распаде за счет энергии превращения нейтрона в протон. Интересно отметить, что не только в теории Ферми, но и в упомянутой теории Гейзенберга превращение ядер не есть механический распад на готовые кирпичики, образовавшие ядро, а более сложный процесс взаимного превращения одной формы существования материи в другую. Метафизическое представление о неразрушимости «элементарных» частиц разбивается о выводы новейшей физики.

Непрерывность спектра бета-лучей находит простое толкование в теории Ферми. Пара частиц — электрон и нейтрино — обладает энергией, равной энергии превращения нейтрона в протон. Обозначим ее через  $E_{\max}$ . Эта энергия может различным образом распределяться между электроном и нейтрино. Если энергию электрона обозначить через  $E_e$ , а энергию нейтрино — через  $E_\nu$ , то это распределение должно подчиняться соотношению:

$$E_{\max} = E_e + E_\nu.$$

Величина энергии  $E_{\max}$  задана разностью энергий нейтронного и протонного состояний в ядре и зависит от структуры ядра. Энергия же вылетающего электрона равна разности этой энергии и энергии нейтрино:

$$E_e = E_{\max} - E_\nu.$$

Возможны два крайних случая: когда энергия нейтрино почти равна всей освобождающейся, при переходе нейтрон  $\rightarrow$  протон, энергии  $E_{\max}$ , тогда энергия электрона  $E_e$  имеет минимальное значение ( $E_e = m_0c^2$  — энергии покоящегося электрона); максимальное значение энергии электрона соответствует второму крайнему случаю, когда энергия нейтрино почти равна нулю (в этом случае  $E_e \cong E_{\max}$ ). Следовательно, энергия бета-электрона, рождающегося при бета-распаде, не может быть меньше энергии покоящегося электрона и больше всей энергии, выделяющейся при переходе нейтрон  $\rightarrow$  протон.

Таким образом энергия электрона лежит в пределах

$$m_0c^2 \leq E_e < E_{\max}.$$

В этих пределах энергия электрона может принимать любые значения. Отсюда и следует непрерывность спектра бета-лучей в этих пределах.  $E_{\max}$  имеет, очевидно, смысл верхней границы этого спектра. Реальность этой границы и применимость закона сохранения для нее, как мы уже отмечали, доказаны экспериментально. Непрерывность спектра бета-лучей всегда двигалась как аргумент против закона сохранения энергии, но мы видим, что она *получает свое истолкование только на основе этого закона*.

Эта же теория разрешает и отмеченное выше затруднение с законом сохранения спина. Спин ядра при бета-распаде остается, согласно этой теории, неизменным, так как вылетающие из ядра частицы (электрон и нейтрино) уносят с собой суммарный спин, равный нулю (электрон  $+1/2$  или  $-1/2$ , а нейтрино соответственно  $-1/2$  или  $+1/2$ ). Трактую заряд как модальное свойство частиц, эта теория тем не менее не противоречит сохранению заряда: при переходе частицы ядра из нейтронного состояния в протонное появляется заряд, равный плюс единице, но именно этот переход сопровождается появлением электрона, несущего заряд, равный  $-1$ . Суммарный заряд остается, следовательно, неизменным (нейтрино как и нейтрон заряда не имеют).

Так разрешает теория Ферми трудности, связанные с бета-распадом. Эта теория рождения легких частиц (электронов и нейтрино) и превращения тяжелых частиц (нейтрон  $\rightarrow$  протон) не содержит и следа несохранения энергии.

#### 4. Природа нейтрино

В калориметрических измерениях Элліса и Мейтнер<sup>1</sup> была измерена только средняя энергия электронов, а не энергия электронов и нейтрино. Нейтрино как частицы, не обладающие зарядом, должны очень слабо взаимодействовать с атомами веществ и поэтому очень легко проникать через большие толщи вещества, ускользая от нашего наблюдения. Именно благо-

даря этой исключительно большой проникающей способности нейтрино их энергия не была зафиксирована в калориметре.

Расчеты Ферми показали, что кривые распределения энергии электронов при бета-распаде, вычисляемые по его теории, только тогда согласуются с экспериментальными кривыми (рис. 1), когда масса нейтрино не просто мала, как это допускал Паули, а равна нулю. Разумеется, речь идет о массе покоящегося нейтрино. Следовательно, нейтрино в этом отношении весьма *близко к кванту света*. Как известно, квант света существует только в движении со скоростью света; покоящегося кванта света вообще нет: энергия кванта света  $\epsilon$  равна произведению его частоты  $\nu$  на постоянную Планка  $h$  ( $\epsilon = h\nu$ ). Его масса<sup>1</sup>  $m$  вычисляется по общей формуле Эйнштейна, связывающей массу и энергию через скорость света  $c$ :  $m = \epsilon/c^2 = h\nu/c^2$ . Совершенно таким же образом вычисляется и масса движущихся нейтрино (они существуют и обладают массой только в состоянии движения). Например, при бета-распаде ThC максимальная энергия нейтрино будет  $\epsilon = 2,7 \cdot 10^{-6}$  эрг, а их масса  $m = 3 \cdot 10^{-27}$  г, что в три раза больше массы *покоящегося* электрона. Далее, нейтрино обладает таким же спином, как и электрон ( $\pm 1/2$ ). В этом отношении новая частица *отличается от кванта света*, так как квант света обладает вращательным моментом (спином), равным  $\pm 1$ , или 0 (первые два значения соответствуют правой и левой круговой поляризации света, а последнее соответствует линейной поляризации). Нейтрино, следовательно, обладает следующими свойствами:

- 1) заряда нейтрино не имеет (как и квант света);
- 2) масса покоя нейтрино (как и кванта света) равна нулю;
- 3) спин нейтрино такой же, как и электрона (а не как кванта света).

Мы имеем таким образом дело с совсем новым сортом частиц, открытых на основе закона сохранения энергии, но непосредственно еще не обнаруженных на опыте. Тем не менее нет оснований говорить о нереальности этих частиц. Следует иметь в виду, что открытие каждой новой частицы происходит всегда на основе законов сохранения. Так, например, из опытов Андерсена, Блеккетта и Оккиаллини [11] с космическими лучами в камере Вильсона были сделаны выводы о существовании позитронов (электронов с положительным зарядом). Эти выводы были сделаны по наличию следов частиц и камере Вильсона, изгиб<sup>2</sup> которых в магнитном поле свидетельствовал о положительном заряде этих частиц. Подобный вывод, однако, имеет смысл только постольку, поскольку предполагалась применимость закона сохране-

<sup>1</sup> В современной теоретической физике общепринятым стало использование только массы покоя частицы, которая называется просто массой и является релятивистски-инвариантной характеристикой частицы в отличие от величины  $\epsilon/c^2$ . Частица с нулевой массой характеризуется энергией  $\epsilon$  и импульсом  $p = \epsilon/c$ . См. подробнее: *Окунь Л. Б.* Формула Эйнштейна:  $E_0 = mc^2$ . «Не смеется ли Господь Бог?» // УФН. 2008. Т. 178, № 5. С. 541; *Окунь Л. Б.* О письме Р. И. Храпко «Что есть масса?» // УФН. 2000. Т. 170, № 12. С. 1366; *Окунь Л. Б.* Понятие массы (Масса, энергия, относительность) // УФН. 1989. Т. 158, вып. 3. С. 511. Современные экспериментальные данные свидетельствуют о том, что по крайней мере два типа нейтрино из трех ( $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\nu_\tau$ ) должны обладать ненулевой массой. — *Прим. ред.*

<sup>2</sup> Изгиб пути в магнитном поле вычисляется по релятивистской механике, несовместимой с несохранением энергии.

ния энергии к новой, тогда еще гипотетической частице, позитрону. Нейтрон был открыт Чадвиком [4] и Жолио только посредством применения законов сохранения энергии и импульса к атомам азота и водорода, приходившим под действием излучения из бериллия в энергичное движение. Чадвик из непосредственно наблюдаемых движений атомов азота и водорода пытался найти частицу, которая могла бы сообщить этим атомам такое движение (при условии соблюдения, при ударе атомов, законов сохранения энергии и импульса). Чадвик таким образом пришел к заключению о существовании *нейтрона* (масса = 1, заряд = 0). Поэтому самый факт видимого несохранения энергии при бета-распаде может быть рассмотрен как свидетельство о существовании каких-то новых частиц. Такое, как мы видели, плодотворное заключение и сделали Паули и Ферми.

В каких именно других опытах обнаружится существование нейтрино, сейчас еще трудно сказать, так как неизвестно точно *взаимодействие* нейтрино с уже известными частицами (протоны, нейтроны, позитроны, электроны и кванты света). Известно только, что эти силы очень малы (большая проникающая способность нейтрино). Взаимодействие заряженных частиц (закон Кулона) с современной точки зрения [12] рассматривается *динамически*, а именно как результат непрерывного испускания и поглощения квантов света взаимодействующими частицами. Так, например, отталкивание двух электронов с силой, обратной квадрату расстояния, представляется таким образом, что электроны излучают кванты и поглощают их; каждый из электронов получает «толчок» благодаря отдаче при испускании или поглощении кванта света. Суммарное действие этих толчков, как показывает вычисление, и приводит к отталкиванию электронов, по закону Кулона. Эта теория еще далека от совершенства. Однако она обладает большой ценностью в том отношении, что *раскрывает механизм электрического взаимодействия*.

С этой точки зрения электромагнитное поле, даже статическое, связано с движением частиц — квантов света. Наоборот, существование легких частиц — электронов и нейтрино, способных испускаться и поглощаться тяжелыми частицами, — должно свидетельствовать о наличии соответствующих полей: электронного, нейтринного или электронно-нейтринного, обуславливающих взаимодействие тяжелых частиц. Следует признать, что пока попытки построить такого рода теорию еще не привели к положительным результатам<sup>1</sup>. Успех на этом пути позволил бы из характера взаимодействия тяжелых частиц в ядре получить новые доказательства реальности нейтрино и сделать новые заключения о их свойствах.

Весьма интересно сравнение свойств нейтрино и так называемого *гравитона*. До сих пор известные в физике поля распадаются на два класса: *электромагнитные* и *гравитационные*.

Классическая теория электромагнитных полей была дана в знаменитой теории Максвелла и в настоящее время тесно сплетена с квантовой теорией атома. Теория гравитационных полей дана в общей теории относительности А. Эйнштейна. Все многочисленные попытки, в первую очередь самого

---

<sup>1</sup> См., например, [13].

Эйнштейна, найти связь между электромагнитными явлениями и явлениями гравитационными, начиная с попытки гениального М. Фарадея [14], кончались неудачей и заводили в дебри формализма. Гравитационные явления оказались в стороне и от современной квантовой теории атома (причина этого станет ясной из дальнейшего). В теории тяготения А. Эйнштейна было показано [15], что система, момент инерции которой периодически меняется, должна излучать гравитационные волны, а вместе с ними и энергию. Так, например, планета, вращающаяся вокруг солнца, благодаря своему периодическому движению создает периодически меняющееся гравитационное поле, которое и распространяется в виде волны со скоростью света. Однако это излучение крайне мало и поэтому не сказывается существенно на движении самой планеты. Напомним, что квантовая теория света дала выход из того противоречия, которое породило всю современную теорию атома. Именно, из классической электромагнитной теории следует, что система, обладающая переменным электрическим моментом<sup>1</sup>, должна излучать электромагнитные волны. Такой системой как раз является электрон, движущийся в атоме. Отсюда следовало, что атомы должны непрерывно терять свою энергию и, следовательно, разрушаться. Квантовая теория показала, что излучение электроном происходит *не в виде волн, а квантами света*, при переходе электрона из одного квантового состояния в другое. Но излучение электромагнитных волн — не единственная причина неустойчивости атома. Благодаря излучению гравитационных волн движущимся электроном в атоме, аналогичным планете в солнечной системе, атом также будет терять энергию. Следовательно, с классической точки зрения, атом должен непрерывно терять и электромагнитную и гравитационную энергии. Поэтому, чтобы понять стабильность атомов, нужно предположить, что не только электромагнитная энергия, но и энергия гравитационная излучаются не в виде волн, *но квантами* энергии: в первом случае — квантами электромагнитной энергии — квантами света (фотонами), во втором случае — квантами энергии тяготения — «*гравитонами*». Гравитоны, однако, не имели никакого значения в современной квантовой теории атома ввиду того, что вероятность их излучения, как можно подсчитать, ничтожно мала в сравнении с вероятностью излучения светового кванта. Равным образом малы и гравитационные взаимодействия по сравнению с взаимодействиями электромагнитными. Излучение и поглощение гравитонов должны были бы вести к взаимодействию частиц по закону Ньютона (к гравитационному полю), подобно тому как поглощение и излучение квант света заряженными частицами ведут к закону Кулона. Эти гравитоны должны, подобно квантам света, обладать массой только в состоянии движения со скоростью света. Они, разумеется, не несут электрического заряда. С этой точки зрения они крайне *схожи* с введенными Ферми нейтрино. Тот факт, что вероятность излучения гравитона крайне мала по сравнению с вероятностью излучения фотона, имеет значение только для заряженных частиц. Незаряженная частица, какой является нейтрон, вообще не может излучать квант

---

<sup>1</sup> Электрическим моментом называют произведение заряда частицы на ее радиус-вектор относительно некоторой точки (например, центра атома).

света, и излучение гравитонов может для него иметь существенное значение. Бета-распад как раз является таким процессом, в котором мы и имеем дело с квантовым переходом *нейтрона*. Приведенное выше сравнение свойств гравитона со свойствами нейтрино, обнаруживающее их сходство, *может быть*, свидетельствует о том, что, *вообще говоря*, мало вероятный процесс излучения гравитонов становится *практически наблюдаемым* при бета-распаде. *Если бы нейтрино действительно были гравитонами, это означало бы, что современная физика подошла к ликвидации все еще существующей непроходимой грани между гравитацией и электромагнетизмом.*

Тем не менее все же трудно, по теоретическим соображениям, отождествить гравитоны с нейтрино, так как трудно допустить, что гравитоны имеют спин, равный  $1/2$ , каким обладает нейтрино<sup>1</sup>. В этом отношении гравитон более схож с квантом света, нежели с нейтрино. Но нельзя не считать, что возможность их отождествления совершенно исключена теорией. Пока все же более правильно рассматривать нейтрино как самостоятельный сорт частиц.

## 5. Заключение

Из нашего рассмотрения ясно, что кажущееся противоречие между закономерностями бета-распада и законом сохранения энергии теория Ферми решает в пользу этого закона. Вместе с тем эта теория ведет к расширению нашего познания внутриядерных процессов. Подвергнется ли эта теория в дальнейшем радикальным изменениям или нет, сказать еще трудно. Весьма вероятно, что ее существенные черты сохранятся и в будущей, более полной теории. Но уже сейчас ясно, что своими успехами она обязана закону сохранения энергии. С другой стороны, нашумевшая и известная по своей бесплодности попытка превратить несохранение энергии в руководящий принцип ядерной физики оказалась вредной, ибо она не только не продвинула ни на шаг вперед изучение внутриядерных явлений, но тормозила это изучение, толкая исследователей на неправильный путь, допуская, что отклонением от закона сохранения энергии можно чего-то достичь или что-то решить. Закон сохранения и превращения энергии по-прежнему остается несокрушимым законом природы.

## Список литературы

1. Ленин В. И. Материализм и эмпириокритицизм. Гл. V. — Полн. собр. соч. в 55 т. 5-е изд. М.: Политиздат, 1958–1965. Т. 18. — *Прим. ред.*
2. Блохинцев Д. И., Гальперин Ф. М. // Под знаменем марксизма. 1934. № 2. С. 97–106.
3. Атомное ядро: Сб. ГТТИ, 1934.

---

<sup>1</sup> Гравитон имеет спин 2, поэтому очевидно нельзя отождествить гравитон с фотоном (спин 1) и тем более с нейтрино (спин  $1/2$ ). Идея о нейтринной природе света в свое время привлекла внимание физиков (де Бройль и его сотрудники, А. А. Соколов и др.). См. по этому вопросу книгу: Соколов А. А., Иваненко Д. Д. Квантовая теория поля (Избранные вопросы). М.—Л.: Гос. изд. тех.-теор. лит., 1952. С. 626. — *Прим. ред.*

4. *Чадвик Дж.* Нейтрон // УФН. 1934. Т. 14, вып. 2. С. 183.
5. *Fermi E.* // Zs. Phys. 1934. Bd. 88. S. 161.
6. *Sargent B. W.* // Proc. Roy. Soc. 1933. V. A139. P. 659.
7. *Ellis C. D., Mott N. F.* // Proc. Roy. Soc. 1933. V. A139. P. 369.
8. *Гамов Г. А.* // УФН. 1934. Т. 14, вып. 4. С. 491.
9. *Gamov G. A.* // Nature. 16.06.1934.
10. *Гейзенберг В.* Доклад на VII Сольвеевском конгрессе 1933 г.
11. *Блеккетт П., Оккиаллини Дж.* // УФН. 1933. Вып. 7. С. 491.
12. *Dirac P. A. M.* // Proc. Roy. Soc. 1932. V. A136. P. 453.
13. *Tamm I. E.* // Phys. Zs. d. Sow. Union. 1934. V. 6. P. 189.
14. *Тамм И. Е.* // УФН. 1932. Т. 12, вып. 1. С. 1.
15. *Эддингтон А. С.* Математическая теория относительности. Киев: Гос. научно-техн. изд-во Украины, 1933.



## НОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБ ЭЛЕКТРОНЕ\*

Когда изучаешь труд В. И. Ленина «Материализм и эмпириокритицизм», где подробно рассматривались в числе других важнейших философских проблем и вопросы методологии естествознания, то поражаешься, с какой глубиной и ясностью Ленин, не будучи физиком, разбирался в очень сложной ситуации, сложившейся тогда в физике и философии естествознания. Надо вспомнить, что этот период был для науки переломным, когда от механической физики ученые переходили к физике электромагнитной.

Развивая идеи диалектической теории познания, Ленин высказал замечательные мысли о неисчерпаемости электрона, в частности, о том, что научное познание электрона может идти как угодно глубоко и будет приносить все новые и новые факты. Эта мысль базировалась на представлении, что всякая реальность является неисчерпаемой и мы только постепенно познаем особенности этой реальности, углубляя и расширяя наши знания. Идея Ленина о неисчерпаемости электрона получила очень важное развитие, весьма разностороннее подтверждение и сейчас очень актуальна.

До последнего времени мы встречаемся с концепциями, согласно которым элементарные частицы представляют собой точечные объекты. Это, конечно, неправильно и идет вразрез с взглядом Ленина.

В данной статье я хотел бы рассказать о том, как со времени Ленина развились наши представления об электроне и вообще об элементарной частице и как важно это развитие для нас, физиков.

Я не буду подробно излагать историю вопроса.

Прежде всего напомним, что во времена Ленина физики представляли себе электрон, как заряженный шар. И хотя это очень элементарное представление, многие ученые считали, что оно полностью отображает ту реальность, которую мы называем электроном.

Однако какие бы ни развивались спекулятивные теории, касающиеся электрона, уже в то время был выяснен масштаб, связанный с ним. Этот так называемый классический масштаб электрона определяется из следующего соотношения:

$$a_0 = \frac{e^2}{m_0 c^2} = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см},$$

где  $e$  — заряд электрона,  $m_0$  — его масса,  $c$  — скорость света. Такие масштабы физических объектов очень важны, они являются теми вехами, которые отделяют определенные области от других и обычно означают качественное изменение закономерности. Попытка развить теорию электрона как теорию заряженного шара очень быстро привела к противоречию с теорией относительности и было выяснено, что на этом пути получить концепцию электрона невозможно. Правда, несколько позднее, в 30-х гг., Макс Борну удалось построить классическую теорию электрона, которая была довольно изящна и против нее трудно было что-либо возразить. Для этой теории характерен указанный выше масштаб —  $10^{-13}$  см. Но нужно сказать, что теория М. Борна родилась слишком поздно, в это время уже были известны другие свойства электрона, которые нельзя было совместить с классическими концепциями и которые теория Борна не могла объяснить.

Таким образом, проблема структуры электрона во времена Ленина была сформулирована, но не была решена. Как мы увидим далее, она, в сущности говоря, не решена и до сих пор.

Развитие электронной теории пошло в дальнейшем главным образом по пути изучения движения электрона как целого. На этом пути в 20-х гг. нашего столетия развилась квантовая механика, которая позволила открыть новые качества электрона: волновые свойства, существование у него механического момента и т. д. Уже с точки зрения квантовой механики можно сказать, что электрон гораздо богаче, чем его представляли себе в начале развития электронной теории. Это подтверждает тезис Ленина о неисчерпаемости элементарных частиц.

В проблеме структуры элементарных частиц квантовая механика прежде всего принесла новый масштаб — так называемую комптоновскую длину электрона. Комптоновская длина электрона определяется квантовой постоянной  $\hbar$  и составляет  $l_0 = \hbar/m_0c = 3,8 \cdot 10^{-11}$  см. Как видите, эта величина в сотню раз больше классического радиуса электрона. Таким образом, сразу стало ясно, что без учета квантовых эффектов вообще невозможно рассматривать какую-либо теорию структуры электрона, потому что квантовый масштаб оказался больше, чем классический. Проблема заключается в том, какая же из этих величин, классическая или квантовая, существенна для структуры электрона и определяет его масштаб? Естественно, возникли некоторые надежды, что квантовой механике удастся значительно продвинуться в этом направлении. Что же получилось на самом деле? Когда была применена квантовая теория, то оказалось, что масса электрона получалась бесконечной<sup>1</sup>. Таким образом, и квантовая техника, если так можно выразиться, оказалась недостаточной для понимания структуры электрона. Вероятно, законы внутреннего строения электрона еще более тонки, чем законы квантовой механики.

Несмотря на то, что квантовой теории не удалось разрешить проблему структуры электрона, все-таки на этом пути были достигнуты некоторые

---

<sup>1</sup> Бесконечной получается собственная энергия  $E$ , которая связана с массой соотношением  $E = mc^2$ .

существенно новые результаты. Прежде всего, оказалось, что расчет радиуса электрона по квантовой теории дал новый масштаб, назовем его «квантовым радиусом электрона»:

$$a_{\text{кв}} = \frac{\hbar}{m_0 c} e^{-137} \cong 10^{-70} \text{ см},$$

где  $e$  — основание натуральных логарифмов.

Этот масштаб связан с комптоновой длиной, но умножается на исключительно малое число ( $e^{-137}$ ). Благодаря этому радиус оказался равным  $10^{-70}$  см. Такой малый радиус электрона, полученный из теории, сам по себе был весьма поразительным фактом. Чл.-корр. АН СССР М. А. Марковым было замечено, что этот радиус даже меньше гравитационного, т. е. той длины, которая определяет эффекты тяготения. Гравитационный радиус электрона

$$a_{\text{гр}} = \frac{km_0}{c^2} \cong 10^{-55} \text{ см}$$

(где  $k$  — гравитационная постоянная), т. е. он много больше квантового радиуса.

Поэтому многие физики стали думать (и эта мысль подмечена М. А. Марковым), что без гравитации вообще нельзя рассмотреть структуру электрона, потому что гравитационный радиус больше квантового.

Надо сказать, что физики, которые пытались привлечь к вопросу о структуре электрона теорию тяготения, не достигли успеха: проблема оказалась слишком сложной и слишком трудной. Сами длины, я бы сказал, подозрительно малы по сравнению с классическим и комптоновским радиусами.

Один из успехов, который, тем не менее, был достигнут в квантовой теории поля, заключался в том, что удалось вычислить некоторые новые эффекты. Оказалось, что электроны движутся в атомах не по плавным орбитам (я буду применять термин «орбита»), но на самом деле под влиянием нулевых колебаний электромагнитного поля совершают вблизи орбиты как бы нерегулярное броуновское движение. Кроме того, около электрона возникают пары позитронов и электронов, вакуум около электрона поляризуется.

Эти очень тонкие эффекты, предсказанные теорией, были затем обнаружены экспериментально, т. е. было показано, что возникает обусловленное этими явлениями расщепление и сдвиг уровней энергии атома водорода, которые и были обнаружены экспериментально.

Точность, достигнутая в этих измерениях, значительно превосходит «астрономическую».

Однако эти новые методы не позволили при решении вопроса о массе электрона освободиться от бесконечностей. Если же массу электрона удавалось «сделать» конечной, то заряд его обращался в нуль.

Видимо, правильный вывод заключается в том, что современная электродинамика вообще неприменима к таким масштабам, как длина  $a_{\text{кв}}$ , которая оказывается существенной при последовательном развитии современной квантовой электродинамики.

Я бы хотел в связи с этим заметить, что существуют и другие процессы, которые мы обычно не привыкли принимать во внимание, но которыми нельзя

(или  $g^2/\hbar c$ ), которая характеризует взаимодействие нуклонов и  $\pi$ -мезонов. Эта постоянная равна 15, т. е. она в две тысячи раз больше, чем постоянная тонкой структуры. Это значит, что атмосфера нуклона очень плотна.

Атмосферу нуклона удалось обнаружить экспериментально; с помощью электронов большой энергии были получены сведения о существовании такой  $\pi$ -мезонной атмосферы. В этом смысле можно сказать, что совершенно четко обнаружена структура нуклонов. Итак, нуклон имеет довольно сложное строение.

Надо сказать, что в изучении таких проблем, как структура нуклонов, двигаться вперед так же трудно, как в далекие области Вселенной. Разница только в том, что в астрофизике приходится пользоваться сложными телескопами, а в атомной физике — сложными ускорителями. Успешным шагом в этом направлении является то, что синхрофазотрон в Дубне сейчас позволяет работать в области расстояний  $10^{-14}$  см.

Хотелось бы еще подчеркнуть следующее. Как видно из изложенного, картина элементарных частиц получается очень сложной. Однако, исходя из методологии, которую нам оставил Ленин, можно утверждать, что в области малых масштабов мы встретимся с еще более интересными явлениями.

Приведем пример, который показывает, что может дать изучение областей малых масштабов, причем здесь нельзя обойтись без более или менее гипотетических предположений.

Представьте себе, что вы будете рассматривать взаимодействие (столкновение) двух быстрых нуклонов, скажем, двух протонов. При этом рождаются новые частицы — нуклоны, мезоны, т. е. возникает «ливень» или «звезда», как мы иногда говорим. Взаимодействие мы определяем сечением, т. е. элементарной площадкой, которую один нуклон «подставляет» другому.

Сейчас замечено, что для частиц с очень большими энергиями, начиная с энергии, которую мы имеем на ускорителях, и кончая максимальными энергиями космических лучей (их энергия в  $10^9$  раз больше), это сечение остается постоянным, т. е. оно не убывает с энергией.

Теперь можно поставить такой вопрос: что будет с нуклонами, если вы возьмете энергии исключительно высокие, фантастически высокие (можете себе представить, что протон разогнался на каких-то космических полях и достиг огромной энергии). Тогда есть две возможности: либо сечение будет падать с энергией, либо останется неизменным.

В первом случае мы получаем то, что вытекает из современных теорий: взаимодействие убывает, и если оно при весьма больших энергиях частиц обратится в нуль, то это значит, что частицы становятся свободными. Тогда частица, которая имеет огромную энергию (это будет ее «личным делом»), не сможет эту энергию передать другим частицам.

Представим, однако, другой случай: с увеличением энергии площадь сечения не уменьшается (это мы наблюдаем при сравнении частиц, ускоренных искусственно, с частицами космических лучей). Тогда при столкновении таких нуклонов с исключительно высокой энергией будут рождаться *макроскопические* тела. Энергия этих частиц будет достаточной для образования колоссального количества элементарных частиц. Если немножко пофанта-

зировать, то легко себе представить, что в результате таких столкновений нуклонов может родиться звезда — не в лабораторном смысле, а в таком, как ее понимают астрономы. И тогда можно сказать, что возникнет прямой переход явлений микроскопических в явления макроскопические.

Совершенно ясно, сколь сложной и глубокой должна быть теория, чтобы она могла описать явления и возможности, которые на самом деле могут заключаться в микромире.

Если здесь будут возникать нуклоны и антинуклоны и разлет их будет не симметричен, то в одну сторону больше полетит нуклонов, а в другую — антинуклонов, и каждый из них будет продолжать расщепляться: нуклоны будут догорать в «мире», а антинуклоны в «антимире».

Я позволил себе привести пример, который показывает, что значат маленькие масштабы и что в них может содержаться. Это доказывает на совершенно конкретном физическом примере, какой реальный вес имеют слова Ленина о неисчерпаемости электрона или, мы сказали бы теперь, о неисчерпаемости элементарных частиц.

Следует напомнить, — и Ленин это часто подчеркивал, — что вопрос о нашем знании или незнании — это вопрос практики; знание есть превращение вещи в себе в вещь для нас. Если рассмотрим сегодняшнюю ситуацию в физике, то можем сказать, что атом, и отчасти атомное ядро, в значительной степени превратился из вещи в себе в вещь для нас. Сейчас мы присутствуем при том, когда с элементарными частицами происходят эти же процессы.

Владимир Ильич Ленин предвидел такой ход развития знаний, такой ход развития физики. В этом сила ленинского предвидения, и в этом значение книги Ленина «Материализм и эмпириокритицизм» для нас, физиков.

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РАЗВИТИЯ СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКИ\*

Развитие современной физики выдвигает ряд сложных методологических проблем. Их успешное разрешение крайне важно для физиков. Однако мы часто слышим от физиков и особенно от тех, которые не принимают участия в философской работе, что нет никакого, в сущности говоря, прогресса в развитии нашей марксистской философской мысли в области методологии естествознания. На мой взгляд, этот тезис является совершенно неправильным. Тот, кто следил за нашей философской литературой на протяжении десяти-пятнадцати лет, может отметить существенный прогресс. В частности, доклады, которые были представлены первому Всесоюзному совещанию по философским вопросам естествознания, показывают, насколько более зрелой, глубокой и содержательной стала наша советская марксистская философская мысль.

Но прогресс этот был бы гораздо бóльшим, если бы мы не спотыкались в течение многих лет на очень простых вещах. Достаточно было кому-то заметить, что тот или иной факт или теория могут быть связаны или истолкованы в духе идеализма или позитивизма, как полностью отвергалось все содержание, связанное с этим фактом или теорией. Можно сказать так: если имелся котел с хорошим материалистическим борщом, то достаточно было кому-то заявить: «А там есть "идеалистический таракан"!» — и этот котел немедленно опрокидывался, а потом очень трудно было разобрать, каков был борщ и был ли в нем таракан.

Разумеется, такого рода действия очень тормозили и задерживали наше движение вперед. Мне думается, сейчас это стало в значительной степени ясно для всех. Мы стали достаточно зрелыми, чтобы не пугаться «идеалистического таракана».

Ленин в «Материализме и эмпириокритицизме» показал пример того, как нужно анализировать с марксистской философской точки зрения ситуацию в естествознании и как следует критиковать идеалистические трактовки и высказывания, которые были связаны с известным в те годы кризисным положением в философии физики. Я думаю, нам всем надо отдавать себе ясный отчет в том, что никакие научные проблемы не могут быть решены путем жонглирования словами. Нужна очень серьезная и глубокая работа и в области философии естествознания.

Мне кажется, что прогресс заключался также в том, что различные точки зрения наших физиков и философов сблизились, причем это сближение произошло не на основе компромисса, а на основе более глубокого марксистского анализа и теории относительности, и квантовой механики, и других вопросов, которые нас интересовали и волновали. Если обратиться сейчас к квантовой механике, то мы имеем здесь три точки зрения. Одна из них представлена В. А. Фоком; она всем известна, и я не буду ее повторять. Другая точка зрения была изложена в моем курсе и фигурировала в моей полемике с В. А. Фоком — это так называемая концепция «квантовых ансамблей». Третья точка зрения представлена Бомом, де Бройлем и у нас проф. Я. П. Терлецким. Если мы тщательно проанализируем эти точки зрения, то увидим, что в них есть нечто общее — все они исходят из материализма. Правда, подход в них разный. Метод, который применяет В. А. Фок, — это метод «перегонки». Он берет квантовую механику со всеми философскими концепциями, которые строятся в связи с ней, и подогревает ее, рассчитывая, что наиболее легкие фракции этой жидкости — неопозитивизм, идеализм и т. п. — испарятся, а более тяжелая фракция — материалистическая — останется. Не вижу оснований, почему бы следовало осуждать этот метод борьбы с идеализмом. И действительно, если проследить работу, которая проделана В. А. Фоком в этом направлении, то оказывается, что она очень большая и, безусловно, весьма положительная.

Но остается открытым один вопрос: можно в квантовой области предсказать индивидуальное явление или нет? В. А. Фок отвечает, что основная концепция квантовой механики такова, что это предсказание в принципе невозможно. В моей концепции делается попытка указать причину появления индивидуального явления как следствия связи микроявлений и макроскопической обстановки.

Бом, де Бройль и Терлецкий полагают, что одновременно существуют и импульсы и координаты частиц, и, опираясь на это представление, они думают пойти дальше в понимании квантовой статистики. Я не разделяю их точки зрения как чрезмерно «классической». Однако я должен заметить, что сейчас нам довольно трудно сделать выбор. Каждый из нас мог бы сказать и уже сказал довольно много в защиту своих взглядов, но деловой и серьезный потребитель был бы разочарован, если бы он рассмотрел эти концепции ближе. Этот потребитель сказал бы, что каждый подчеркивает преимущества своей концепции, но где же те практические проблемы, которые заставили бы нас пересмотреть квантовую механику? Допустим, в эксперименте было бы обнаружено, что можно найти координаты и импульсы электрона одновременно. Тогда квантовая механика оказалась бы неполной. Но квантовая механика работает безукоризненно в круге атомных явлений. Поэтому различные точки зрения на квантовую механику в смысле практических выводов оказываются совершенно равноправными. Они неравноправны только в смысле некоторых перспектив и тенденций, которые можно было бы вообразить. И это обстоятельство делает очень затруднительным всю дискуссию и выбор точки зрения.

Кто же прав: Фок, Блохинцев, Терлецкий и Бом или кто-нибудь другой? На этот вопрос нелегко ответить, потому что мы возвращаемся в круг установившихся квантовых понятий, и это препятствует основательному выбору.

Но возможен ли выход из этого положения? Мне кажется, что возможен, однако этого нельзя достигнуть только дискуссией, хотя она может принести пользу, так как способствует более глубокому пониманию квантовой механики. Для этого нужно обратиться к тем явлениям, которые уже не вытекают из квантовой механики, к которым она не может быть применена, то есть найти более широкую точку зрения.

В развитии физической картины мира проявляется важная диалектическая закономерность познавательного процесса — высшее является ключом к пониманию низшего. Чтобы занять более высокую позицию, нужно, по существу, создать новую концепцию, а это, конечно, не простое дело, это и есть самая важная задача современной физики.

В связи с этим я хочу сказать о тех явлениях, которые действительно открывают простор для новых точек зрения. Речь идет о явлениях, связанных с физикой высоких энергий, или, как часто говорят, с физикой «элементарных» частиц. Если мы обратимся к этому кругу явлений, то мы встретимся там с фактами, которые можно интерпретировать как очень серьезное предостережение против применения тех концепций, к которым мы уже привыкли.

Сейчас в физике высоких энергий наблюдается некоторая аналогия с астрономией. Очень интересно знать, как развивается Вселенная, как она построена и т. д. На эти вопросы не так легко ответить. Надо строить большие телескопы, радиотелескопы и изучать окружающий нас мир. Появляется новая техника, а вместе с ней и новые возможности, расширяется круг сведений. В докладе В. А. Амбарцумяна на первом Всесоюзном совещании по философским вопросам естествознания были приведены совсем новые факты о расширении Вселенной, которые могут изменить наше представление о ее эволюции.

То же самое происходит в атомной физике. Мы работаем сейчас в области масштабов  $10^{-13}$  см. Как видите, масштаб очень маленький. В последнее время в связи с пуском большого ускорителя мы перешли к масштабу  $10^{-14}$  см, т. е. изменение произошло в 10 раз. Но при этом надо было существенно увеличить энергию частиц, получаемую в ускорителе. Сейчас ясно, что ускорители, с которыми мы имеем дело, подходят к пределу развития и нужны новые физические и технические идеи для того, чтобы продвигаться дальше. Построить же быстро ускоритель трудно. Постепенно развивая ускорители, то есть переходя ко все более и более коротким длинам волн, мы все глубже и глубже познаем структуру «элементарных» частиц.

Явления на различных глубинах «элементарных» частиц оказываются тесно связанными между собой. И очень трудно построить теорию явлений в масштабах  $10^{-13}$  см, не проникая внутрь частицы. Оказывается, внутренняя структура частицы очень влияет на периферию. Получаются бесконечности и всякие другие неприятные математические вещи. С другой стороны, методологически было бы странно думать, что можно построить теорию, которая была бы верна до нуля. Некоторые полагают, что от  $10^{-14}$  до нуля недалеко. Но с точки зрения нашей методологии трудно представить себе, что можно построить сразу теорию для каких угодно малых масштабов. Надо бы найти некоторую границу, как в свое время было сделано в теории атома. Некоторые



соглашались, что плохо считать атом неизменяемым. Но если бы его считали изменяемым, то ничего нельзя было бы сделать. Было очень хорошо, что на тропинке, ведущей внутрь атома, поставили на время такую загородочку. А мы такой загородочки пока найти не можем. Поэтому у нас очень трудное положение. Мы как бы ходим по узкой доске, а под нами — огромная пропасть, глубины структуры «элементарных» частиц. Квантовая механика и теория относительности имели определенный успех в объяснении явлений физики высоких энергий, однако очень ограниченный.

Делать точные расчеты в области физики высоких энергий довольно трудно, но некоторые оценки сделать возможно. Представьте себе, что сталкиваются две частицы с очень высокой энергией, например, два нуклона. Если оценить, то получается, что энергия взаимодействия таких частиц оказывается больше, чем их собственная энергия. Спрашивается, какое при этих условиях значение имеет понятие частицы? Процесс этот разыгрывается в очень короткое время —  $10^{-28}$  с, но только он и представляет интерес. По-видимому, в момент взаимодействия индивидуальность частиц очень сомнительна.

Здесь много говорят о новой полевой гейзенберговской концепции. Предлагается рассматривать только одно поле как основу теории. Тогда спрашивается: как определить, что такое координаты в этом поле? Понятие координат — это понятие координат частицы. Если нет частицы, то как же определить понятие точки пространства? Создается впечатление, что наши основные понятия, такие, как понятие частицы (которое глубочайшим образом связано с квантовой механикой и теорией относительности) и понятия о пространстве и времени, оказываются несостоятельными в малых областях пространства-времени. Если это так, то представления о пространстве и времени в областях малых масштабов должны существенно измениться.

Опыт показывает, что взаимодействие частиц при больших энергиях не убывает: если столкнутся два нуклона очень большой энергии, то образуется очень большое количество частиц (каскад). Спрашивается: как же можно простыми средствами рассмотреть это явление? Ясно, что мы будем двигаться постепенно, проникая со стороны периферии в глубь «элементарных» частиц.

Мне кажется, если рассмотреть те физические концепции, которые развивались примерно с 30-х годов — локальная теория, нелокальная теория, нелинейные теории и т. п. — и которыми многие из присутствующих здесь физиков занимались, и даже последнюю теорию, которую предложил Гейзенберг, то можно сделать определенный вывод: все эти теории слишком близки к известным классическим концепциям. Впечатление такое, что не хватает фантазии. Нужен серьезный, фундаментальный шаг вперед, который бы радикально изменил наши представления о частицах и пространстве. Здесь нужно, может быть, только одно: идея должна быть какой-то совершенно «сумасшедшей» по сравнению с установившимися на сегодняшний день в физике понятиями.

В частности, когда мы последний раз обсуждали теорию Гейзенберга, мы пришли к заключению, что она недостаточно «сумасшедшая». Все элементы там известны. Конечно, можно сказать, что фактов недостаточно, чтобы построить полную теорию, это вполне вероятно. Но с чисто профессиональной

точки зрения теоретик и философ должны считать, что фактов всегда достаточно, а не хватает только фантазии. В этой связи полезно вспомнить мысль Ленина о важности фантазии в научном познании, о «мечте, полезной как толчке к работе». В «Философских тетрадах» В. И. Ленин писал, что «в самом простом обобщении, в элементарнейшей общей идее («стол» вообще) *есть* известный кусочек фантазии... нелепо отрицать роль фантазии и в самой строгой науке...» (Соч. Т. 38. С. 370).

Заканчивая этим свое выступление, мне хотелось бы привлечь нашу философскую мысль к философским проблемам, которые возникают сейчас на переднем фронте физики элементарных частиц и физики высоких энергий.

Если эти вопросы будут решены, то тыловые вопросы, по поводу которых мы сейчас дискутируем, приобретут другую степень ясности и гораздо большую степень однозначности. И тогда мы скажем, что квантовую механику так же скучно обсуждать, как закон Архимеда. Для выполнения этой задачи большое значение имеет дальнейшее укрепление союза философии и физики.

Комментарий. Данная статья является характерным примером выступлений Д. И. Блохинцева по философским проблемам физики. Она построена по четко выдержанному плану: вначале подведение итогов, далее идет обсуждение нерешенных проблем, потом намечаются возможные пути продвижения вперед. Такой деловой конструктивный подход к рассматриваемым проблемам прослеживается во всех его работах по методологическим вопросам физики [1].

В философских работах Д. И. Блохинцев выступал с позиций диалектического материализма, который он понимал как естественную здравую точку зрения по мировоззренческим проблемам физика, стремящегося постичь окружающий мир. Здесь нет и тени какой-либо политизации.

В своем выступлении Д. И. Блохинцев не соглашается с теми, кто не видит пользы в сотрудничестве физиков и философов-марксистов. На самом деле он трезво оценивал эффективность такого сотрудничества. В Автореферате своих работ [2], написанном им в конце жизни, он вспоминает: «Вмешательство некоторых философов в развязавшиеся... дискуссии способствовали запутыванию ясно поставленных физических вопросов и ненужному обострению дискуссий».

Дмитрий Иванович резко реагировал на все «перегибы» со стороны «рьяных» защитников диалектического материализма. Эта борьба, как отмечает он в Автореферате, «временами принимала драматический характер». В комментируемом выступлении Дмитрий Иванович призывает (в первую очередь философов) не пугаться мнимого идеалистического таракана и не опрокидывать котел с хорошим материалистическим борщом — современной физикой.

Философские установки, которым следовал Дмитрий Иванович, не довели над ним. У него всегда была собственная точка зрения, которую он и отстаивал. Он не был послушным «винтиком» в руках партийных функционеров и ортодоксальных философов. Вот яркий тому пример. В начале 50-х гг.

намечалось проведение дискуссии по физике и руководство Атомного проекта в лице И. В. Курчатова предложило Д. И. Блохинцеву возглавить эту дискуссию. Дмитрий Иванович отказался от этого предложения [3], согласившись только на роль рядового участника, если такая дискуссия «будет признана... целесообразной». Очевидно, что надо было обладать завидным мужеством, чтобы пойти на такой поступок в те суровые в идеологическом отношении годы.

Здесь следует напомнить о том, что каким бы непростым и суровым ни было время, Дмитрий Иванович всегда следовал высоким нормам морали. Один из примеров тому — его выступление на активе ФИАН в 1937 г. [4]. Несмотря на грозную обстановку актива, Дмитрий Иванович остался верен своему учителю И. Е. Тамму, не отрекся он и от своего товарища и соавтора по ряду публикаций Ф. М. Гальперина. О том, какой ценой давалась Дмитрию Ивановичу такая позиция, можно косвенно судить по некоторым его лирическим стихотворениям [5].

В комментируемом выступлении Дмитрий Иванович поднимает вопрос, какова цель различных интерпретаций квантовой теории? Внутри самой квантовой механики различные интерпретации не дают ничего нового, отмечает он и предлагает направить общие усилия интерпретаторов на поиски новых путей научного развития за рамками квантовой механики, а именно, перейти в квантовую теорию поля и в физику элементарных частиц.

Вопрос о роли и задачах различных интерпретаций квантовой теории актуален и сейчас. К настоящему времени насчитывается уже около двух десятков таких интерпретаций. Начинающие изучать квантовую механику остаются фактически один на один с этим мощным разноголосым потоком утверждений, мнений (часто взаимно исключающих) по принципиальным вопросам квантовой теории, причем противоположные мнения зачастую принадлежат признанным авторитетам в мировой науке. Авторы учебников по квантовой механике обходят эти вопросы, или же излагают ту интерпретацию квантовой теории, которая более близка им.

В комментируемом выступлении Дмитрий Иванович кратко коснулся и процесса научного поиска — «механизма» генерирования новых идей. Его слова о том, что дело не в фактах, которых вероятно уже достаточно, а в том, что не хватает фантазии, стали крылатыми и вошли в художественную литературу [6].

Говоря о философских, методологических и публицистических выступлениях Дмитрия Ивановича, нельзя не отметить живой, образный и вместе с тем точный язык. Уже одно сравнение мнимого идеализма в физике с тараканом в борще бесспорно свидетельствует о литературном таланте автора.

## Список литературы

1. Блохинцев Д. И. Труды по методологическим проблемам физики. М.: Изд-во МГУ, 1993.
2. Блохинцев Д. И. Мой путь в науке (Автореферат работ). Избранные труды Д. И. Блохинцева: В 2 т. Т. 1. М.: Физматлит, 2009.

3. Зродников А. В., Фролов Ю. В. Д. И. Блохинцев — первый научный директор Лаборатории «В». Избранные труды Д. И. Блохинцева: В 2 т. Т. 1. М.: Физматлит, 2009.
4. Горелик Г. Е. Москва, физика, 1937 год // Трагические судьбы репрессированных ученых Академии наук СССР. М.: Наука, 1995. С. 54.
5. Муза в храме науки: Сб. стихотворений. М.: Сов. Россия, 1982. С. 173–180.
6. Стругацкий А., Стругацкий Б. Понедельник начинается в субботу: Фантастические повести. М.: Детская литература, 1979. Эпиграф к гл. 5.

*В. В. Нестеренко*

## НА ПОРОГЕ ГЛУБОЧАЙШЕЙ НАУЧНОЙ РЕВОЛЮЦИИ\*

На эту конференцию было представлено несколько сот докладов. Их удалось уплотнить примерно в три раза. Мне предстояло бы сжать их еще в несколько десятков раз. При такой степени сжатия материал перешел бы в состояние, которое еще мало изучено в физике. Поэтому более естественно избрать иной путь и остановиться лишь на тех фактах и идеях, которые могут быть особенно существенны для дальнейшего развития физики высоких энергий. Конечно, при таком выборе трудно избежать личной окраски и невольно вспоминаешь, что пророков и предсказателей побивают камнями. Тем не менее такова, по традиции, функция председателя конференции и каков бы ни был риск, я должен ее выполнить.

Мы все отчетливо понимаем, что за немногие годы развития исследований по физике высоких энергий перед нами предстала картина совершенно нового мира — мира элементарных частиц. Вооруженные принципами, которые, может быть, устарели, или во всяком случае не обладают достаточной силой, мы с трудом пробираемся к истине через нагромождение огромного количества фактов. Эти факты подчас образуют красивые и заманчивые сочетания, которые могут служить основой для теоретических построений. Однако большинство из них оказываются эфемерными. Поэтому многие физики не без оснований думают, что ключ к пониманию закономерностей микромира будет найден лишь в результате революционных изменений в самых основных принципах современной теории. Быть может, именно этим направлением мыслей был вызван значительный интерес к секции «Новых идей», которую правильнее было бы назвать секцией «Еретических идей». На этой секции были доложены маячащие перед фантазией теоретиков предположения о квантовании пространства-времени, о возможности изменений причинности в малых масштабах или особой роли нелинейности сильных полей вблизи частиц. Успех и обоснованность этих концепций очень невелики, и я еще раз хотел бы подчеркнуть, что интерес к ним, по моему мнению, был следствием не столько успехов в этих направлениях, сколько тем, что старые принципы, по-видимому, многим основательно наскучили. Однако эти старые принципы, быть может, и слабосильны, но стойки: пока нет никаких прямых указаний из эксперимента на их несостоятельность.

В этой связи мне будет удобно перейти к тем результатам, которые были доложены и обсуждены на этой конференции в области сильных взаимодействий элементарных частиц. Существенно новым является измерение рассеяния нуклонов и  $\pi$ -мезонов на малые углы и доказательство существования действительной части амплитуды рассеяния при высоких энергиях.

Вместе с весьма прецизионными измерениями полных эффективных сечений рассеяния, эти данные позволили приступить к проверке дисперсионных соотношений в области высоких энергий.

В настоящее время показано, что отношение  $\text{Re } A / \text{Im } A$  для  $\pi N$ -рассеяния при 10 ГэВ равно  $0,20 \pm 0,13$ . Этого еще недостаточно для суждения о выполнении принципа причинности в микромире, или о его нарушении: ворота ошибок еще велики, но существенно отметить, что эти измерения становятся реальностью и было бы очень важно их продолжить и усовершенствовать.

На эту конференцию был представлен обширный набор новых асимптотических соотношений не только для полных сечений, но и для дифференциальных. Этот набор открывает широкие возможности для экспериментальной проверки асимптотических соотношений. Эта проверка будет также иметь принципиальное значение, так как эти соотношения основаны опять-таки на предположении о том, что причинность в микромире имеет ту же форму, что и в макромире.

Продемонстрированные здесь кривые зависимости полных сечений от энергии вплоть до энергии 30 ГэВ показывают, что эти кривые не очень торопятся слиться. Кажется, что это особенно заметно в случае рассеяния  $K$ -мезонов на нуклонах, где кривые остаются параллельными во всем исследованном интервале. Это, конечно, может повлечь серьезные подозрения о применимости причинной теории, но все же сейчас было бы еще преждевременно считать, что асимптотика измеренных сечений противоречит предсказаниям причинной теории и необходимы дальнейшие экспериментальные исследования для выяснения этого принципиального вопроса.

Ряд работ был посвящен измерениям  $\pi N$ - и  $NN$ -рассеяния, включая большие углы рассеяния. Интерпретация этих результатов, видимо, не может быть сейчас сделана без применения модельных представлений, например оптической модели, в обосновании которой сейчас имеется определенный прогресс. Для толкования неупругих процессов использование картины одночастичного обмена, основанного на элементарном делении столкновений на периферические и центральные, оказалось более стойким против испытания временем, чем это можно было думать. Наблюдается некоторый успех и в развитии статистического метода. Особенно интересно отметить, что представление о фэйр-боллах (огненных шарах),<sup>1</sup> по-видимому, получает различные подтверждения из анализа данных о неупругих столкновениях при крайне высоких энергиях.

На прошлой конференции многие видели зарю новой теории в методе комплексных моментов. Эти надежды себя не оправдали. Однако сам по себе метод полюсов Редже, наравне с другими модельными приемами, прочно

вошел в обиход теоретиков и весьма полезен в тех случаях, когда процесс может быть описан одним полюсом.

Доложенные на этой конференции исследования показывают, что комплексная плоскость оказывается настолько пересеченной разрезами, что по ней становится опасно ходить.

Два года тому назад стало ясно, что мир микрочастиц пополнился новыми объектами — резонансами. Сейчас известно большое семейство этих эфемерных частиц, одно перечисление которого представляло уже серьезное затруднение для раппортеров. На секциях и семинарах было немало суждений о том, какие из «открытых» резонансов следует считать твердо установленными, какие подлежат еще проверке. По-видимому, экспериментаторам следует установить между собой джентельменское соглашение относительно правил зачисления статистических выбросов в почтенную категорию резонансов. В коротком резюме невозможно описать всю ситуацию. Были открыты некоторые новые резонансы, распадающиеся на пионы и резонансы ( $\pi + \rho$ ,  $\pi + \pi + \eta$ ,  $\pi + \omega$ ,  $\Lambda + \eta$  и др.). Некоторые резонансы были «закрыты», например так называемый *ABC*-резонанс. Мне кажется, что я не ошибусь, если отмечу, что наиболее интересным событием является подтверждение существования каскадных распадов резонансов на примере  $N_{5/2}^* \rightarrow N_{3/2}^* + \pi$ ,  $N_{3/2}^* \rightarrow N + \pi$ , а также обнаружение ряда резонансов, распадающихся сложным образом на много частиц ( $K + 3\pi$ ,  $K + 4\pi$ ,  $\eta + 2\pi$  и др.).

Однако самым большим событием в этом круге проблем является установление порядка в многообразии элементарных частиц и резонансов, которое в последнее время казалось граничащим с хаосом. Я имею в виду открытие значения группы симметрии  $SU(3)^1$  для систематики частиц и резонансов. Введение этой группы, опирающейся на расширение понятия изотопического спина и гиперзаряда, позволило не только систематизировать частицы в мультиплеты, но и установить замечательные по красоте и неожиданные по точности формулы для масс внутри мультиплетов.

Это расщепление масс частиц, по-видимому, можно толковать весьма аналогично расщеплению уровней в атоме водорода, вызванному нулевыми колебаниями электромагнитного поля. Однако я убежден, что значение этого открытия существенно превзойдет то, которое имело открытие лэмбовского сдвига для теории поля.

Не случайно сейчас многие теоретики работают в этом направлении. Проф. А. Салам показал их вам на интересном диапозитиве. Я хочу показать вам более раннюю стадию этого открытия: раскопанная два года тому назад реджистика оказалась не очень глубокой. Из песка выглядывает октет  $SU(3)$ . Я убежден, что здесь надо копать глубже.

Позвольте теперь остановиться на электромагнитных явлениях. Здесь, кажется, не произошло очень ярких событий. Изучение упругого рассеяния  $\mu + p \rightarrow \mu + p$  и фоторождения  $\gamma + p \rightarrow p + \mu + \bar{\mu}$  показало, что электродинамика остается в силе до расстояний порядка  $10^{-14}$  см и что  $\mu$ -мезон упорно

не намерен раскрывать секрет своей большой массы: рассеяние  $\mu$ -мезона происходит в точности так же, как и электрона!

Следует отметить интересный опыт по измерению сечения процесса  $p + \bar{p} \rightarrow \mu + \bar{\mu}$  результаты которого указывают на существование формфактора для временно-подобных передач импульса  $q^2$ .

Насколько я мог судить, установилось большее согласие в измерении формфакторов нуклонов между различными лабораториями. Подтвержден тот вывод, что  $G_{en} = 0$ ,  $G_{mn} = G_{mp} + G_{ep}$ <sup>1</sup> и что при больших передачах импульса  $q^2$  формфактор убывает как  $1/q^2$ . Это указывает на то, что электрический заряд нуклонов сосредоточен в основном в мезонном облаке.

В заключение этого раздела я хотел бы обратить внимание на измерение магнитного момента  $\Lambda$ -гиперона, который оказался равным  $0,65 \pm 0,35$  магнетонов Бора.

Я перехожу теперь к работам по слабым взаимодействиям. Изучение слабых взаимодействий постоянно приносит волнующие результаты. На этот раз особое внимание участников конференции привлекала работа, в которой был обнаружен распад  $K_2^0$ -мезона на два  $\pi$ -мезона. Насколько я могу судить, сам опыт не вызывает сомнений и если его интерпретации подтвердятся, то возникнет серьезнейшая теоретическая проблема. Наиболее прямое понимание этого опыта означало бы признание несохранения комбинированной четности и, стало быть, необратимости элементарных явлений. Последствия такого хода дел могли бы оказаться очень далеко идущими. В этой же связи, быть может, будет уместным отметить опыты по захвату  $\mu$ -мезонов в ядрах, которые указывают на такую степень асимметрии испускания нейтронов, которая внушает тревогу относительно правильности общепринятой теории слабых взаимодействий.

К числу интересных и важных фактов, доложенных на этой конференции, следует отнести доказательство существования потенциала ядерного взаимодействия, не сохраняющего четность. Таким образом, слабые взаимодействия обнаруживаются во взаимодействии нуклонов.

Весьма продвинулось и количественное изучение слабых взаимодействий. Впервые на эту конференцию представлены весьма полные количественные данные по отдельным схемам распада  $K_2^0$ -мезона ( $K_2^0 \rightarrow 3\pi^0$ ,  $\pi^+\pi^-\pi^0$  и др.) и измерено время жизни этого мезона ( $5,00 \pm 0,45 \cdot 10^{-8}$  с). Существенно уточнены варианты взаимодействий в лептонных трехчастичных распадах (вариант взаимодействия оказывается векторным). Весьма важным фактом с точки зрения симметрии является то обстоятельство, что распады  $K_{\mu 2}^-$ ,  $K_{e 2}^-$  и  $\pi^-$  могут быть описаны одной общей формулой. Изучение распадов  $\Lambda$ -и  $\Sigma$ -гиперонов на  $N + e + \nu$  и на  $N + \mu + \nu$  показало, что  $\mu$ -мезон и электрон ведут себя совершенно симметрично.

На прошлой конференции высказывались сомнения относительно правила  $\Delta Q = \Delta S = 1^2$ . Сейчас, кажется, уже нет оснований для этих сомнений.

<sup>1</sup> Надо иметь в виду, что эти данные относятся к 1964 г. — *Прим. ред.*

<sup>2</sup>  $\Delta Q$  — изменение электрического заряда, а  $\Delta S$  — изменение странности сильно взаимодействующих частиц в процессе распада.



Продолжение исследований с нейтринными пучками дало дальнейшие и основательные подтверждения существования двух типов нейтрино ( $\nu_e$  и  $\nu_\mu$ ). Наконец, необходимо отметить, что поиски промежуточного  $W$ -бозона, на которые были потрачены большие усилия, привели к выводу, что такого бозона в области масс  $< 1,6$  ГэВ не существует.

Поэтому перед теми, кто будет настаивать на дальнейшем продолжении этих поисков, встанет уже не столько научная проблема, сколько проблема дипломатической физики: убедить атомную комиссию своей страны в необходимости строительства более мощных ускорителей, нежели существующие. Однако, я думаю, что мы все убеждены в том, что их нужно строить и не только ради поиска  $W$ -бозона.

Я убежден также и в том, что мы стоим на пороге глубочайшей научной революции, которая, как это всегда случалось и ранее, повлечет за собой новую эпоху в технике и в жизни человечества.

Более того, результаты этой конференции, как мне кажется, подчеркивают, что мы уже не так далеки от нашей общей цели — открытия новых принципов теории, управляющей миром элементарных частиц. Однако скептики могут заметить: «Да, вы, вероятно, правы и мы совсем близки к цели, если только мы едем в правильном направлении...»

Я подошел к концу своего обзора и вполне понимаю, что он далек от совершенства. Следуя намечающейся традиции, я не упоминал ни имен, ни лабораторий, ни даже стран, в которых были выполнены те или иные исследования. Пусть сознание того высокого духа коллективизма, который начинает развиваться в современной науке, заменит мелкое тщеславие. Кстати, это будет подкреплять надежду человечества на возможность лучшего будущего.

## **ФИЗИКА ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ И ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ\***

Физика высоких энергий начала свое существование с изучения космических лучей. Однако настоящий расцвет этой области физики начался позднее, в послевоенные годы, когда были найдены способы ускорения частиц до релятивистских скоростей и построены ускорители.

Строительство крупных ускорителей и развитие новых методов эксперимента косвенно влияло и продолжает плодотворно влиять на развитие техники, продвигая ее на новые, более высокие ступени совершенства.

Однако основным результатом деятельности физиков-экспериментаторов и теоретиков, работающих в области физики высоких энергий, явилось новое знание. Развитие этого знания носило характер цепной реакции с большим коэффициентом размножения.

Если несколько лет тому назад список элементарных частиц мог свободно уместиться на одной странице, то теперь он плотно занимает четыре страницы убористого текста.

Само название «элементарная частица» сейчас можно считать справедливым только в силу традиции. Изучение рассеяния электронов и  $\pi$ -мезонов на нуклонах показало, что нуклоны имеют пространственную структуру.

Открытие возбужденных состояний нуклонов (изобар) подтверждает факт сложности нуклона, и если еще несколько лет тому назад многие физики были склонны считать элементарные частицы «точечными», то теперь эта примитивная концепция должна быть полностью отвергнута.

Помимо изобар обнаружено целое семейство гиперонов, которые можно также рассматривать как состояния нуклонов, возбужденные  $K$ -мезонами.

Расширился мир мезонов. Более того, теперь можно говорить о мезонной материи, состоящей из короткоживущих частиц — резонансов. Мир легких частиц, лептонов, пополнился вторым нейтрино.

Открыты античастицы, и тем самым создана реальная основа для изучения антиматерии. Перед глазами физика сейчас не только большое число новых частиц, скорее всего весьма сложных, но и огромная совокупность фактов, относящихся к законам их рождения, взаимодействия и распада.

Ключом к пониманию закономерностей в этом новом мире пока служит теория относительности и квантовая теория поля. До сих пор не установлено ни одного факта в области физики высоких энергий и элементарных частиц, который противоречил бы принципам теории относительности.

Общие принципы квантовой теории поля (локальность полей, правила их квантования, законы симметрии и др.) также не вступают в какое-либо прямое противоречие с опытными фактами. Более того, в отдельных частных направлениях имеются серьезные успехи в понимании новых физических закономерностей.

Одним из таких успехов современной теории является систематизация элементарных частиц в мультиплеты и вычисление величины расщепления масс в этих мультиплетах, приведшее к предсказанию существования и массы  $\Omega^-$ -гиперона.

И все же ситуация в физике высоких энергий кажется весьма аналогичной той, которая существовала в квантовой теории атома до открытия квантовой механики.

Известно, что некоторые явления из атомной физики успешно, качественно и количественно, предсказывались старой квантовой механикой. В частности, бросается в глаза аналогия между старой теорией расщепления уровней атома в магнитном поле (эффект Зеемана) и современной теорией расщепления мультиплетов элементарных частиц под действием некоторого вакуумного поля, нарушающего унитарную симметрию.

Несмотря на частичные успехи старой квантовой механики, самая сущность атомной механики оставалась неясной вплоть до появления волновой механики, когда в теорию атома были привлечены принципиально новые идеи — идеи волнового движения.

Теперь нам очевидно, что ньютонова механика, даже дополненная квантовыми условиями Н. Бора, была слишком грубым инструментом, чтобы им можно было действовать внутри атома.

Сейчас мы также используем идеи и понятия, которые не могут быть обоснованы в применении к новой области исследования. Мы используем, например, понятие поля  $\psi(x)$  внутри элементарной частицы, хотя кажется ясным, что в понятие координаты  $x$  нельзя вложить никакого другого смысла, отличного от понятия координаты  $x$  точечной частицы [1].

Мы используем макроскопический принцип причинности вплоть до самых малых масштабов, в то время как можно показать, что соотношение неопределенности не позволяет уличить частицу в нарушении причинности [2]. В этой связи вся концепция обычного пространства-времени применительно к внутренней области частиц кажется весьма сомнительной [3, 4]. Мы верим в однородность и изотропность пространства-времени, хотя экспериментальные основания для этого утверждения оставляют желать лучшего [5]. Для развития теории элементарных частиц экспериментальное доказательство несостоятельности основных принципов современной теории имело бы революционное значение.

В этой связи следует отметить, что возможные нарушения этих принципов могли бы быть двух типов: а) они могли бы относиться к структуре сво-

бодного пространства-времени и б) они могли бы иметь место лишь внутри элементарных частиц или в моменты их тесного взаимодействия.

Нарушения типа а) могут быть обнаружены путем изучения однородности и изотропности пространства-времени для достаточно малых масштабов  $a$  [5]. Возможны следующие проверки:

1) Проверка инвариантности при сравнении явлений в лабораторной системе (л. с. к.) (обычные ускорители) и с теми же явлениями в системе центра масс (с. ц. м.) (ускорители со встречными пучками).

2) Проверка перехода л. с. к.  $\rightarrow$  с. ц. м. сравнением распадов частиц резонансов, движущихся с различной скоростью.

3) Проверкой законов сохранения энергии и импульса (в неоднородном пространстве-времени они могут нарушаться).

Нарушения класса б) выглядят более тонко и для выявления их пока можно предположить лишь известную связь между аналитическими свойствами амплитуд  $A$  и причинностью [6, 7].

Возможны следующие проверки:

1) Проверка дисперсионных соотношений для  $\pi N$ -рассеяния; имеется в виду сравнение  $\text{Re } A$  для рассеяния вперед, с дисперсионным интегралом [8–11] (изучение  $\pi N$ -рассеяния предпочтительно перед другими из-за отсутствия нефизической области в дисперсионном интеграле).

2) Проверка асимптотических соотношений для сечений при высоких энергиях, например, соотношения для полных сечений рассеяния  $\pi^\pm$ -мезонов на нуклонах:  $\sigma_{\pi+N} = \sigma_\pi N$  при  $E \rightarrow \infty$  ( $E$  — энергия  $\pi$ -мезона [12, 13]).

В работах [14–16] был установлен ряд новых подобных соотношений для других процессов, и не только для полных, но и для дифференциальных сечений. Все эти соотношения основаны на определенном аналитическом поведении амплитуды рассеяния, обязательным условием которого является соблюдение обычной микропричинности (ср. [12]).

На современном уровне развития теории и эксперимента нельзя указать величину той «элементарной» длины  $a$ , которая могла бы служить масштабом для измерения области пространства-времени, внутри которой нарушаются принципы современной теории.

По всей совокупности данных эта длина  $< 10^{-14}$  см. Следовательно, энергия частиц в с. ц. м. должна быть больше 1 ГэВ, а энергия в л. с.  $E_0 \gg 1$  ГэВ. Поэтому диапазон энергий  $10 < E_0 < 100$  ГэВ кажется минимально необходимым. Отсюда видна целесообразность строительства ускорителей высокой энергии — около 100 ГэВ и выше — и ускорителей на встречных пучках.

Создание новой теории — это не только гигантский скачок в развитии научного мировоззрения, но, как учит история науки, и революционизирующее влияние на развитие прикладных наук, а вместе с тем и на всю жизнь человеческого общества.

Иллюстрацией этого тезиса из недавнего прошлого может служить открытие теории относительности и квантовой механики, без которых был бы немислим прогресс, приведший к овладению атомной энергией и когерентным пучком света (лазер) — двумя величайшими достижениями современной прикладной науки.

## Список литературы

1. Блохинцев Д. И. Проблемы структуры элементарных частиц // Философские проблемы физики элементарных частиц. — М.: Изд-во АН СССР, 1963. С. 47.
2. Блохинцев Д. И. Препринт ОИЯИ Р-1091. Дубна, 1962.
3. Блохинцев Д. И., Гольфанд Ю. А., Кадышевский В. Г., Киржниц Д. А., Колеров Г. И. // Пространство, время, причинность в микромире: Сб. ОИЯИ, Д-1735. Дубна, 1964.
4. Чу Дж. Выступление на теоретической дискуссии в ЦЕРНе 1962 г. // УФН. 1965. Т. 84(4). С. 737.
5. Блохинцев Д. И. // Phys. Lett. 1964. V. 12. P. 272.
6. Goldberger M. L. // Phys. Rev. 1955. V. 99. P. 979.
7. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношений. — М.: Физматгиз, 1958.
8. Blokhintsev D. I., Kolerov G. I. // Nuovo Cimento. 1964. V. 34. P. 163.
9. Барашенков В. С., Делю В. И. Препринт ОИЯИ Р-1598. Дубна, 1964.
10. Хури Н., Киношита Т. Действительная часть амплитуды рассеяния вперед и локальная теория поля // УФН. 1965. Т. 86, № 4. С. 641.
11. Блохинцев Д. И., Боголюбов Н. Н., Марков М. А., Померанчук И. Я. // Труды Международной конференции по ускорителям (Дубна, 1963). М.: Атомиздат, 1964. С. 21–30.
12. Померанчук И. Я. // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 725.
13. Мейман Н. Н. Вопросы физики элементарных частиц. Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1962. С. 222.
14. Van Hove L. // Phys. Lett. 1963. V. 5. P. 252.
15. Logunov A. A., Nguyen Van Hieu, Todorov I. T., Khrustalev O. A. // Phys. Lett. 1963. V. 7. P. 69; ЖЭТФ. 1964. Т. 46. С. 1079.
16. Logunov A. A., Nguyen Van Hieu, Hsien Ting-chang // Nuovo Cimento. 1964. V. 33. P. 1312.

## ЛЕНИН И ФИЗИКА\*

На рубеже XX столетия и в первое его десятилетие физика развивалась бурно и притом самыми непредвиденными путями. В этот период возникла электронная теория, теория относительности, теория квантов. Привычное и уютное здание механической физики XIX столетия дрожало и шаталось под напором новых фактов и идей.

Механика, которую считали образцом науки, ее законы — всеобщими и незыблемыми, оказалась ограниченной, а попытки с ее помощью объяснить оптические и электромагнитные явления чисто механическими движениями сплошной среды — эфира — совершенно несостоятельными.

Механическая физика XIX столетия отождествляла понятия материи и массы. Такое примитивное определение материи получило широкое распространение среди физиков-материалистов конца прошлого столетия.

Однако опыт показал, что масса электрона зависит от скорости его движения<sup>1</sup>. Более того, оказалось, что массу электрона можно считать массой электромагнитного происхождения, то есть вызванной существованием электромагнитного поля электрона, существованием электромагнитной энергии. Итак, материя исчезла!

Представители философских течений того времени, оппозиционных материализму (позитивисты, махисты, энергетики), рассматривали эти новые факты как обоснованные опытом доказательства несостоятельности концепций материализма. Основные понятия материализма, казалось, опровергались новыми данными физики, становились иллюзиями. Физика изменила материализму — так думали многие ученые в эпоху зарождения новой физики, физики XX века.

Как бы то ни было, но надо было работать. И такие выдающиеся физики, как Г. Лоренц, Д. Томсон, продолжали развивать электронную теорию, создавать модели структуры электрона и атома. Л. Больцман и М. Смолуховский разработали кинетическую теорию — «атомную гипотезу». Ж. Перрен искал и нашел позднее блестящие экспериментальные подтверждения их теории.

Иных взглядов придерживалось большинство философов того времени, интересовавшихся естествознанием. Они говорили: эти люди занимаются пустыми фантазиями, понятия об атомах и электронах — это понятия, лишние для систематики «комплексов ощущений», «неэкономные» с точки

\* Наука и человечество. 1969. М.: Знание, 1970. С. 48–65.

<sup>1</sup> О терминологии в этом вопросе см.: *Окунь Л. Б.* Понятие массы (Масса, энергия, относительность) // УФН. 1989. Т. 158, вып. 3. С. 511–530. — *Прим. ред.*

В. И. Ленин изучил огромное количество литературы, ознакомился с воззрениями не только философов, но и математиков и физиков в Германии, Англии, Франции и России. В философских работах В. И. Ленина обсуждаются взгляды Дж. Томсона, Г. Лоренца, А. Пуанкаре, Л. Больцмана, П. Ланжевена и многих других хорошо известных нам физиков, работавших на рубеже XX столетия.

В. И. Ленин ознакомился и с фактами, и с их толкованиями. Результатом явилась книга «Материализм и эмпириокритицизм».

Эта книга В. И. Ленина — блестящий образец страстной, полемической защиты науки от нашествия идеалистических апостолов различного толка. Его вывод был таков: «Современная физика лежит в родах. Она рождает диалектический материализм». Весь же физический идеализм, вся эмпириокритическая философия вместе с эмпириосимволизмом, эмпириомонизмом и пр. и т. п. — это лишь отбросы науки. Однако содержание этой книги не ограничивается полемикой. В ней В. И. Ленин дал глубокий анализ методологических проблем современного ему естествознания и указал пути их решения.

Особое значение имела эта работа В. И. Ленина для физики. Физика изучает самые элементарные закономерности материального мира. Поэтому она всегда занимала и, по всей видимости, будет занимать и в будущем особое положение среди других естественных наук: в любом самом сложном и конкретном явлении исследователи будут искать черты простейшего и всеобщего. Темп развития физики выше темпа развития других естественных наук, а среди экспериментальных наук она отличается наибольшей последовательностью и точностью. Поэтому основные методологические проблемы естествознания наиболее ярко и определенно обрисовываются именно в физике.

Вопрос об объективности закономерностей природы, проблема материальности мира, абсолютное и относительное в познании, проблема границ познания и многие другие вопросы стояли в центре внимания философов начала нашего столетия; и именно новые результаты физики дали повод для возникновения многих философских заблуждений.

Поэтому В. И. Ленин особенно внимательно следил за развитием современной ему физики и дал блестящее решение важнейших проблем философии физики — проблем, которые звучали парадоксами для крупнейших умов естествознания и многим философам служили основанием для проповеди агностицизма и скепсиса, для доказательства беспомощности человеческого разума перед каменным сфинксом природы.

## **Методологический кризис физики и его анализ В. И. Лениным**

Насколько В. И. Ленин ясно представлял себе физику того времени, можно судить по следующему описанию электронной теории, данному им в работе «Материализм и эмпириокритицизм»: «По этой теории, атомы образуют мельчайшие частицы, заряженные положительным или отрицательным электричеством, называемые электронами...» «Опыты физиков дают материал для исчисления быстроты движения электронов и их массы...» «Быстрота движения оказывается сравнимой с быстротой света (300 000 километров в се-

Теперь же «разногласия не в деталях, а в основных и руководящих идеях... Необходимо констатировать, что, подобно искусству, наука, в особенности физика, имеет многочисленные школы, выводы которых зачастую расходятся, а иногда прямо враждебны один другому...

Отсюда можно видеть, каково значение и какова широта того, что получило название кризиса современной физики».

Ни физикам, ни буржуазным философам не удалось внести ясность в проблемы «периода сомнений», как его называл А. Пуанкаре.

Ясность была внесена В. И. Лениным, который объяснил, что надо различать философское понимание материи от чисто физических представлений о строении материи. С этой точки зрения «исчезновение материи» есть лишь установление недостаточности определенной физической картины строения материи, замена ее другой, более глубокой и содержательной.

В. И. Ленин писал по этому поводу: «Если бы наши махисты, пишущие книги и статьи на философские темы, умели думать, то они поняли бы, что выражение: «материя исчезает», «материя сводится к электричеству» и т. п., есть лишь гносеологически-беспомощное выражение той истины, что удастся открыть новые формы материи, новые формы материального движения, свести старые формы к этим новым и т. д.». По В. И. Ленину, понятие материи гносеологически не означает «*ничего иного*», кроме как: объективная реальность, существующая независимо от человеческого сознания и отображаемая им».

Это разграничение общего философского понятия материи от изменчивых физических представлений о строении материи имеет фундаментальное значение для методологии науки, в особенности для физики.

Проблема, решенная В. И. Лениным, не является узкой проблемой, характерной только для этого этапа в развитии физики, который изучался В. И. Лениным. Это решение сохраняет свою силу и для современной науки.

Известно, что теперь экспериментально установлено существование так называемых античастиц. Это частицы, имеющие заряд и токи, противоположные токам и зарядам обычных частиц. Давно уже известен позитрон — античастица электрона. Со времени пуска больших ускорителей открыты антипротон и антинейтрон — античастицы по отношению к протону и нейтрону. Теперь установлено существование античастиц тяжелых «возбужденных» нуклонов — гиперонов. Среди них известна антилямбда и антисигма (открытая в Дубне, в Объединенном институте ядерных исследований) и другие.

Можно себе представить вещество, которое образовано из античастиц: антиатомы, антимолекулы и антиизлучение. Это означает, что современный физик допускает существование, как говорят, антиматерии. Разумеется, что это физическое состояние материи ничего общего не имеет с «антиматериализмом». Как частицы, так и античастицы являются различными формами существования материи в ее философском, ленинском понимании.

Физики говорят об аннигиляции материи. Это процесс соединения вещества и антивещества, например протона и антипротона. При столкновении такие две противоположные частицы исчезнут (аннигилируют), но это не будет бесследным уничтожением, превращением в ничто. Вместо них возникнут энергичные пи-мезоны. Пи-мезоны — неустойчивые частицы, они



распадаются в конечном счете на электроны, позитроны, нейтрино и гамма-кванты. Однако на всех этапах этого процесса масса и энергия всех продуктов аннигиляции равны массе и энергии исходных протона и антипротона. Таким образом, в процессе аннигиляции нуклоны и антинуклоны только превращаются в другую форму материи.

## **Относительное и абсолютное**

Вторая проблема, которая была рассмотрена В. И. Лениным в работе «Материализм и эмпириокритицизм», — проблема соотношения относительного и абсолютного в познании.

Позитивисты любили и любят подчеркивать относительность человеческого познания, его субъективность и даже условность. Для философа-идеалиста различные картины строения мира, которые рисует себе естествоиспытатель, — лишь условные символы. С чувством полного безразличия он готов сменить одну картину на другую, более «остроумную» и «экономную».

В. И. Ленин решительно выступил против этих унылых идей позитивистов и неокантианцев. В. И. Ленин рассматривал проблему взаимоотношения абсолютного и относительного в познании природы в историческом разрезе.

В. И. Ленин признавал относительность нашего познания, но считал, что оно содержит в себе и абсолютное и доля этого абсолютного все время растет в процессе развития познания. Поэтому для В. И. Ленина, материалиста и диалектика, развитие наук никогда не представлялось беспорядочной сменой одних условных картин другими.

Научное познание для В. И. Ленина — это слепок с действительности, ее отображение, постоянно совершенствующееся и развивающееся. Неполнота этого отображения, его неточность делают его относительным, но проверка его критерием практики обнаруживает в нем элементы абсолютного.

В защите материализма от субъективизма позитивистов В. И. Ленин находил поддержку своим идеям у многих выдающихся физиков того времени. Великий физик и философ Л. Больцман писал: «Недоверие к представлениям, которые мы можем вывести из прямых чувственных восприятий, привело к крайности, прямо обратной прежней наивной вере. Говорят: нам даны только чувственные восприятия, дальше мы не вправе делать ни шагу. Но если бы эти люди были последовательны, то они должны были бы поставить дальнейший вопрос: даны ли нам наши собственные вчерашние чувственные восприятия?... Значит, если быть последовательным, то надо отрицать не только существование других людей, кроме моего собственного я, но и существование всех представлений в прошлом».

В. И. Ленин решительно восставал против Гельмгольца и других ученых, которые считали наши восприятия лишь иероглифами, условно изображающими внешние вещи. В этой связи следует заметить, что для материалиста вопрос о том, правильно ли или неправильно отображается в мозгу живого существа внешний мир, решается самим фактом его существования. Живое существо, неверно, искаженно представляющее внешний мир, неминуемо погибнет.

Теоретически оно было предсказано значительно раньше автором<sup>1</sup> этой статьи (1938 г.).

Масштабы явлений, связанных с поляризацией вакуума и вакуумными колебаниями, характеризуются, как уже сказано, величинами порядка  $10^{-11}$  см. С помощью лучей, получаемых в современных ускорителях, возможно исследовать еще меньшие масштабы.

Изучение рассеяния быстрых электронов и жестких гамма-лучей на протонах и дейтронах позволило с полной достоверностью установить наличие структуры нуклонов, определить их размеры. Они оказались в сто тысяч раз меньше размеров атома ( $10^{-13}$  см). Такие мощные ускорители, как пущенный недавно в Серпухове протонный синхрофазотрон (энергия ускоренных протонов равна 76 млрд. электронвольт), позволяют исследовать элементарные частицы вплоть до масштабов в миллион раз меньше размеров атома ( $10^{-14}$  см). В настоящее время известно большое число элементарных частиц и установлена сложность их структуры. На заре развития атомной физики, имея в виду симфонию света, излучаемого атомом, сравнивали атом по своей сложности с роялем. Теперь не будет большим преувеличением перенести это сравнение на элементарные частицы. Однако сложность элементарных частиц весьма своеобразна и, видимо, не имеет аналогов в неживой природе макроскопического мира. Это видно хотя бы из того факта, что при высокоэнергетическом столкновении элементарных частиц рождаются новые элементарные частицы, не уступающие по своей организации «родителям». Между тем никто не может рассчитывать получить новые рояли, скрипки или другие музыкальные инструменты в результате катастрофического столкновения, скажем, двух роялей.

Процессы, происходящие при столкновениях элементарных частиц при высокой энергии, настолько сложны, что оказывается возможным рождение макроскопических количеств новых частиц, и в принципе не может быть исключена возможность рождения целых миров, если запас относительной энергии исходных частиц достаточно велик.

Идея В. И. Ленина о неисчерпаемости электрона, о бесконечности познания, на пути которого будут открываться все новые и новые горизонты, полностью подтверждается развитием современной физики.

Значение этих идей может быть подчеркнуто еще и тем, что не так давно, на нашей памяти, многие из физиков-теоретиков накладывали табу на идею о наличии структуры у элементарных частиц, настаивали на их точечности. История повторяется...

## Закономерность

Позитивисты всех оттенков толкуют закономерность как нечто субъективное. Сами формы теории рассматриваются как определяемые не объективной реальностью, а способом восприятия и мышления субъекта. Закономерность в понимании идеалистов выглядит как практическое «упорядочение» восприятий, ощущений.

---

<sup>1</sup> См. статью № 72 в наст. изд. — *Прим. ред.*

А. Эйнштейн, который в общем придерживался позитивистских концепций, отмечал, что сама возможность такого упорядочения не имеет никакого толкования в позитивистской философии и остается «чудом».

В работе «Материализм и эмпириокритицизм» В. И. Ленин, анализируя махистские концепции познания, говорит: «Выходит, что можно и должно искать какой-то необходимости *помимо* единообразия среды, т. е. природы! Где искать, это — тайна идеалистической философии, боящейся признать познавательную способность человека простым отражением природы».

Говоря об определении закона природы у Э. Маха как об «ограничении ожидания», В. И. Ленин замечает: «Солипсизм берет-таки свое».

Другой пример, из И. Петцольдта: «Мы не можем допустить такой неопределенности и произвола природы; мы должны требовать от нее определенности, закономерности».

«Так. Так, — отмечает В. И. Ленин. Мы требуем от природы закономерности. Буржуазия требует от своих профессоров реакционности». В связи с принципом «экономии мышления» В. И. Ленин замечает: «“Экономнее” ли “мыслить” атом неделимым или состоящим из положительных и отрицательных электронов?»

«Достаточно поставить вопрос, чтобы видеть нелепость, субъективизм применения *здесь* категории «экономии мышления». Мышление человека тогда «экономно», когда оно *правильно* отражает объективную истину, и критерием этой правильности служит практика, эксперимент, индустрия».

В острой, полемической форме В. И. Ленин беспощадно разоблачал попытки «самоновейших» философов играть в ученую терминологию. Он показал, что коренной вопрос лежит в признании или в непризнании объективного характера закономерности: «Признание объективной закономерности природы и приблизительно верного отражения этой закономерности в голове человека есть материализм». Идеи В. И. Ленина об отражении в человеческом сознании объективного мира интересно сопоставить с замечаниями А. Эйнштейна и П. Дирака о том, что математически совершенные уравнения — «красивые» уравнения, оказываются правильными в том смысле, что рано или поздно обнаруживаются реальные явления, которые описываются этими уравнениями. В статье «Иоганн Кеплер» А. Эйнштейн ссылается на изящную теорию о конических сечениях (теорию эллипсов, гипербол и парабол), которые, как оказалось по истечении веков, хорошо описывают траектории планет.

П. Дирак упрекает Е. Шредингера в том, что он отверг красивое релятивистское волновое уравнение (известное теперь как уравнение Клейна) только на том основании, что выводы из этого уравнения не согласовывались с опытными данными для движения электронов. Эти опытные данные позднее «нашлись» в мезонной физике, и уравнение получило свое применение для описания мезонов. Можно было бы привести много других фактов, подтверждающих идею о том, что математически изящные уравнения (или общее — теории) рано или поздно находят себе применение для описания реальных процессов, протекающих в природе.

Я думаю, что почти все занимающиеся математикой или математической физикой испытывают подобное чувство красоты и способность использовать

его как критерий для определения совершенства теории. Наш разум, оказывается, приспособлен к постижению гармонии мира. Эта способность человеческого разума еще недостаточно исследована философами, но не лежит ли в ее основе глубокое соответствие между законами нашего мышления и структурой закономерностей внешнего мира, на которой так настаивает В. И. Ленин?

## Пространство и время

Для В. И. Ленина, как прямое следствие его материалистической концепции, пространство и время были объективными формами существования материального мира. В этой связи В. И. Ленин подвергает глубокой и острой критике концепцию Э. Маха, изложенную им в «Механике».

Э. Мах, стремясь выйти за рамки идеализма и материализма, так определяет эти основные понятия: «Пространство и время суть упорядоченные (или гармонизованные, *wohlgeordnete*) системы рядов ощущений». На это В. И. Ленин замечает: «Это — явная идеалистическая бессмыслица, неизбежно вытекающая из учения, что тела суть комплексы ощущений. Не человек со своими ощущениями существует в пространстве и времени, а пространство и время существуют в человеке, зависят от человека, порождаются человеком, вот что выходит у Маха».

Критикуя взгляды Богданова, В. И. Ленин пишет: «...выходит, что к опыту людей и к их познавательной способности приспосаблиются разные формы пространства и времени. На самом же деле как раз наоборот: наш «опыт» и наше познание все более приспосаблиются к *объективному* пространству и времени, все правильное и глубже их *отражая*».

В период этой дискуссии теория относительности только что возникла. Ее появление вызвало шквал философских и популярных толкований, многие из которых граничили с мистикой. Повод к этому давало понятие о времени как о четвертом измерении, введенное Минковским на основе идей А. Эйнштейна.

От возникшей на этой основе мистики был принужден отречься и Э. Мах.

В. И. Ленин отметил в работе «Материализм и эмпириокритицизм», что Э. Мах, спасаясь от «чертовщины», принужден прибегать к чисто материалистическим аргументам. «Новейшая математика, — говорит Мах, — поставила очень важный и полезный вопрос о пространстве с  $n$  измерениями, как мыслимом пространстве, но «действительным случаем» (*ein wirklicher Fall*) остается только пространство с 3-мя измерениями. Поэтому напрасно «многие теологи, испытывающие затруднение насчет того, куда им поместить ад», а также спириты пожелали извлечь для себя пользу из четвертого измерения».

На это В. И. Ленин замечает: «Очень хорошо! Мах не желает идти в компанию теологов и спиритов. Но чем он в своей *теории познания* отгораживается от них? Тем, что только пространство с 3-мя измерениями есть *действительное!*»

Особо существенный прогресс в наших представлениях о пространстве и времени произошел позднее на основе (возникновения) общей теории

утверждения может служить закон распространения света, который выражается условием  $s^2 = 0$ , то есть

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0.$$

Согласно закону инвариантности, для другого наблюдателя, движущегося относительно первого, этот закон имеет ту же форму:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0.$$

где  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ,  $t'$  — суть координаты и время, измеряемые линейками и часами движущегося наблюдателя (напомним, что  $c$  в обоих случаях — одна и та же для всех наблюдателей скорость света).

В настоящее время в связи с изучением мира элементарных частиц проблема пространства и времени вновь привлекает самое пристальное внимание физиков-теоретиков. Суть заключается в том, что в случае макроскопического события можно указать вполне определенные физические операции, которые позволяют определить пространственные координаты события  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и момент времени  $t$ , характеризующие «адрес» этого события и его дату.

Однако при переходе к объектам атомарных масштабов необходимые операции настолько усложняются, что, например, координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  элементарной частицы становятся уже весьма абстрактными понятиями. В частности, существенно, что, чем точнее определяются координаты микрочастицы, тем быстрее теряется значение полученной информации. Это обстоятельство есть следствие соотношения Гейзенберга, согласно которому чем точнее определены координаты частицы, тем больший импульс сообщается ей со стороны измеряющего аппарата.

При этом не только существенно меняется состояние частицы, координаты которой измеряются, но могут родиться новые частицы или даже целый их рой.

При применении понятия пространственно-временных координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  к масштабам, характерным для внутренней структуры элементарных частиц ( $< 10^{-13}$  см), абстрактность понятий  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  возрастает в такой степени, что становится граничащей с отрицанием физической значимости этих понятий.

Трудности, возникающие в применении классических пространственно-временных представлений к особо малым масштабам, видимо, связаны с тем, что само понятие физического «события» внутри элементарной частицы не поддается пока ясному определению.

## Микромир

Квантовая теория в то время, когда Ленин написал «Материализм и эмпириокритицизм», находилась в зачаточном состоянии и не стала еще предметом внимания философов. Философский интерес к ней возник в конце двадцатых годов, после возникновения квантовой механики.

Парадоксальные с точки зрения классической механики законы квантовой механики поставили ряд новых, глубоких методологических проблем, многие

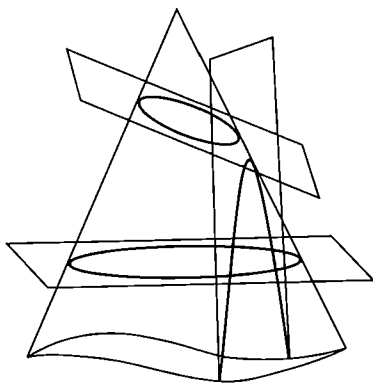


Рис. 9. Конические сечения, известные еще древним: круг, эллипс, гипербола оказались весьма точными моделями реальных орбит планет

из которых современные позитивисты пытались решать, следуя традиционным идеям отрицания объективности квантово-механических явлений.

Философский релятивизм, казалось, вновь нашел обширные возможности для аргументации данными новейшей атомной физики. Этот релятивизм выражался в том, что понятие состояния микрочастицы определялось исключительно в отношении к наблюдателю. С этой точки зрения микрочастица не имеет каких-либо величин, характеризующих ее состояние, пока не произведено измерение. Это измерение может быть выбрано различно, по произволу наблюдателя. Таким образом, состояние микрочастицы оказывалось целиком зависящим от выбора наблюдателя.

Согласно квантовой механике состояние микрочастиц описывается волновой функцией  $\Psi$ , которая является одним из основных понятий новой теории. С изложенной выше точки зрения волновая функция есть попросту записная книжка наблюдателя, в которой он собирает свою информацию о состоянии микросистемы.

Такая точка зрения на волновую функцию приводит к парадоксальному выводу, что изменение информации наблюдателя может вызвать изменение волновой функции, а следовательно, изменение состояния микросистемы! Квантовая механика приобретала в таком понимании крайне субъективистский характер.

Книга В. И. Ленина «Материализм и эмпириокритицизм» помогла физикам найти пути к материалистическому пониманию квантовой механики и исключить из ее толкования элементы субъективизма. Этот поиск не был продиктован стремлением уложить новое учение в готовые рамки старых философских представлений. Дело шло об устранении логических противоречий, свойственных субъективистскому толкованию квантовой механики. Действительно, с точки зрения субъективистского толкования квантовой механики нельзя, будучи последовательным, обосновать применимость квантовой механики к явлениям, протекающим или протекавшим вне связи с каким-либо наблюдателем, например, к радиоактивному распаду атомов, происходившему в доисторические времена, когда не было наблюдателя, могущего позаботиться о своевременном изменении волновой функции  $\Psi_1$ , описывающей

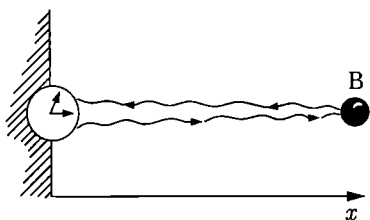


Рис. 10. Измерение координат макроскопического события В с помощью посылки светового импульса

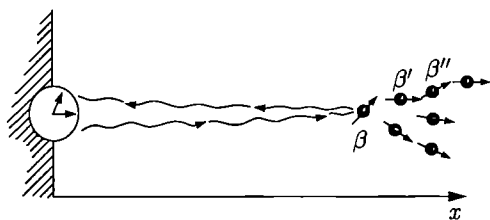


Рис. 11. Измерение координаты микроскопического события  $\beta$ . В результате взаимодействия светового импульса с частицей  $\beta$  могут родиться новые частицы  $\beta'$ ,  $\beta''$  ...

состояние атома до распада, на волновую функцию  $\Psi_2$ , описывающую атом после его распада.

В. И. Ленин указывал на подобные простые, но вопиющие логические противоречия в любой философской схеме, кладущей в основу своего миропонимания субъективные восприятия человека (наблюдателя).

Исходя из идеи В. И. Ленина об объективном характере физических закономерностей, советские физики нашли пути к непротиворечивому и материалистическому пониманию особенностей квантовой механики.

Новая методология квантовой механики была основана на понимании волновой функции как величины, описывающей статистическим образом поведение микрочастицы, находящейся в определенной макроскопической обстановке. Обстановка вынуждает микрочастицу к определенному поведению, в которое, однако, имманентным образом включен элемент случайного. Время от времени микрочастица оказывается способной вызвать макроскопическое явление и тем самым заявить на макроскопическом языке не только о своем существовании, но и о своем состоянии. Следует отметить, что микрочастица может вызвать макроскопическое явление только в том случае, если в макроскопической среде, окружающей микрочастицу, имеется неустойчивость. В этом случае микрочастица может быть тем детонатором, который порождает «взрыв». Такой взрыв может быть использован для определения состояния микрочастицы, которая его инициировала.

С этой точки зрения «произвол» наблюдателя заключается лишь в том, что он по своему выбору может создавать ту или иную макрообстановку для микрочастицы, в частности и ту, которая ведет к взрывам вполне определенного типа и тем самым отвечает условиям определенного измерения.

Примером подобных взрывов может служить возникновение электрического разряда в счетчике Гейгера, вызванного заряженной микрочастицей, попавшей в объем счетчика. Такая частица вызывает ионизацию газа. Образовавшиеся свободные электроны под действием сильного электрического поля, имеющегося в счетчике, ускоряются, вызывают новую ионизацию, новые свободные электроны — возникает лавина электронов, электрический разряд.

Микрочастица, попадающая в пузырьковую камеру, наполненную перегретой жидкостью (следовательно, находящейся в неустойчивом состоянии), образует там ионы, которые становятся центрами вскипания жидкости.

кажутся еще слишком тесно связанными с привычными нам представлениями и идеями современной квантовой теории поля и теории относительности<sup>1</sup>.

Концепция элементарных частиц внутри элементарных частиц вряд ли может быть исходной для понимания ситуации в области крайне малых масштабов микромира.

Концепция физического поля, как мы ее знаем из современной теории, неразрывным образом связана с понятием элементарных частиц и поэтому также кажется весьма сомнительной применительно к обсуждаемым масштабам.

Как мы уже обсуждали выше, понятие события внутри элементарной частицы и понятия пространства-времени еще ждут своего решения. Кажется, что все успехи современной теории в области физики высоких энергий и элементарных частиц связаны с теми теоретическими исследованиями, в которых путем более или менее остроумных приемов удается обмануть бдительность чудовищ, стерегущих вход в храм истины: одно из них — бесконечность энергии вакуума, другое — бесконечность собственной энергии частиц.

С этими бесконечностями теоретик встречается тотчас, как только он соберется последовательно атаковать проблему взаимодействующих микрочастиц, исходя из современных концепций теории относительности и квантовой теории поля.

Между тем накоплено огромное количество фактов, которые нуждаются в описании на основе единой физической картины микромира. Эту колоссальную грудку новых фактов удастся только частично связать между собой в еще довольно разрозненную мозаику.

Как бы то ни было, кажется вероятным, что в наше время теоретическая физика в своем поступательном движении подходит к новой революционной вехе. В такие переломные периоды в развитии науки правильная методология является важнейшим залогом успеха в творческих поисках новых путей и решений.

Эту целостную и ясную методологическую базу, которая так необходима для понимания узловых проблем современной физики, дает нам гениальная работа В. И. Ленина «Материализм и эмпириокритицизм».

---

<sup>1</sup> Современную картину мира элементарных частиц дает Стандартная модель, в которой фундаментальными строительными «блоками» являются лептоны, кварки и калибровочные бозоны — переносчики взаимодействия между кварками и лептонами. — *Прим. ред.*



## ПРОПОРЦИИ В НАУКЕ\*

В последнюю четверть нашего века невиданно возрастает роль науки в духовной и материальной жизни человечества. Уже сейчас труд ученых и все, что с ним непосредственно связано, вносит существенный вклад в народное хозяйство, а «индустрия знаний», понимаемая достаточно широко, превратилась в одну из важнейших отраслей человеческой деятельности. Поэтому крайне важными стали проблемы экономики и планирования науки, имеющие в нашей стране подлинно государственное значение. Коммунистическая партия и Советское правительство постоянно заботятся о всемерном развитии науки, на науку у нас выделяются теперь большие средства. Как распределять эти средства? Как получать от их вложения максимальный эффект с точки зрения общественной пользы?

Здесь возникает множество проблем, я остановлюсь лишь на одном аспекте — на соотношении фундаментальных и прикладных исследований.

Сейчас трудно точно установить, когда произошло такое разделение науки. Уже в эпоху рабовладения Архимед писал: «Низко все, что имеет практическое значение». Однако, несмотря на подобный снобизм, аристократической науке Древней Греции все-таки удалось создать шедевры человеческой мысли и среди них — геометрию Евклида. В известной статье о Кеплере Эйнштейн, имея в виду открытие греками конических сечений — эллипсов, гипербол и парабол, выражает свое удивление перед силой человеческого мышления, способного предвосхитить объекты, которые — это стало ясно через много веков — лежат в основе глубочайших законов природы. Сегодня это одни из самых прекрасных вершин современной науки — небесной механики. И космические корабли летят сегодня по кривым, предсказанным Кеплером.

История свидетельствует, что далеко не всегда фундаментальные исследования — их уже давно именуют чистой наукой — имели столь благоприятные условия, как в Древней Греции.

В средние века чистая наука превратилась, по выражению Маркса, в служанку теологии, проще говоря, в схоластику. Необходимость следовать догматам церкви и страх перед инквизицией на много столетий задержали научный прогресс в Европе. В те времена в университетах обсуждались вопросы вроде такого: «Из какого вещества, материального или нематериального, состояла одежда ангела, благовествовавшего Святой Деве Марии?»

Сомнение есть зачатие истины. Догматизм несовместим с сомнением. По этой причине наука и догматизм несовместимы.

Интересно, что в средневековом «епископском каноне» еретик определяется не только как лицо, держащееся ложных мнений и их распространяющее, но и как лицо, высказывающее новые мнения. Вполне понятно, почему любое научное открытие в то время могло быть основанием для аутодафе.

Догматизм и нетерпимость тех времен, надолго остановившие шествие разума, можно наблюдать и сегодня. В Испании, вклад которой в современную науку весьма незначителен. В Китае, где, судя по всему, тормозится развитие фундаментальных наук<sup>1</sup>.

Можно было бы привести и другие примеры, но все они свидетельствуют об одном: для успешного развития фундаментальной науки необходимо, чтобы в обществе, где работает ученый, начисто отсутствовал дух слепого догматизма. Люди науки должны иметь, как выразился Дирак, «открытый ум», готовый к восприятию нового.

Развитие прикладной науки не столь требовательно к условиям общественной жизни.

Несмотря на мрачную духовную атмосферу средневековья, продолжала, хотя и медленно, развиваться прикладная наука — химия (алхимия), техника и медицина. Болонья обогащалась благодаря своим ткацким станкам. Венеция — производству стекла и зеркал.

Эпоха Возрождения, эпоха расцвета искусств и науки, была следствием развития именно прикладной науки и связанных с ней ремесел. Интересы Леонардо да Винчи, едва ли не самого великого представителя этой эпохи, сосредоточивались не только на науке, но и на технике. Он был художником, философом, геометром, блестящим инженером.

Позже Галилей закладывает прочную основу современной науки, положив в эту основу наблюдения и эксперимент. Его великие исследования по механике и астрономии первоначально полностью относились к фундаментальной науке. Свое прикладное значение вместе с открытиями Ньютона они получили много позднее — на протяжении XVII–XIX столетий, когда развивалась классическая механика, без знания которой было бы невозможно существование современного общества. Это, кстати, еще один пример, иллюстрирующий, сколь значительный интервал времени может отделять открытия фундаментальной науки от основанных на них достижений науки прикладной.

Нам трудно представить, что даже столь очевидное сегодня прикладное значение открытия Фарадеем в 1860 г. электромагнитной индукции относится к фундаментальным исследованиям. Фарадей никогда не интересовался прикладными следствиями своих великих открытий. Им руководила чистая любознательность. Рассказывают, что одна высокая особа, посетив лабораторию Фарадея и увидев катушки, батареи, стрелки и т. п., спросила: «Какое значение имеют эти игрушки?» Великий ученый ответил: «Их судьбу так же трудно предсказать, как и судьбу родившегося дитя».

---

<sup>1</sup> В настоящее время это вовсе не так. — *Прим. ред.*

Как мы знаем теперь, это дитя выросло в современную электротехнику и современную радиотехнику.

История знает, впрочем, и обратные примеры, когда великие открытия делались исключительно из практических предпосылок. Скажем, интересы А. С. Попова, впервые осуществившего радиосвязь, относятся к области прикладной науки.

Взаимоотношения прикладной и фундаментальной науки в двадцатом столетии несколько изменились. Прежде всего сократились сроки, отделяющие достижения фундаментальной науки от их практических применений.

Физика нашего века знаменательна открытием трех новых миров: мира атома, мира атомных ядер и мира элементарных частиц.

В результате экспериментального изучения атомных спектров была создана квантовая механика, завершившая теорию атома. Понятие «атом», бывшее принадлежностью узкого круга ученых, стало достоянием всего человечества, без этого понятия невозможна ни современная полупроводниковая электроника, ни лазерная техника, ни многие другие практические достижения века. Именно открытие атома и квантовых законов атомной механики породило и лазер и технику полупроводников. На это ушло около сорока лет.

Быстрее «осваивалось» атомное ядро. Существование атомного ядра было установлено в начале двадцатых годов; в 1939 г. была открыта реакция деления ядра урана, а уже в декабре 1942 г. осуществлена первая цепная реакция в первом атомном реакторе. Интервал между этими событиями, как видим, составил двадцать лет. Эти открытия фундаментальной науки, к которым, конечно, относится пуск реактора в Чикаго, были отделены только тремя годами от взрыва первой атомной бомбы (1945 г.) и двенадцатью годами от пуска первой атомной электростанции (1954 г.). Последние события, несомненно, из области прикладной науки, из новых ее отраслей — атомной военной техники и атомной энергетики.

В 50-е годы началось изучение мира элементарных частиц. Появившаяся в связи с этим необходимость в строительстве все более мощных ускорителей, которые за прошедшие с тех пор двадцать пять лет достигли гигантских размеров, крайне повысила зависимость фундаментальной науки от техники. Строительство этих больших и сложных машин существенно продвинуло вперед и электротехнику и электронику.

Успехи фундаментальной науки здесь общеизвестны. Если в ранние послевоенные годы мы имели дело только с несколькими элементарными частицами, то сейчас их насчитываются сотни, правда, в подавляющем большинстве нестабильные. Эта нестабильность, кстати, указывает на сложную структуру простейших объектов природы. В последние десятилетия установлено большое число закономерностей, управляющих взаимодействием, рождением и уничтожением частиц, их структурой. Создана удовлетворительная систематика частиц.

Особенно важным представляется мне открытие антиматерии. (Позитроны были открыты в 1932 г., антипротон — в 1956 г. в Беркли. В последние годы в Серпухове были открыты антитритий и антигелий.) Физики уже

настолько привыкли к понятию антиматерии, что, думаю, недооценивают всех последствий этого изумительного открытия.

В наше время идет поиск теории элементарных частиц, теории, способной объединить все установленные теперь закономерности в некой новой концепции, которая сыграла бы такую же роль в теории элементарных частиц, какую выполнила квантовая механика в теории атомов и молекул. О прямом прикладном значении физики элементарных частиц говорить пока рано, однако ее косвенное влияние на развитие техники значительно. Опыт послевоенного развития физики говорит о том, что в наше время значительной предпосылкой успешного развития фундаментальной науки служит широко развитая техническая база.

Как видно из приведенных примеров, наблюдается тенденция к росту скорости обмена идеями между прикладной и фундаментальной наукой. Благодаря этому промежуток времени между открытием в области фундаментальной науки и его освоением в прикладной науке сокращается.

После небольшого исторического экскурса попытаемся более детально сопоставить прикладные и фундаментальные исследования.

Итак, фундаментальная наука сосредоточивает свои усилия на выяснении основных законов, основных принципов Природы. Вообще я имею в виду все естествознание, хотя примеры, на которые буду ссылаться, будут в основном относиться к физике. Очевидно, что часть наук об обществе также должна быть отнесена к фундаментальным наукам, и в еще большей степени это относится к философии.

Фундаментальную науку и сегодня часто называют «чистой». Этот термин встречается в названиях некоторых современных научных обществ (например, ИЮПАП — Интернациональный союз чистой и прикладной физики, ИЮПАК — Интернациональный союз чистой и прикладной химии) и скорее сохраняется просто по традиции.

Наука прикладная ставит перед собою задачу решения определенной технической проблемы, обычно в непосредственной связи с материальными запросами общества. При решении такого рода задач прикладная наука обычно опирается на закономерности, установленные наукой фундаментальной.

Я убежден, что в стремлении заниматься фундаментальными исследованиями сказывается важнейшая особенность Человека как биологического существа: его любознательность. Мы, люди, биологически запрограммированы так, что наиболее точное название для нас, людей, может быть не *homo sapiens* (человек разумный) и даже не *homo faber* (человек умелец), а *homo cupidus sciendi* (человек любознател).

Стремление к познанию природы заложено в глубинах человеческого разума и составляет важнейшую суть человека. Эта деятельность человека, основываясь на любознательности, является основой всего прогресса человечества — духовного и материального.

Открытие огня, паруса, колеса было результатом великих озарений, посещавших разум доисторических гениев. Именно эти великие открытия доисторического и древнего человека и были теми ступенями, шагая по которым человеческая природа отрывалась от животного мира.

Безусловно, все эти открытия относятся к фундаментальной науке и являются собой изумительные плоды любознательности.

Занятия фундаментальной наукой предъявляют еще одно важное требование: необходимость досуга для ученого. «Все лучшие плоды цивилизации возвращены на ниве досуга», — говорит Рабиндранат Тагор. Об этом же я много раз слышал от одного из моих учителей, академика Сергея Ивановича Вавилова.

Пресловутая легенда о яблоке, которое якобы навело Ньютона на мысль о законе тяготения, на самом деле иллюстрация все той же роли досуга. Дело в том, что из-за мнимой эпидемии чумы в Кембридже Ньютон уехал в глухую деревню Вульсторп и там имел возможность отвлечься от своих повседневных занятий. В этой деревушке, где якобы на него упало яблоко, Ньютон открыл закон всемирного тяготения.

О Резерфорде рассказывают, что он уволил одного из своих сотрудников, безвылазно хлопотавшего в лаборатории с утра до ночи. Резерфорд спросил его: «А когда же вы думаете?» Досуг необходим для успешной творческой деятельности: ученый должен обладать возможностями, с одной стороны, постоянно обращаться мыслями к предмету своих исследований, с другой — рассматривать свою деятельность и ее результаты как бы со стороны, критически. Эти возможности предоставляет только досуг. В большом институте существует множество факторов, не имеющих прямого отношения к научной деятельности ученого. Одна из главных опасностей, грозящих ученому, работающему в большом институте, — потеря досуга. И чем больший пост занимает этот ученый, тем эта опасность больше. Ибо никакая научно-организационная деятельность не может заменить научную. В фундаментальных исследованиях роль личной научной активности ученого, его талант, гений имеют первостепенное значение. Поэтому в фундаментальной науке практически не существует взаимозаменяемости ученых. Даже спустя много лет невозможно сказать, кто бы и когда создал теорию относительности и квантовую механику, если бы этого не сделали в свое время Эйнштейн, Гейзенберг и Дирак.

С прикладными исследованиями дело обстоит несколько проще. Трудно переоценить ту роль, которую сыграли руководители крупнейших научных программ нашего века, такие, как И. В. Курчатов, С. П. Королев у нас в стране, или Р. Оппенгеймер в США. Однако вместо них можно было бы назвать имена других людей, которые с той или иной степенью успеха повторили бы результаты их деятельности.

Читатель, наверное, заметил, что я все время акцентирую внимание на трудностях получения нового результата в фундаментальной науке. Ученый, раздумывающий над некоей фундаментальной проблемой, похож на сказочного героя, перед которым сформулирована задача: «Пойди туда, не знаю куда, принеси то, не знаю что». Он приносит то, что никому не было ведомо, и обычно находит это там, где менее всего ожидают.

Результат прикладных исследований известен заранее: он попросту изначально задается, без него нет самого исследования. Эта очевидность цели дает существенное преимущество прикладным исследованиям. К тому же не

надо забывать, что действительно только прикладная наука дает непосредственно человеку новое оружие в борьбе с силами природы.

Сейчас большую роль придают научно-техническому прогнозу, с помощью которого стремятся предсказать практическое значение той или иной научной темы. В отношении прикладной науки здесь не возникает принципиальных трудностей. Что касается фундаментальных исследований, то их результаты обычно не предсказуемы.

Поясним это примерами из истории науки и техники. Я уже говорил, что во времена Фарадея его работы казались чисто академическими и не имеющими практического значения. И не Фарадей, а люди другого склада и в другое время использовали его открытия для технических целей. В семидесятых годах прошлого столетия З. Грамм и В. Сименс создали динамо-машину, а П. Н. Яблочков, А. Н. Лодыгин и Эдисон — электрическое освещение. Подобная же ситуация имела место в радиотехнике, основной шаг в которой был сделан А. С. Поповым (1895 г.) на основе фундаментальных исследований Д. Максвелла (1873 г.) и Г. Герца (1888 г.).

Можно привести и более современные примеры.

В начале тридцатых годов в нашей стране многие считали, что занятие ядерной физикой имеет лишь академическое значение. Естественно, в годы первой пятилетки, когда наша страна только набирала силы, практические вопросы должны были иметь перевес над решением проблем, более далеких от интересов момента.

Однако уже в то время теоретическая физика развивалась. Теория твердого тела, теория металлов и полупроводников, теория оптических явлений, теория радиоволн и другие направления развивались весьма успешно. Прогнозы же по прикладному значению ядерной физики были самыми неблагоприятными. Сомнения исходили из уст самых авторитетных исследователей: Э. Резерфорд, Н. Бор, некоторые наши физики держались скептических взглядов. Даже открытие нейтрона Д. Чадвиком в 1932 г. не изменило этих скептических предсказаний. Этот пессимизм имел серьезные основания, так как среди изученных тогда ядерных реакций не было реакций, сопровождавшихся выделением энергии; реакции были эндотермическими.

Переворот во взглядах наступил практически мгновенно, когда было открыто деление урана, сопровождавшееся вылетом энергичных осколков и нескольких нейтронов. Это случилось в 1939 г. В это время возможность цепной реакции деления казалась уже весьма вероятной. Дальнейшую историю все хорошо помнят.

Для нашей страны быстрое решение практических проблем использования атомной энергии оказалось возможным потому, что исследования по ядерной физике у нас все же велись, несмотря на то, что их народно-хозяйственное значение считалось равным нулю. Новую проблему мы встретили, уже имея кадры первоклассных ученых-ядерщиков (среди них: И. В. Курчатов, А. И. Алиханов, А. И. Лейпунский, А. К. Вальтер и другие).

Другой пример — история квантовой физики. Еще в начале девятисотых годов Эйнштейн показал, что излучение атомов усиливается под действием света той же частоты. Этот хорошо известный эффект получил название «ин-

дуцированное излучение». В то время никому не пришло в голову предсказывать возможность технического применения этого квантового явления. Только в послевоенное время (1955 г.) Н. Г. Басову, А. М. Прохорову и Ч. Таунсу удалось найти путь практического использования этого эффекта в знаменитых ныне лазерах.

Непредсказуемость результатов фундаментальных исследований видна также из итогов экспериментальных работ на гигантских ускорителях. Например, ускоритель в Беркли (мощность 6 ГэВ) сооружался с расчетом открыть антипротон. В действительности на нем были открыты не только антипротон, но и «странные частицы» ( $\Lambda$ -частица,  $K$ -мезоны). Ускоритель электронов в Стэнфорде («СЛАК») предназначался для установления границ применимости электродинамики. Однако в пределах возможностей этого ускорителя никаких границ подобного рода найдено не было. Но были открыты так называемые «глубоконеупругие» процессы, позволившие заглянуть во внутреннюю структуру протонов.

Даже создавая инструмент для планируемого исследования, мы не можем точно предсказать, чего достигнем с его помощью.

Подобные примеры можно найти не только в физике. Яркой иллюстрацией может служить молекулярная генетика, которая началась с изучения мутаций в поколениях мухи дрозофиллы. Работы эти не преследовали практических целей и потому были выставлены догматиками на посмеяние как никчемные. Теперь мы знаем, что этими работами были приоткрыты двери в новый мир — молекулярной генетики. А перед человеком возникла возможность управлять наследственностью совсем новыми путями и методами.

Этих примеров вполне достаточно, чтобы видеть, насколько велики трудности разумного прогноза в фундаментальных исследованиях, и думаю, что эти трудности носят принципиальный характер. Ведь здесь мы стремимся предсказать будущее на основе тайн, о которых еще не имеем никакого понятия...

Несколько слов о роли писателей-фантастов. Насколько я могу судить, большая часть их предсказаний попросту ошибочна. Однако они создают модели, которые могут иметь и на самом деле имеют влияние на людей, занятых в науке и технике. Я уверен, например, в таком влиянии «Аэлиты» и «Гиперболоида инженера Гарина» А. Н. Толстого, увлекших многих идеями космических полетов и лазера.

И все же, несмотря на непредсказуемость, открытия в области фундаментальной физики рано или поздно служили основой радикальных сдвигов в прикладных науках. Именно понимание этого обстоятельства служило основанием того, что в нашей стране, даже в самые трудные периоды ее жизни, всячески поддерживалась фундаментальная наука.

Например, Лаборатория ядерных проблем, ныне часть нашего института в Дубне, была организована в ранние послевоенные годы, когда страна еще не оправилась от нанесенных ей разрушений и когда решение практических проблем атомной энергии еще было далеко от завершения.

Можно подвести некоторые итоги. Очевидно, что окончательные результаты тех или иных вкладов в фундаментальную науку в принципе непред-

сказуемы. Поэтому планирование фундаментальной науки неизбежно должно базироваться на творческой интуиции и знаниях тех людей науки, которым есть основания доверять. Отсюда также следует, что проектирование новых институтов и лабораторий для фундаментальных исследований должно начинаться с подбора группы людей, на талант которых можно надеяться. Только такая группа способна оценить и с наименьшей ошибкой выбрать область и направление научных исследований.

В отношении прикладных наук, как уже говорилось, требования к прогнозистам менее высоки и менее сложны, поскольку задача обычно ясно сформулирована. Группа компетентных людей, знающих свое дело, может успешно предсказать исход поставленной проблемы.

Замечу, что я далек от того, чтобы умалять значение прикладных работ и тем более достоинства людей, в ней занятых. Мы хорошо знаем, что без таланта многих наших инженеров были бы невозможны ни разработка ускорителей, ни создание атомных станций и сегодняшних термоядерных устройств. Я отлично понимаю, что радость, которую доставляет инженерам осуществление своих проектов, сродни творческому успеху ученого. Больше того, когда ученому, занятому важной научной проблемой, вдруг приходит идея ее практического применения, он испытывает немалое удовлетворение.

И тут вновь встает вопрос о месте, которое должны занимать прикладные исследования в институте, деятельность которого сосредоточена в области фундаментальных наук. (Обратная ситуация более проста: всякий фундаментальный результат в институте, деятельность которого сосредоточена на практических задачах, можно только приветствовать.) В каждом таком институте время от времени возникают идеи и методы, имеющие прикладное, народнохозяйственное значение. Пройти мимо возможностей использовать эти достижения для решения практических, тем более насущных и важных проблем было бы, на мой взгляд, непростительно. С другой стороны, чрезмерное увлечение практическими задачами может отвлечь усилия коллектива института от решения основных задач.

Здесь надо учитывать и возможности научного руководства институтом, которые ограничены, как все человеческое. Люди, как правило, не могут одновременно и глубоко руководить фундаментальной наукой и организовывать производство. Скорее всего, что-то страдает.

Наиболее правильное решение заключается в передаче проекта, метода или прототипа прибора, разработанного в институте, в специальные КБ и на заводы. В этом случае за сотрудниками института осталась бы ответственная роль консультантов. К сожалению, на практике так называемый процесс «внедрения» нового часто оказывается весьма непростым. Причин здесь много. Одна из них, например, в перегруженности КБ, прикладных институтов и заводов, в результате чего они не располагают ни материальными возможностями, ни кадрами, способными и заинтересованными подхватить новую идею и довести ее до инженерного решения. Академик П. Л. Капица, один из тех редких людей, которые сочетают талант ученого с талантом инженера, рассказывает в своей книге «Теория и практика эксперимента», что для него оказались непредвиденными огромный труд и немалые хлопоты,



которые понадобились ему, чтобы наладить производство турбокомпрессоров для сжижения кислорода, разработанных в его институте. Этот пример еще раз доказывает, что в реальной жизни доведение научно-технической идеи до ее полной реализации может потребовать от института (занятого фундаментальными исследованиями) усилий, которые явно отвлекут его от решения основных задач. Думаю, что подобная ситуация должна быть скорее исключением, нежели правилом.

Надо помнить, что фундаментальная наука всегда рано или поздно дает практические результаты. Вот несколько примеров «выхода» в практику такой, казалось бы далекой сегодня от нее области, как физика элементарных частиц.

Создание ускорителей передвинуло на другой, более высокий уровень и электротехнику, и технику вакуума, и радиотехнику. Были решены многие задачи, относящиеся к управлению пучками заряженных частиц, и разработанные для этой цели методы могут иметь самое разнообразное применение.

Необходимость обработки камерных снимков привела к разработке новых методов автоматизации, значение которых также выходит за пределы физики высоких энергий. Были разработаны специальные программы и языки для разговора с ЭВМ.

Вследствие необходимости в больших пузырьковых камерах значительные шаги сделаны в криогенной технике, разработаны высокопроизводительные ожижители гелия, освоены методы обращения с большими количествами жидкого газа, особенно жидкого водорода.

Пучки мюонов, протонов и пионов используются в медицине для лечения злокачественных опухолей, причем получены обнадеживающие результаты. Мюоны используются в химии для определения кинетики реакций. Намечается их использование в медицине для диагностических целей.

В последнее время потребность в уменьшении размеров магнитов и энергетических затрат в ускорителях инициировала работы в области сверхпроводимости. Создание сверхпроводников, устойчивых при высоких температурах и в переменных полях, может привести к фундаментальному прогрессу в электротехнике.

На реакторах, приспособленных для ядерно-физических исследований, были измерены важнейшие константы, необходимые для проектирования мощных энергетических реакторов. В частности, было измерено число, определяющее возможность использовать не только уран-235, которого в природе очень мало, но и уран-238, количество которого в 110 раз больше. Есть основания думать, что и развивающаяся в последнее время физика многозарядных ионов даст практически полезные плоды.

Исходя из своего многолетнего опыта работы в исследовательских организациях, я могу констатировать, что четко делить деятельность ученого на фундаментальную и прикладную практически невозможно. Однако различие между ними существует, так же как существует и различие в направленности человеческих способностей к одной или другой области науки.

Поэтому научные коллективы должны быть все-таки качественно различными.

Во всяком случае, умеренная доля фундаментальных исследований в прикладном институте, так же как и умеренная доля прикладных исследований в институте, занятом фундаментальными исследованиями, может быть весьма полезна. Все дело в мере.

Если же говорить об общих предпосылках планирования научных работ и соотношении фундаментальных и прикладных исследований в масштабе страны, то здесь, исходя из всего сказанного выше, следует, что средства, вкладываемые в фундаментальную науку, нужно соизмерять лишь с наличием людей, которым можно доверить риск подобных исследований, и с экономическими возможностями общества. В прикладную науку проще подобрать кадры, а затраты должны диктоваться потребностями решения жизненно важных научно-технических задач.

Планируя науку в современном обществе, необходима учитывать те тенденции в его структуре, которые уже довольно ясно обозначены.

Одна из особенностей человеческого рода состоит в способности к распространению знаний в обществе цепным образом и в передаче накопленных знаний следующему поколению в возрастающем объеме. Если через  $C_N$  обозначить объем знаний  $N$ -го поколения, а через  $C_{N+1}$  — знания следующего поколения, то в человеческом обществе

$$\alpha = \frac{C_{N+1}}{C_N} \geq 1, \quad (1)$$

где  $\alpha$  — есть коэффициент умножения знаний. При постоянном коэффициенте  $\alpha > 1$  рост знаний экспоненциальный, то есть знание порождает знание. Напротив, в животном мире коэффициент  $\alpha$  или точно равен 1, как это имеет место в наиболее организованных сообществах (примером таких сообществ являются некоторые насекомые, например, муравьи, пчелы), или колеблется около 1:

$$\alpha = 1 \pm \varepsilon, \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  — малое число.

Эта замечательная черта развития знаний в человеческом обществе особенно наглядно проявляется в наше время. Каждое новое поколение людей значительно преумножает богатство знаний, полученное в наследство от предыдущего поколения. И этот непрерывный рост вряд ли может быть чем-либо ограничен.

В том, что человек по своей природе любознателен, я думаю, заключена одна из основных, главных особенностей человеческого рода. В послевоенное время особенно отчетливо видна тенденция повышения научной и изобретательской деятельности: активность людей все больше перемещается из сферы производства вещей в сферу производства идей. Отношение

$$\Phi = \frac{\text{активность в производстве идей}}{\text{активность в производстве вещей}} \quad (3)$$

будет постоянно расти. Это означает, что научная и изобретательская деятельность будет приобретать все большее и большее значение в сравнении с трудом в цехах и на полях, где автоматизация будет вытеснять люд-



ской труд. Новая формула человеческой занятости диктует новые решения. В преддверии этой тенденции у нас в стране принято решение правительства о введении всеобщего среднего образования. Это важно, ибо центр тяжести активности человека перемещается в институты, лаборатории, в конструкторские бюро.

Эта общая тенденция, кстати, будет поддерживать приоритет фундаментальной науки (в том числе и физики) и ее право на безбедное существование. В то же время связи между прикладной наукой и наукой фундаментальной будут становиться более тесными, взаимное влияние — более значительным, оборот идей — более скорым. Сказанное выше может быть проиллюстрировано схемой человеческой деятельности, определяющей научно-технический прогресс.

Три «этажа» этой деятельности влияют друг на друга различным образом (см. схему).

Линии связи можно рассматривать как информационно-управляющие. Направленные вверх — прямые, направленные вниз — обратные связи.

Надо подчеркнуть, что приведенная схема ни в коем случае не является изображением какой бы то ни было иерархии. Было бы совсем не разумно считать какой-то из этажей более важным, чем другой. Речь идет о связях и влияниях, а не о важности: важность определяется конкретными историческими обстоятельствами.

Поток по линиям 1, 2, 3, обеспечивающий материальную базу фундаментальной науки, должен быть настолько мощным, насколько мощным позволяют его сделать материальные ресурсы общества. Поток по линиям 4 и 5, обеспечивающим снабжение общества и круга лиц, занятых в прикладных науках информацией о принципиально новых идеях и фактах, должен идти без задержек во времени и без искажений в точности. На линии 6 должен быть поставлен фильтр, который бы ограничивал обратное влияние устаревших и предвзятых мнений, неизбежно существующих в любом обществе.

Наше общество, следуя своим главным принципам, обеспечивает широкие возможности для прогресса, на основе планирования науки и народного хозяйства, опирающегося на разумный научный анализ ситуации, непрестанно меняющейся под влиянием развития науки и техники. И в этом залог наших будущих успехов.

## ДВЕ ВЕТВИ ПОЗНАНИЯ МИРА\*

### Человек и три его особые сути

Многообразие живых существ огромно. Образ жизни многих из них не имеет с нашим ничего общего. Но отличие человека от существ, сравнительно близких к нему, не менее радикально.

Самый простой пример. Археологи обнаруживают останки некоего примитивного существа, обнаруживают следы его деятельности. Кто он? Человек он или еще нет? Как ответить на этот вопрос?

Следуя Энгельсу, в качестве решающего критерия принимают способность производить орудия производства. Действительно, если приглядеться к находкам в поселениях доисторического человека, то мы обнаруживаем там материализованные следы такой духовной жизни, которая абсолютно чужда всем другим видам, населяющим Землю. Это изобретения, целая цепь изобретений, тянущаяся из глубины времен: изобретение обработки орудий, шкур, величайшее из изобретений человека — очаг. Изобретение копья, лука, колеса, лодки, паруса, приручение домашних животных и т. д.

Все эти достижения были следствием пристального наблюдения природы и великих озарений, посещавших время от времени умы неведомых нам изобретателей, подлинных гениев своей эпохи. Они явились теми ступенями, по которым человечество поднималось над остальным животным миром. Сыграла свою роль важнейшая особенность человека как биологического существа — его любознательность, повышенная способность к наблюдению и анализу.

Неодолимое стремление к познанию мироздания заложено в глубинах человеческого разума и составляет первую суть человека. Именно эта особенность являлась до недавнего времени основным стимулом развития фундаментальной науки.

Вторая суть человеческого рода состоит в особой способности к накоплению и распространению приобретенных знаний. В пределах одного поколения они распространяются по принципу цепной реакции — один человек передает свои знания нескольким другим; каждый из них — дальше. Этот характер передачи знаний особенно ясно виден в системе современного обучения.

Однако важнейшая особенность человека состоит в способности передавать знания от поколения к поколению в расширенном объеме, с некоторым

коэффициентом умножения, заметно превышающим единицу. Этот феномен не наблюдается у других представителей животного мира Земли<sup>1</sup>.

Третья суть человека — неодолимая потребность в эмоциональном контакте с окружающим миром.

Начиная с глубокой древности, мы находим наскальные рисунки и примитивные сооружения (вроде знаменитых кавказских дольменов), показывающие, что у человека всегда имелась потребность создавать предметы, не имеющие непосредственного отношения к хозяйственной, практической деятельности. Они были предметом искусства и религии и относились к совсем другой стороне деятельности человека — к организации его душевных эмоций. Эта важнейшая особенность человеческой активности достигает совершенной значительности в историческое время, когда создаются величайшие произведения искусства — строятся храмы, гробницы, мавзолеи, развиваются скульптура и живопись. Эмоциональное воздействие этих творений настолько велико, что и современный человек испытывает душевный трепет, созерцая великие памятники прошлого. Изымите древние памятники Греции и Рима, России и Мексики, Индии и Перу, и мир покажется опустошенным.

Ощущение своего родства с бесконечной Вселенной, вера в ее благонамеренность по отношению к человеку, преклонение перед ее гармонией и красотой всегда были и будут ничем не заменимым душевным богатством людей.

Только такое взаимоотношение с окружающим миром способно дать человеку ощущение своей значимости, выходящей за пределы бессмысленной и скудной поденщины.

Мне приходилось видеть стаи кеты, идущей вверх по рекам на нерест. Я думал: знает ли она, что идет на верную смерть? Очевидно, не знает. А не прекратился бы ее род, если бы она знала, что ее ждет?

Возможно, что человек — единственное живое существо на Земле, на долю которого выпало понимание конечности своего индивидуального существования, понимание ожидающей его смерти. Создание памятников есть проявление страстного желания преодолеть эту конечность, обессмертить себя в жизни будущих поколений.

Поэтому, в этой третьей, особой сути человека, быть может, отражается потребность установить отношение между конечным (человек) и бесконечным (Вселенная).

Многие великие люди понимали значение этой особенности человека: то, что здесь сказано, лишь экстракт из их мировосприятия и миропонимания.

Если первые две сути человека являются основой технического и социального прогресса, то третья необходима для обеспечения эмоциональной жизни людей — она основа искусства. Она же была основой религий.

Нарушение эмоциональной гармонии человека с окружающим миром ведет к психическим заболеваниям, к наркомании, алкоголизму, к преступности, к разрушению личности и общества.

## Наука

Наука основывается на первой сути человека — на его любознательности, на стремлении познать мир и свое положение в нем. Она добытчица истины.

Исключительная по глубине способность к наблюдению и мощнейший аппарат логического мышления отличают человека от других животных, населяющих известный нам мир.

Наука основывается на рациональном логическом мышлении. Логика — ее важнейшее оружие. Эмоциональная сторона играет в научной деятельности немаловажную, но все же второстепенную роль.

Сама по себе способность к познанию внешнего мира есть, очевидно, необходимое условие существования жизни. Однако та степень этой способности, которую проявляет человек, выглядит как чудо, еще ожидающее своего разъяснения. Хотя, конечно, далеко не всех она удивляет.

Современный научный работник настолько поглощен своей деятельностью в узкой области, что рассматривает научную деятельность как нечто само собой разумеющееся. Он не удивляется самой возможности познания мира, его непостижимой красоте и гармонии. Картина Вселенной в его сознании приобретает характер самоочевидной и скучной тривиальности.

Тайны мироздания для такого деятеля ничем не отличаются от «тайн» учебника, который он пока не удосужился протудировать. Научная деятельность в своей самой распространенной форме превратилась за последнее время из призвания и подвига в профессию, которой можно легко овладеть.

На заре развития современной науки величайший гений всех времен Исаак Ньютон писал: «Не знаю, чем я могу казаться миру, но сам себе я кажусь только мальчиком, играющим на морском берегу и развлекающимся тем, что время от времени отыскиваю камешек более цветистый, чем обыкновенно, или красивую ракушку, в то время как великий океан истины расстилается передо мной неисследованным».

В статье, посвященной Иоганну Кеплеру, А. Эйнштейн выразил глубокое изумление перед тем фактом, что открытые греками кривые конических сечений, абсолютно ненужные в их практике, оказались теми кривыми, которые с огромной точностью описывают форму орбит планет и спутников. А. Эйнштейн писал: «К восхищению перед этим замечательным человеком (Кеплером) добавляется еще чувство восхищения и благоговения, но относящееся не к человеку, а к загадочной гармонии природы, которая нас породила: еще в древности люди придумали кривые, которые соответствуют простейшим законам. Наряду с прямой и окружностью среди них были эллипс и гипербола. Последние мы видим реализованными в орбитах небесных тел, во всяком случае с хорошим приближением.

Представляется, что человеческий разум должен свободно строить формы, прежде чем подтвердится их действительное существование.

Замечательное произведение всей жизни Кеплера особенно ясно показывает, что познание не может расцвести на голой эмпирии. Такой расцвет возможен только из сравнения того, что придумано, с тем, что наблюдается».

Абстрактная, «воображаемая» геометрия Н. И. Лобачевского, созданная им как логическая возможность, построенная по идеалу красоты и гармонии,

оказалась необходимой для описания пространства скоростей в физике элементарных частиц. Геометрия Римана нашла свое применение в общей теории относительности — в теории всемирного тяготения. Теория комплексного переменного — теория «мнимых» чисел — применяется в гидродинамике и в других областях физики.

Видимо, этот исторический опыт позволил П. Дираку высказать утверждение, что важно получить красивое, логически стройное уравнение, а опыт, использующий это уравнение, найдется со временем: «По-видимому, если глубоко проникнуть в сущность проблемы и работать, руководствуясь критерием красоты уравнений, тогда можно быть уверенным, что находишься на верном пути. Если же нет полного согласия теории с экспериментом, то не стоит слишком разочаровываться, ибо это расхождение вполне может быть вызвано второстепенными факторами, правильный учет которых будет ясен лишь при дальнейшем развитии теории».

Итак, человеческий разум, руководствуясь принципом красоты логического построения, которая сама не поддается определению, оказывается способным предсказывать возможные закономерности внешнего мира, с которыми он еще не имел случая встретиться в жизни. Но значит ли это, что наш разум посвящен в тайны мира, но не помнит, когда и где произошло это посвящение?

Тем не менее, рассматривая ту или иную теорию, мы прежде всего оцениваем ее логическую структуру и только затем судим о ее красоте или несовершенстве. Таким образом, в случае науки речь идет о красоте логического рационального построения. Следовательно, в науке логика предшествует эмоции, хотя и последняя играет немаловажную роль.

## Искусство

Искусство опирается на третью сущность человека — на его неодолимую потребность в эмоциональном контакте с внешним миром.

Искусство исходит из эмоционального восприятия внешнего мира. Рациональное, логическое мышление играет в искусстве второстепенную роль, само по себе базируясь в этом случае на эмоции.

В этом заключается основное отличие искусства от науки.

Деятельность человека, которую мы называем искусством, базируется на субъективном наблюдении мира и эмоциональном его восприятии художником. Логическое мышление приходит в искусство как вторичная структура. Наука и искусство имеют только то общее, что их целью является открытие нового, другими людьми не замеченного.

В первом случае имеется в виду открытие законов природы и общества, во втором — новое, более глубокое восприятие мира, запечатленного в образах.

Подобно тому, как ученый, идущий по пройденному пути, — это лишь педагог или популяризатор, но не творец нового, так и художник, повторяющий других мастеров искусств — в лучшем случае полезный ремесленник.

Наука и искусство — это два дополняющих друг друга отношения к окружающему миру, и ни одно из них не в состоянии заменить другого. Ни

одному из них нельзя отдать превосходства, поскольку методы воздействия на человека совершенно различны.

Наука исследует мир объективными методами. Она открывает нам законы природы и создает тем самым основу материального существования человечества.

Искусство вытекает из непосредственного контакта с миром и через эмоциональное воздействие объясняет нам структуру мироздания и сущность человека.

Короче это можно сформулировать так: наука есть основа миропонимания, искусство — основа мировосприятия.

Их сумма есть основа гармонического восприятия мира — основа человеческого мироотношения.

На ранних этапах развития человеческого общества противопоставление науки и искусства было почти невозможным. В значительной мере наука и искусство объединились в религии.

Только на очень поздней стадии наука отделилась от религии и даже вступила с ней в острое противоречие.

Потребность в эмоциональном контакте с внешним миром, необходимость организации эмоций преследовали человека с момента его отделения от остального животного мира. Сознание конечности своего существования и понимание неизбежности личной смерти заставили человека искать пути к вечности. Так возникал культ предков, дух которых представлялся неумирающим, соучаствующим в жизни живых людей. Упрощенно и наивно думать, что древнейшее искусство преследовало чисто утилитарные цели. Вряд ли справедливо понимание наскальных рисунков как руководство по охоте. Скорее всего, оно вытекало из рано развившейся потребности закрепить свое «я» в памяти потомков. Это соображение подкрепляется тем фактом, что в более поздние эпохи развития человеческого общества эта тенденция стала совершенно ясной и выражалась в создании великих памятников: пирамид, храмов, дворцов.

Ни одно существо, кроме человека, не может похвалиться созданием столь «бесполезных» сооружений. Сооружений, которые требовали невероятных усилий и жертв: доисторические дольмены, древние храмы эллинов и хмеев, египетские пирамиды, храмы Мексики, средневековые соборы и русские церкви.

Эти усилия и жертвы оправдывались только острейшей потребностью организации человеческой души. Каков бы ни был «социальный заказ», истинное произведение искусства может быть создано только гением, который по самой своей сути не в состоянии насиловать себя, создавая произведения, противоречащие его мировосприятию и его миропониманию. Гениальные произведения искусства суть великое отражение духа эпохи, духа народа, даже в том случае, когда они эксплуатировались господствующими классами в их низменных интересах.

Эксплуатируемые классы не состоят из тупиц. «Простые» люди способны отделить идею от ее эксплуататоров. Отделить бога от жрецов. Безвестные



строители наших храмов и церквей не могли быть попросту рабами, исполнителями чужой, лицемерной воли: они были великими художниками.

Величайший художник никогда не был рабом чьих бы то ни было чуждых его духу идей. Красоту нельзя создавать по приказанию, ибо она есть выражение красоты внутренней, свойственной лишь самому творцу-художнику. Кто мог приказать построить Кижи? Или храм Покрова на Нерли?

Великий Микеланджело, работавший при поддержке пап римских и по их заказу, создал гениальное произведение, отражавшее светлый дух Ренессанса — стенную роспись и плафон Сикстинской капеллы. Он смело преобразил аскетических еврейских богов и пророков в сильных и жизнерадостных людей, прекрасных представителей эпохи Возрождения — пробуждения человеческой личности от кошмаров Средневековья. Такими же были Леонардо да Винчи, Рафаэль и другие великие художники, которые использовали религиозную тематику, чтобы показать красоту человека и рассеять страшный дурман того времени, когда католические монахи, превратившиеся в торговцев религией, загнали человеческую душу в мрачные углы средневековых храмов.

Великий русский художник Андрей Рублев не понял бы тех, кто стал бы толковать его гениальные произведения как орудия одурманивая народа. Он был истинным выразителем того светлого духа народа, который позволил ему одолеть тяжелое безвременье татарского ига и эгоизм феодалов. (Тарковский в фильме «Андрей Рублев» не сумел показать этого важнейшего обстоятельства.)

Я видел, как меняются лица людей, входящих в собор Сан Шапель в Париже: они становятся светлее и красивей. Я наблюдал тот же эффект созерцания красоты на лицах людей, стоящих перед Сикстинской мадонной в Дрездене, перед Венерой Милосской в Лувре, в Ватиканской капелле, расписанной Микеланджело, в Третьяковке перед иконами Рублева.

Правда и красота суть единственные герои искусства.

Истина и красота суть единственные предметы науки.

Там, где незаметно присутствие этих бессменных и бессмертных богов человека, нет ни искусства, ни науки.

Поэтому подлинные памятники искусства в архитектуре, скульптуре, живописи и литературе всегда были делом людей, могущих видеть и понимать более других своих современников.

Великие творения — звезды истории, напоминающие нам о том, что мы люди, что не единым хлебом жив человек.

## **Искусство и реальный мир**

Искусство не призвано попросту копировать реальность. Буквальное копирование невозможно. Искусство призвано демонстрировать мир глазами художника, его слухом и его, художника, мышлением.

Великий поэт И. В. Гёте так писал о сущности поэтического творчества: «Размышления поэта относятся собственно только к форме; сюжеты представляет ему жизнь щедрою рукою; содержание само бьет из полноты его

внутреннего мира; вне сознания встречаются они — так что в конце концов не знаешь, кому же принадлежат эти богатства.

Но форма, хотя она уже во всей полноте присуща гению, требует познания, требует мысли, и именно думать надо для того, чтобы пригнать форму, сюжет и содержание друг к другу так, чтобы они слились в одно целое, проникли друг в друга».

Итак, в художественном произведении имеются три компонента: сюжет — заимствованный из внешнего мира, содержание — раскрывающее смысл или идею, форма, которую избирает художник.

Выбор формы требует таланта и делает произведение произведением искусства. В дальнейшем я буду говорить преимущественно об изобразительном искусстве — оно наиболее близко мне.

Остановлюсь на проблеме «воспроизведения» реальности.

Даже научная фотография, предназначенная наиобъективнейшим образом отображать действительность, неизбежно односторонняя, в силу несовпадения ее средств со свойствами объектов. В фотографии невозможно воспроизвести то отношение яркостей, которое встречается в природе. Еще в большей степени это относится к живописи. Отношение яркостей на полотне художника не превосходит нескольких единиц, в то время как в природных условиях оно может измеряться огромными числами. Отблеск на воде и тень у камня отличаются по яркости в миллион раз.

Чтобы создать у зрителя эмоции и мысли, эквивалентные его собственным, художник пользуется условными приемами, заменяя контрасты цветовыми отношениями.

Художники-самородки лучше профессионалов понимают условность искусства. Они не стремятся посадить на конек крыши модель, воспроизводящую реального петуха.

Петушок на коньке крыши всегда был символичным, он был произведением искусства, которое никогда не рассматривалось как результат неумения сделать адекватную модель петуха.

Когда на сцену выводят живую лошадь, то впечатление от спектакля не усиливается, а ослабляется из-за возникновения мыслей, не имеющих отношения к спектаклю. Искусство условно, однако есть великий закон, ограничивающий произвол художника. Оно призвано воздействовать на зрителя через красоту даже в том случае, если художник изображает некрасивое и жестокое (например, распятие). Оно должно быть искренним и правдивым, даже если оно ему заказано.

Ложь и некрасивость несовместимы с искусством так же, как несовместимы с наукой подделка экспериментальных данных или бездоказательное отрицание нового.

Еще более ясна условность искусства в музыке, которая весьма редко пользуется звукоподражанием. Она создает свой собственный звуковой мир, организующий чувство и мышление слушателя в том смысле, который вложил композитор в свое произведение. Существуют еще и другие ограничения в отношении произведений искусства, связанные с физиологией зрительного и слухового восприятий. Инфразвуки с частотой несколько колебаний в се-

кунду (несколько герц) нарушают нормальную работу человеческого организма. Звуки силой более 120 децибел способны повредить органы слуха.

Резкие, хаотические звуки раздражают нервы человека. Совершенно периодические звуки усыпляют его. То же относится и к зрительным восприятиям. Гармонично, то есть находится в соответствии с природой нашего восприятия то, к чему слух или зрение успевают адаптироваться, в частности, явления почти периодические.

Мы можем долго наслаждаться зрелищем морского прибоя, который с каждой волной приносит нечто новое, несходное с предыдущим. Подобным же образом можно отдыхать, глядя на движущиеся механико-оптические картины американских художников, которые напоминают то сменяющиеся солнечные закаты, то пламя костра, то плавление цветных стекол.

Искусство никогда не стояло на месте, не стоит оно и теперь; как наука, оно находит для своих целей новые технические средства.

Фотография и кино достигли высшей степени совершенства. В дополнение к ним сейчас приходит голография, допускающая пространственное изображение, с такой точностью воспроизводящее реальный образ, которое недоступно никакому художнику, применяющему старые методы работы.

Вторжение новой техники вызывает ряд вопросов относительно будущего изобразительных искусств.

Оставляет ли оно что-нибудь на долю живописца и скульптора? Не уничтожается ли искусство?

Ответ на этот вопрос должен быть отрицательным.

Искусство имеет свое инвариантное содержание, не зависящее от тех технических средств и приемов, которыми оно пользуется. Идея и настроение, переданные средствами красоты, останутся навсегда неоспоримым содержанием искусства, способного «жесть сердца людей» или влиять на их душевное состояние.

Современное человечество вступило в эпоху, когда жизненно важные проблемы приобретают планетарный, всеземной характер. Первейшая из них — проблема сохранения природы, обеспечения людей энергией и питанием — необходимые предпосылки для духовного развития человека.

В эту эпоху важнейшая задача искусства — поддержать дух человека, вселить веру в разум. Напомню, что «человек» — значит: «разума — сто лет». Человечество, преодолевшее в прошлом великое оледенение Земли, должно преодолеть современное оледенение душ.

Важной задачей является и воспитание эстетического вкуса. Современные ученые-физики, биологи, астрономы, используя имеющиеся в их распоряжении технические средства, видят прекрасные «пейзажи», недоступные невооруженному глазу. Необычайные пейзажи видят и летчики, космонавты, подводники.

Было бы неправильно лишать людей, которые по роду своей профессии не имеют возможности видеть своими глазами «пейзажи из страны науки», доступа к этому новому миру красоты.

Искусство не должно отрываться от науки, получившей в XX столетии великое развитие — в физике, в биологии, в астрофизике. Обе ветви культуры

объединяет стремление к открытию нового, ранее невиданного, непонятного или, попросту, незамеченного.

Поэтому поучительно знать, что современная наука использует различные подходы к пониманию природы тех или иных явлений. Приведу пример, относящийся к переднему фронту современной физики — к теории элементарных частиц. Одни физики предпочитают пользоваться методом моделей. Они стремятся построить конкретный образ элементарной частицы, заимствуя его черты из более знакомых и наглядных явлений.

Таким путем шел, например, японский физик Саката, предложивший считать нуклоны (протоны, нейтроны, гипероны...) состоящими из трех «более» элементарных субчастиц. Здесь использовались аналогии из атомной и молекулярной физики, а также из химии.

Другие физики, стремясь понять структуру элементарных частиц, используют абстрактные математические методы, особенно теорию групп. На этом пути удалось прийти к важному выводу, что субчастицы Сакаты должны иметь не целый, а дробный электрический заряд. Сейчас их называют кварками, их существование подтверждается экспериментально.

Эти два подхода к пониманию физических явлений в микромире — конкретный и абстрактный — не противоречат друг другу; ни один разумный теоретик не оспаривает их осмысленности и значимости.

Более того, с течением времени то, что казалось ранее абстрактным и труднодоступным, приобретает новую наглядность, так сказать, наглядность второго порядка, и становится доступным широкому кругу людей.

С эстетической точки зрения можно взглянуть на абстрактную теорию групп (теорию симметрии) как на теорию, дающую основу для глубокого понимания и красоты кристаллов, и красоты орнаментов, и красоты атомного мира, хотя он и ненаблюдаем простым глазом.

Наука не только предоставляет искусству новые технические средства и новые возможности, но и открывает новые сферы видения.

## Антиискусство

Искусство так же, как и наука, имеет своего антипода — лжеискусство, которое используется темными силами во вред человеческому обществу. Эта деятельность образует царство антиискусства.

В последние годы в западной музыке, в западной живописи и скульптуре наметилось оригинальничание мерзостью — направление, обреченное на скорую гибель, как противоречащее самому существу искусства.

Принести букет на свадебный праздник дело естественное. Принести исключительный по красоте букет нелегко и непросто.

Гораздо легче достигнуть памятного эффекта, если принести в дар невесте кучу мусора. Некоторые художники сейчас следуют очень похожему пути к славе.

Скорее всего окажется тупиком и авангардистская музыка, грубо нарушающая принцип почти периодичности. Это все равно, что писать картины грязными и негармонизирующими красками.

В сопоставлении с авторами авангардистской музыки явно выигрывают те композиторы, которые ищут новое на пути синтеза классической музыки, современного джаза и рок-музыки.

Подобное же авангардистское направление имеет место в живописи и скульптуре, где также стремятся достигнуть эффекта, прибегая к показу безобразного. Например, некто сделал из хорошего материала куб и встал на него сам. Эта композиция и есть якобы новая скульптура. Но где же здесь открытие нового, глубина видения? Это попросту оригинальничание.

С таким «искусством» я познакомился на VI Интернациональной выставке авангардистов в музее Гугенхайма в Нью-Йорке.

Я всматриваюсь в спиральные стены и ничего не вижу. Но где же экспонаты? Поднимаюсь на лифте и пытаюсь обозреть экспозицию сверху. Впечатление не меняется. Пустые ниши, на парапетах разложены черные конторские книги, кое-где лежат веревки, куски железа, кабели... Неужели я попал сюда во время подготовки новой выставки? Однако это не так. Эта удручающая пустота и есть VI Интернациональная выставка. Вот что написано в пояснении: «Неважно, что вы видите на наших стендах; важно то, насколько вы обдумаете ваш путь к новому сознанию».

Быть может, лучше выглядят в нижних затемненных залах черно-белые проекции в натуральную величину пейзажей и ландшафтов: скалы и селения, улицы — да еще некоторые конструкции для интерьеров. Но остальное... Голубой квадрат — «Проект дня»; черный квадрат — «Трудный путь»...

Или сто черных конторских книг, испещренных цифрами. Белые квадраты с числами месяца марта от 1-го до 31-го называются «Сегодня»...

Наконец, совсем пустые стены с записочками, призывающими «Сделай что-нибудь с другими предметами», «Сделай что-нибудь с комбинацией 2 и 3». «Сделай что-нибудь с собой в пространстве». «Нарисуй что-нибудь на стене!» Я нарисовал. «Напиши что-нибудь». Я написал: «Меня мама учила не писать на стенах...»

Меня любезно встречают в кабинете директора, мистера М. Светлое бюро, книги, репродукции, альбомы, красивая секретарша...

Разговор идет об искусстве русском и американском, о выставке.

«Какое впечатление осталось у вас о нашей выставке?» — «Я думаю, она не имеет отношения к искусству». — «Почему же?» — «Я не вижу там красоты». — «Но вы признаете красоту математических построений и теорий. Они ведь тоже абстрактны. Разве экспонаты нашей выставки не вызывают никаких эмоций?» — «Вызывают. Но если художник вместо 31 квадрата выставил только один, то он вызвал бы ничуть не меньше эмоций. Например, число 18 могло бы навести меня на размышления, связанные с Парижской коммуной и днем рождения одной моей близкой родственницы... При чем здесь искусство? Воздействие такой «картины» носит чисто случайный характер. Ведь любая вещь, помещенная для обозрения, вызывает у зрителя те или иные ассоциации...» — «Вы, кажется, подходите к сути дела: современный авангардист пытается воздействовать на зрителя средствами, хорошо ему знакомыми. Красочной консервной банкой, отчетной книгой, телефонным звонком, разбитым стаканом...» — «Так что же, если принести сюда гнилое

полено и сделать соответствующую подпись, то это уже произведение?» — «Возможно, это будет вашей удачей».

Возвращаясь сейчас к этому любопытному разговору, я вспоминаю слова мистера М. о красоте в математике. Это отличный пример, но он говорит не в пользу настенных календарей и счетоводных книг как произведений искусства. Следует ясно видеть различие между искусством и наукой.

Красоту в математическом построении мы видим после того, как поняли его логическую структуру; видение красоты возникает в результате размышления. В искусстве же, напротив, размышление возникает как следствие прямого восприятия красоты.

Наука и искусство суть средства к познанию жизни, но пути, которыми они доходят до разума и сердца человека, различны и даже противоположны. Спутать эти два способа познания — значит обеднить мир человеческого восприятия. Именно в этом следует видеть коренное заблуждение «авангардизма».

К несуразным явлениям следует также отнести невежественное заигрывание с наукой. Некоторые абстрактные картины поясняются научными терминами, подчас неграмотно употребляемыми. Этим, например, увлекается испанский художник Сальвадор Дали, который даже рискует считать себя предшественником Эйнштейна.

Бессилие рассказать о себе, о своем видении и понимании мира находит выражение и в таком новейшем направлении в живописи, как «концептуализм». Сторонники этого направления вообще полагают, что незачем писать и выставлять картины. Достаточно повесить на стене листок с кратким описанием предполагаемой работы; зритель должен сам довообразить ее.

В лучшем случае это просто замена изобразительного искусства плохой литературой.

Все эти направления противоречат природе изобразительных искусств и обречены на гибель. О них будут вспоминать лишь как о попытках на пути оригинальничания приобрести славу мастеров.

Пути подлинного искусства обойдут эти несуразности.

Но было бы ошибкой думать, что оно останется в плену классических технических средств. Новая техника дает новые средства.

Более того, она уже породила кино и телевидение, сила которых в их массовости. Эта их особенность является вместе с тем и их слабостью. Слабостью, которая легко используется предателями искусства, распространяющими с помощью этих великих достижений науки культ жестокости и насилия, безверия в будущее человечества и в силу его разума.

Отсюда вытекают следующие задачи всех настоящих художников:

- а) бороться против античеловеческого использования искусства;
- б) против его фальсификации;
- в) против лжеискусства.

Закончим наш очерк лаконичным сопоставлением структур науки и искусства:

### *Наука*

Наблюдение — объективное.

Логическое мышление.

Эмоциональное восприятие.

### *Искусство*

Наблюдение — субъективное.

Эмоциональное восприятие.

Логическое мышление.

Но все же эти два вида человеческой деятельности, единые в глубокой древности, взаимопроникают и в наше время.

Они не антиподы, они дополняют друг друга и будут существовать, пока существует род человеческий.

*БЛОХИНЦЕВ Дмитрий Иванович*

**ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ**

Том 2

**ПРИНЦИПИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ.  
КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ И ТЕОРИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ.  
ВЫСТУПЛЕНИЯ ПО ОБЩИМ ВОПРОСАМ НАУКИ**